ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1970 год Выпуск 40

УДК 517.9:534.I

РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛЕНОЧНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО РЕЛЕ

Р.Г.Лукьянова, С.И.Фадеев, К.В.Шведова

Введение

К проблеме описания работы плёночного электростатического реле имеет отношение следующая задача, сформулированная в [I]: найти статический прогиб натянутой пластинки с заделанными концами под действием электростатических сил притяжения. На пластинку и неподвижные плоские электроды подаётся разность потенциалов U, в результате чего пластинка притягивается к этим электродам (рис.I). Размеры пластинки таковы, что толщина h много меньше длины l и ширины. Кроме того, предполагается, что зазор между пластинкой и неподвижными электродами мал по сравнению с другими размерами, но может быть сравним с h. Поэтому можно считать, что нагрузка на элементарную площадку пластинки, обусловленная разностью потенциалов U, определяется только величиной зазора в рассматриваемом месте и, следовательно, изгиб пластинки будет цилиндрическим.

При этих предположениях форма изгиба пластинки в сечении (уравнение средней линии), как это изображено на (рис.I)*), находится из решения краевой задачи [2] :

*) Все рисунки даны в приложении.

$$\mathcal{D}\frac{d^4Y}{dX^4}=P\frac{d^2Y}{dX^2}+\varphi(X)F(Y), \qquad (1)$$

$$Y=\frac{dY}{dX}=0 \text{ при } X=0 \text{ и } X=\ell .$$

Здесь X – линейная координата, $Y=Y(X)$ – величина прогиба, $\mathcal{D}$ – жёсткость пластинки, P – сила натяжения, отнесенная к ширине пластинки; $\varphi(X)$ – ступенчатая функция, определяемая расположением неподвижных электродов. В нашем случае неподвижные электроды расположены симметрично относительно $X=\frac{1}{2}\ell$ и (рис. 1).

$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & \ell_1<X<\ell_2,\ \ell-\ell_2<X<\ell-\ell_1;\\ 0, & 0<X<\ell_1,\ \ell_2<X<\ell-\ell_2,\ \ell-\ell_1<X<\ell.\end{cases} \qquad (2)$$

Нагрузка на единичную площадку имеет вид:

$$F(Y)=\frac{\varepsilon_0 U^2}{2\left[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)-Y\right]^2}, \qquad (3)$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная для пустоты, ε – относительная диэлектрическая постоянная, d – расстояние между пластинкой и электродами при $U=0$, $(d-H)$ – толщина диэлектрика, покрывающего электроды.

Сделаем переход к безразмерным величинам ξ и y по формулам:

$$X=\ell\xi,\quad Y=\left[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)\right]y \qquad (4)$$

При этом равенства (1) примут вид:

$$\beta^2\frac{d^4y}{d\xi^4}=\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varphi(\xi)\frac{\varkappa}{(1-y)^2}, \qquad (5)$$

$$y=\frac{dy}{d\xi}=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=1 .$$

Из (2) следует, что:

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}1, & \xi_1<\xi<\xi_2,\ 1-\xi_2<\xi<1-\xi_1;\\ 0, & 0<\xi<\xi_1,\ \xi_2<\xi<1-\xi_2,\ 1-\xi_1<\xi<1.\end{cases} \qquad (6)$$

$$\xi_1=\frac{1}{\ell}\ell_1,\quad \xi_2=\frac{1}{\ell}\ell_2,\quad 0\le\xi_1<\xi_2\le\frac{1}{2} .$$

Безразмерные коэффициенты $\varkappa$ и β связаны с размерными величинами равенствами:

$$\varkappa=\frac{\varepsilon_0\ell^2U^2}{2\left[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)\right]^3P},\quad \beta^2=\frac{\mathcal{D}}{\ell^2P}=\frac{h^3E}{12(1-\nu^2)\ell^2P}, \qquad (7)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

В силу (6) решение краевой задачи (5) симметрично относительно $\xi=\frac{1}{2}$ и

$$\max_{\xi\in(0,1)} y(\xi)=y\left(\tfrac{1}{2}\right)=y_* .$$

Главная особенность рассматриваемой краевой задачи состоит в том, что интенсивность "нагрузки", которая пропорциональна $(1-y)^{-2}$, неограниченно возрастает при $y\to 1$. Отсюда следует, что решение (5) может существовать лишь для ограниченных значений $\varkappa$: $0<\varkappa\le\varkappa_*$, причём величина $\varkappa_*$ заранее неизвестна и определяется в ходе решения задачи. В дальнейшем будет изложен метод получения достаточно точных верхних и нижних оценок $\varkappa_*$.

Знание $\varkappa_*$ позволяет вычислить нижнюю границу так называемых "напряжений срабатывания" реле [1]. Действительно, при $U>U_*$

$$U_*^2=\varkappa_*\frac{2}{\varepsilon_0\ell^2}\left[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)\right]^3P,$$

решения (1) не существует. Физически это означает, что середина прогнувшейся пластинки обязательно достигает значения $Y(\frac{1}{2}\ell)=H$, где помещается контакт.

§ 1. Решение задачи статики без учета жёсткости пластинки

Отыскание формы прогиба пластинки существенно облегчается, если пренебречь жёсткостью. В этом случае порядок дифференциального уравнения (5) понижается до второго, и решение можно записать в конечном виде. Помимо самостоятельного значения, анализ решения краевой задачи при $\beta=0$ интересен ещё тем, что позволяет выявить некоторые качественные особенности, справедливые и для задачи о прогибе пластинки с учётом жёсткости.

I. Полагая в (5) $\beta=0$, получаем

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varphi(\xi)\frac{\varkappa}{(1-y)^2}=0, \qquad (I.I)$$

$$y=0 \quad \text{при} \quad \xi=0 \quad \text{и} \quad \xi=1,$$

где $\varphi(\xi)$ определена в (6). Из условия симметрии следует, что достаточно рассмотреть решение (I.I) на $\xi\in(0,\frac{1}{2})$.

Если $\xi\in(0,\xi_1)$ и $\xi\in(\xi_2,\frac{1}{2})$, где $\varphi(\xi)\equiv 0$, то решение (I.I) есть линейная функция. С учётом граничного условия при $\xi=0$ и условия симметрии имеем:

$$y=\frac{y_1}{\xi_1}\xi,\quad 0<\xi<\xi_1;\qquad y\equiv y_2,\quad \xi_2<\xi<\frac{1}{2}. \qquad (I.2)$$

Здесь $y_1=y(\xi_1)$, $y_2=y(\xi_2)$ – постоянные, подлежащие определению из требования непрерывности y и $dy/d\xi$ при $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$. Очевидно,

$$y_2=y_*=\max_{\xi\in(0,1)} y(\xi).$$

Решение (I.I) на (ξ_1,ξ_2), "склеенное" с решением на $(\xi_2,\frac{1}{2})$, удовлетворяет задаче Коши:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{\varkappa}{(1-y)^2}=0, \qquad (I.3)$$

$$y=y_2,\quad \frac{dy}{d\xi}=0 \quad \text{при} \quad \xi=\xi_2.$$

Результат интегрирования (I.3) можно представить в виде:

$$\frac{dy}{d\xi}=\sqrt{\frac{2\varkappa(y_2-y)}{(1-y_2)(1-y)}},$$

(I.4)

$$[\xi_2-\xi(y)]\sqrt{2\varkappa}=\sqrt{1-y_2}\left[\sqrt{(1-y)(y_2-y)}+(1-y_2)\ln\frac{\sqrt{1-y}+\sqrt{y_2-y}}{\sqrt{1-y_2}}\right].$$

Приравняв в точке $\xi=\xi_1$ значения y и $dy/d\xi$ слева и справа, получим при заданных $\varkappa$, ξ_1 и ξ_2 систему двух трансцендентных уравнений относительно y_1 и y_2:

$$(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa}=\Phi(y_1,y_2)=\sqrt{1-y_2}\left[\sqrt{(1-y_1)(y_2-y_1)}+(1-y_2)\ln\frac{\sqrt{1-y_1}+\sqrt{y_2-y_1}}{\sqrt{1-y_2}}\right], \qquad (I.5)$$

$$\xi_1\sqrt{2\varkappa}=\Psi(y_1,y_2)=y_1\sqrt{\frac{(1-y_1)(1-y_2)}{y_2-y_1}}.$$

Тем самым задача (I.I) свелась к решению системы (I.5), после чего форма прогиба определяется равенствами (I.2) и (I.4).

В частности, при $\xi_1=0$ $y_1=0$, а $y_2=y_*$ ищется из решения уравнения

$$\xi_2\sqrt{2\varkappa}=\sqrt{1-y_*}\left[\sqrt{y_*}+(1+y_*)\ln\frac{1+\sqrt{y_*}}{\sqrt{1-y_*}}\right]. \qquad (I.6)$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\xi_2\sqrt{2\varkappa}$ сначала монотонно растёт от 0 до 0.8366, а затем монотонно убывает от 0.8366 до 0 с увеличением y_* от 0 до I, причем максимальное значение достигается при $y_*=0.3883$. Отсюда следует, что при $\varkappa<\varkappa_*$, где в данном случае $\xi_2\sqrt{2\varkappa_*}=0.8366$, мы имеем два решения, а при $\varkappa>\varkappa_*$ решения не существует. На рис. 2 приведена зависимость $\varkappa$ от y_* при $\xi_1=0$, $\xi_2=\frac{1}{2}$, качественное поведение которой характерно для других значений ξ_1 и ξ_2 и, как мы увидим ниже, для рассматриваемой задачи вообще.

2. Приведём физическую интерпретацию существования двух решений задачи (I.I) при $0<\varkappa<\varkappa_*$ [I]. Пусть по заданным ξ_1 и ξ_2 из решения (I.5) построена зависимость $\varkappa(y_*)$, качественно аналогичная (I.6). Обозначим через y_{*1}, y_{*2} и $\bar{y}_*$ соответственно координаты пересечения $\varkappa(y_*)$ с прямой $\varkappa=\bar{\varkappa}$, $\bar{\varkappa}<\varkappa_*$, и положение максимума $\varkappa_*$, $0<y_{*1}<\bar{y}_*<y_{*2}<1$ (рис.2). Пусть далее расстояние H между пластинкой и поверхностью диэлектрика при $U=0$ определяется из соотношения:

$$H=[H+\tfrac{1}{8}(\alpha-H)]\,y_{*2}\,. \qquad (I.7)$$

Рассмотрим обратную зависимость y_* от $\varkappa$, реализуемую в действительности. Вначале с изменением $\varkappa$ от 0 до $\varkappa_*$ y_* растет, достигая максимального значения $\bar{y}_*$, определяемого решением (I.I). Иначе говоря, ветвь монотонного роста y_* соответствует увеличению максимального прогиба пластинки с увеличением интенсивности нагрузки. В дальнейшем при $\varkappa>\varkappa_*$ решения (I.I) не существует, то есть прогнувшаяся пластинка некоторой своей частью "прилипает" к поверхности диэлектрика.

Форма прогиба пластинки в этом случае может быть найдена следующим образом. Используя безразмерные переменные (4), обозначим через ξ_* левую границу области "залипания". Тогда имеем:

$$y=y_{*2} \text{ при } \xi_*<\xi<\tfrac{1}{2}\,,\ \xi_1<\xi_*<\xi_2\,.$$

Для остальных ξ, $0<\xi<\xi_*$, форма прогиба определяется из решения краевой задачи:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{\varkappa}{(1-y)^2}=0\,, \qquad (I.8)$$

$$y=0 \text{ при } \xi=0\,;\quad y=y_{*2}\,,\ \frac{dy}{d\xi}=0 \text{ при } \xi=\xi_*\,,$$

где условие равенства нулю производной при $\xi=\xi_*$ есть естественное граничное условие. Задача (I.8) не является переопределенной, поскольку значение ξ_* заранее не известно. Легко видеть, что решение этой задачи дают равенства (I.2), (I.4) и (I.5), в которых следует заменить ξ_2 на ξ_*, а y_2 на y_{*2}. В частности, система (I.5) при указанной замене определяет неизвестные y_1 и ξ_*.

Если теперь снова уменьшать $\varkappa$ до значения $\bar{\varkappa}$, то пластинка останется "прилипшей", но область "залипания" будет сокращаться, а именно: $\xi_*\to\xi_2$ при $\varkappa\to\bar{\varkappa}$. Наконец, при $\varkappa=\bar{\varkappa}$ решение задачи (I.8) совпадает со вторым решением задачи (I.I), для которого $\max y(\xi)=y_{*2}$. Так как для $\varkappa<\bar{\varkappa}$ решения задачи (I.8) не существует, то второе решение задачи (I.I) является неустойчивым: при $\varkappa=\bar{\varkappa}$ пластинка скачком занимает положение, в котором максимальный прогиб определяется величиной y_{*1}. На рис.2 стрелками показана реализуемая зависимость y_* от $\varkappa$ при возрастании $\varkappa$ от 0 до $\varkappa_*$, а затем при убывании $\varkappa$ от $\varkappa_*$ до 0.

3. Как уже отмечалось, особый интерес представляет вычисление $\varkappa_*$. Для этого обратимся к системе (I.5). При заданных ξ_1 и ξ_2 величина $\varkappa_*$ находится из условия равенства нулю якобиана системы

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\omega}=0\,,$$

где обозначено:

$$\omega=y_1\,,\ z=y_2=y_*\,,\ \bar{z}=\bar{y}_*\,.$$

Подставив сюда значения частных производных, получим:

$$3(1-\bar{z})\left[(2-3\omega)\bar{z}-\omega(1-2\omega)\right]\ln\frac{\sqrt{1-\omega}+\sqrt{\bar{z}-\omega}}{\sqrt{1-\bar{z}}}+$$

$$+\left[3(2-3\omega)\bar{z}-4+7\omega\right]\sqrt{(1-\omega)(\bar{z}-\omega)}=0\,. \qquad (I.9)$$

Если известна функция $\bar{z}(\omega)$, определяемая (I.9), то мы можем вычислить Φ, а также $\Psi/\Phi=\xi_1/(\xi_2-\xi_1)$ при $z=\bar{z}(\omega)$. Исключив ω, найдём искомые зависимости $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa}$ и $\bar{y}_*$ как функции $\xi_1/(\xi_2-\xi_1)$.

При численном построении $\bar{z}(\omega)$ решение (I.9) удобно свести к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, получаемого после дифференцирования (I.9) по ω [3]. Так как левая часть (I.9) при $\omega=0$ совпадает с выражением производной правой части (I.6) по y_* с точностью до множителя, отличного от нуля, то $\bar{z}=\bar{y}_*=0.3883$ при $\omega=0$. Таким образом, $\bar{z}(\omega)$ может быть найдено из решения следующего уравнения:

$$\frac{d\bar{z}}{d\omega}=\frac{\Gamma_1(\omega,\bar{z})}{\Gamma_2(\omega,\bar{z})}\,,\quad \bar{z}=0{,}3883 \text{ при } \omega=0\,, \qquad (I.10)$$

где

$$\Gamma_1(\omega,\bar{z})=3(1-\bar{z})(1+3\bar{z}-4\omega)\sqrt{\bar{z}-\omega}\,\ln\frac{\sqrt{1-\omega}+\sqrt{\bar{z}-\omega}}{\sqrt{1-\bar{z}}}+$$

$$+\sqrt{1-\omega}\,(9\bar{z}^2-3\bar{z}+11\omega-2-15\omega\bar{z})\,,$$

$$\Gamma_2(\omega,\bar{z})=6(1-\omega-\omega^2-2\bar{z}+3\omega\bar{z})\sqrt{\bar{z}-\omega}\,\ln\frac{\sqrt{1-\omega}+\sqrt{\bar{z}-\omega}}{\sqrt{1-\bar{z}}}+$$

$$+2\sqrt{1-\omega}\,(6\bar{z}-2\omega-1-9\omega\bar{z}+6\omega^2).$$

Остановимся на построении асимптотической зависимости $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa_*}$ для больших $\xi_1/(\xi_2-\xi_1)$. Легко видеть, что $\bar{z}\to\omega$ при $\xi_2\to\xi_1$, $\bar{z}\geqslant\omega$. Покажем, что $\bar{z}\to\frac{1}{3}$ при $\xi_2\to\xi_1$, то есть случай равенства $\bar{z}$ и ω достигается в точке $\bar{z}=\omega=\frac{1}{3}$ и, следовательно, асимптотика $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa_*}$ определяется решением (I.I0) в окрестности указанной точки.

С этой целью запишем краевую задачу (I.I) в интегральной форме [4].

$$y(\xi)=\varkappa\int_0^1 G(\xi,\theta)\,\frac{\varphi(\theta)\,d\theta}{[1-y(\theta)]^2}\,, \qquad \text{(I.II)}$$

где $G(\xi,\theta)$ – функция Грина (I.I):

$$G(\xi,\theta)=\begin{cases}(1-\theta)\xi, & 0<\xi<\theta,\\ \theta(1-\xi), & \theta<\xi<1.\end{cases}$$

Так как решение должно быть симметричным относительно $\xi=\frac{1}{2}$, то (I.II) можно преобразовать к виду:

$$y(\xi)=\varkappa\int_{\xi_1}^{\xi_2}K(\xi,\theta)\,\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}\,,\quad K(\xi,\theta)=\begin{cases}\xi, & \xi<\theta,\\ \theta, & \xi>\theta.\end{cases}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\xi_2\to\xi_1$, получаем, что в случае приложения двух равных сосредоточенных сил в точках $\xi=\xi_2$ и $\xi=1-\xi_2$, $0<\xi_2\leqslant\frac{1}{2}$, y_* удовлетворяет уравнению:

$$y_*=\chi\,\frac{\xi_2}{(1-y_*)^2}\,,\quad \chi=\varkappa(\xi_2-\xi_1).$$

Отсюда следует, что максимально возможное значение χ достигается при $y_*=\frac{1}{3}$ и равно $4/(27\xi_2)$, $0<y_*<1$.

Непосредственная подстановка показывает, что $\Gamma_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\Gamma_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=0$, то есть $\bar{z}=\omega=\frac{1}{3}$ является особой точкой (I.I0) [5]. После линеаризации Γ_1 и Γ_2 в окрестности особой точки приходим к уравнению

$$\frac{d\bar{z}}{d\omega}=-\frac{\frac{1}{3}-\omega}{2\bar{z}-\omega-\frac{1}{3}}\,,$$

общее решение которого имеет вид:

$$\frac{(\bar{z}-\omega)(2\bar{z}+\omega-1)}{(1-3\omega)^2}=const.$$

Таким образом, рассматриваемая особая точка – "седло", а решение (I.I0) входит в особую точку как

$$\bar{z}=\frac{1}{2}(1-\omega). \qquad \text{(I.I2)}$$

Графики функций $\bar{z}$ от ω, а также y_* и $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa_*}$ от $\xi_1/(\xi_2-\xi_1)$ приведены на рис.3 и рис.4. На рис.5 дана зависимость $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa_*}$ при $(\xi_2-\xi_1)/\xi_1>1$. Отметим, что численно найденные значения $(\xi_2-\xi_1)\sqrt{2\varkappa_*}$ совпадают с асимптотическими уже при $(\xi_2-\xi_1)/\xi_1\leqslant 0,5$.

Найденное значение $\varkappa_*$ является, очевидно, нижней оценкой $\varkappa_*$ задачи (5) при $\beta>0$.

§ 2. Задача о прогибе пластинки с учетом жёсткости

Краевая задача (5) при помощи функции Грина приводится к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна, решение которого мы и будем искать [6].

Для удобства сделаем переход от интервала (0,I) для ξ к интервалу (-I,I), заменив аргумент ξ по формуле:

$$x=2\xi-1.$$

При этом (5) приводится к виду:

$$\alpha^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)\frac{\sigma}{(1-y)^2}\,, \qquad \text{(2.I)}$$

$$y=\frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=1 \text{ и } x=-1.$$

Здесь $\alpha=2\beta$, $\sigma=\frac{1}{4}\varkappa$.

Интервалы (ξ_1,ξ_2), $(1-\xi_2,1-\xi_1)$, где $\varphi\equiv 1$, переходят соответственно в $(-b,-a)$ и (a,b), где

$$a=1-2\xi_2,\quad b=1-2\xi_1.$$

Обозначив через $G(x,\theta;\alpha)$ функцию Грина рассматриваемой краевой задачи, запишем интегральное представление (2.I) следующим образом:

$$y(x)=\sigma\left\{\int_{-b}^{-a} G(x,\theta;\alpha)\frac{d\theta}{[1-y\theta]^2}+\int_{a}^{b} G(x,\theta;\alpha)\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}\right\} \qquad (2.2)$$

$$(-1<x<1).$$

I. Обратимся к фактическому построению функции Грина. Пусть $x=\theta$ – место приложения "сосредоточенной единичной силы" и

$$G(x,\theta;\alpha)=\begin{cases} G_-(x,\theta;\alpha), & -1<x<\theta,\\ G_+(x,\theta;\alpha), & \theta<x<1.\end{cases}$$

Тогда, по определению, функция Грина удовлетворяет однородному уравнению

$$\alpha^2\frac{d^4G}{dx^4}=\frac{d^2G}{dx^2} \qquad (2.3)$$

с граничными условиями:

$$G_-=\frac{dG_-}{dx}=0 \ \text{ при } \ x=-1; \quad G_+=\frac{dG_+}{dx}=0 \ \text{ при } \ x=1; \qquad (2.4)$$

и условиям сопряжения G_- и G_+ при $x=\theta$ [4]:

$$G_-=G_+,\ \frac{dG_-}{dx}=\frac{dG_+}{dx},\ \frac{d^2G_-}{dx^2}=\frac{d^2G_+}{dx^2},\quad \frac{d^3G_-}{dx^3}=\frac{d^3G_+}{dx^3}-\frac{1}{\alpha^2}. \qquad (2.5)$$

После интегрирования (2.3) с учётом (2.4) и (2.5) выражения G_- и G_+ получим в виде:

$$G_-(x,\theta;\alpha)=\alpha\left(\alpha\,\mathrm{sh}\frac{x}{\alpha}-x\,\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}+\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}\right)A^-(\theta;\alpha)+$$

$$+\alpha\left(\alpha\,\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}+x\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}+\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}\right)B^-(\theta;\alpha).$$

$$G_+(x,\theta;\alpha)=\alpha\left(\alpha\,\mathrm{sh}\frac{x}{\alpha}-x\,\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}+\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}\right)A^+(\theta;\alpha)+$$

$$+\alpha\left(\alpha\,\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}-x\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}+\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}\right)B^+(\theta;\alpha).$$

Здесь

$$A^-(\theta;\alpha)=\frac{\theta-\mathrm{ch}\frac{1-\theta}{\alpha}+\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1-\theta}{\alpha}}{2\alpha\left(\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}\right)},\quad B^-(\theta;\alpha)=\frac{1-\mathrm{ch}\frac{1-\theta}{\alpha}}{2\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}},$$

$$A^+(\theta;\alpha)=\frac{\theta+\mathrm{ch}\frac{1+\theta}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1+\theta}{\alpha}}{2\alpha\left(\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}\right)},\quad B^+(\theta;\alpha)=\frac{1-\mathrm{ch}\frac{1+\theta}{\alpha}}{2\alpha\,\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}}$$

Так как рассматриваемая задача симметрична относительно $x=0$, то интегральное уравнение (2.2) можно упростить и записать в виде:

$$y(x)=\sigma\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}, \qquad (2.7)$$

где

$$K(x,\theta;\alpha)\begin{cases}1-x-\dfrac{\alpha}{\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}}\left[\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}+\left(\mathrm{ch}\frac{1-x}{\alpha}-1\right)\mathrm{ch}\frac{\theta}{\alpha}\right], & \theta<x,\\[2ex] 1-\theta-\dfrac{\alpha}{\mathrm{sh}\frac{1}{\alpha}}\left[\mathrm{ch}\frac{1}{\alpha}-\mathrm{ch}\frac{\theta}{\alpha}+\left(\mathrm{ch}\frac{1-\theta}{\alpha}-1\right)\mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}\right], & \theta>x.\end{cases}$$

Остановимся на предельных выражениях $K(x,\theta;\alpha)$ при $\alpha\to 0$ и $\alpha\to\infty$. В первом случае

$$K(x,\theta;0)=\begin{cases}1-x, & \theta<x,\\ 1-\theta, & \theta>x,\end{cases} \qquad (2.8)$$

а (2.7) описывает прогиб пластинки без учёта жёсткости. Во втором случае

$$K(x,\theta;\alpha)\to\frac{1}{\alpha^2}\bar{K}(x,\theta) \quad \text{при} \quad \alpha\to\infty,$$

где

$$\bar{K}(x,\theta)\begin{cases}\frac{1}{12}(1-x)^2(1+2x-3\theta^2), & \theta<x,\\ \frac{1}{12}(1-\theta)^2(1+2\theta-3x^2), & \theta>x.\end{cases} \qquad (2.9)$$

Заметим, что отношение σ/α^2 не содержит P

$$\frac{\sigma}{\alpha^2}=\frac{\varepsilon_0\,l^4U^2}{32\left[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)\right]^3 D}=q, \qquad (2.10)$$

и, следовательно, уравнение

$$y(x)=q\int_a^b \bar{K}(x,\theta)\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} \qquad (2.11)$$

описывает прогиб пластинки без учёта натяжения.

2. Будем применять метод последовательных приближений [6] для решения (2.7):

$$y^{(0)}(x)=\sigma\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,d\theta\ ,$$

$$y^{(1)}(x)=\sigma\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,\frac{d\theta}{[1-y^{(0)}(\theta)]^2}$$

и т.д.

$$y^{(k)}(x)=\sigma\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,\frac{d\theta}{[1-y^{(k-1)}(\theta)]^2}\ ,\quad k=1,2,\ldots \tag{2.12}$$

Нетрудно видеть, что

$$0<y^{(0)}<y^{(1)}<\ldots<y^{(k)}<\ldots\ ,\quad a\leqslant x\leqslant b\ .$$

В результате задача сводится к отысканию тех значений σ, при которых последовательность функций (2.12) равномерно сходится. Обычным путём можно показать, что в этом случае предел последовательности является решением (2.7).

Рассмотрим вначале вывод простейших оценок σ. Для этого составим функциональную последовательность по следующему правилу:

$$z^{(0)}(x)=\sigma'\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,d\theta=y^{(0)}(x)\ ,$$

$$z^{(1)}(x)=\frac{\sigma'}{[1-z^{(0)}(a)]^2}\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,d\theta\ ,$$

и т.д.

$$z^{(k)}(x)=\frac{\sigma'}{[1-z^{(k-1)}(a)]^2}\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,d\theta\ , \tag{2.13}$$

причём

$$0<z^{(0)}<z^{(1)}<\ldots<z^{(k)}<\ldots\ ,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

Пусть существует предел последовательности (2.13), который обозначим через $z(x)$:

$$z(x)=\frac{\sigma'}{[1-z(a)]^2}\int_a^b K(x,\theta;\alpha)\,d\theta,\quad y_*=z(0) \tag{2.14}$$

Если выполнено условие $y_*-z^{(k)}(0)<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – произвольно малое число, то $z(x)-z^{(k)}(x)<\varepsilon$, в силу определения K, то есть имеет место равномерная сходимость $z^{(k)}(x)$ к $z(x)$. Из (2.14) следует, что предел числовой последовательности $z^{(k)}(0)$ есть решение уравнения

$$\sigma'=\frac{y_*[1-z(a)]^2}{\int_a^b K(0,\theta;\alpha)\,d\theta}\ ,\qquad z(a)=y_*\,\frac{\int_a^b K(a,\theta;\alpha)\,d\theta}{\int_a^b K(0,\theta;\alpha)\,d\theta}\ , \tag{2.15}$$

где σ' – заданное число, а непосредственное интегрирование даёт следующие выражения:

$$\int_a^b K(0,\theta;\alpha)\,d\theta=(b-a)\Big(1-\frac{b+a}{2}\Big)-\alpha(b-a)\,th\frac{1}{2\alpha}-\frac{2\alpha^2}{ch\frac{1}{2\alpha}}\,sh\frac{b-a}{2\alpha}\,sh\frac{1-b-a}{2\alpha},$$

$$\int_a^b K(a,\theta;\alpha)\,d\theta=(b-a)\Big(1-\frac{b+a}{2}\Big)-\frac{\alpha(b-a)}{sh\frac{1}{\alpha}}\Big(ch\frac{1}{\alpha}-ch\frac{a}{\alpha}\Big)-\frac{2\alpha^2}{sh\frac{1}{\alpha}}\ \times$$

$$\times\ sh\frac{b-a}{2\alpha}\Big(ch\frac{a}{\alpha}\,ch\frac{2-a-b}{2\alpha}-ch\frac{b+a}{2\alpha}\Big).$$

С другой стороны, (2.15) определяет функцию $\sigma'(y_*)$, $0<y_*<1$, максимальное значение которой σ'_* равно

$$\sigma'_*=\frac{4}{27}\Big[\int_a^b K(a,\theta;\alpha)\,d\theta\Big]^{-1}, \tag{2.16}$$

и, следовательно, при $\sigma'>\sigma'_*$ решения (2.15) не существует. Таким образом, условие $\sigma'<\sigma'_*$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости (2.13).

Поскольку $y^{(k)}(x)$ можно рассматривать как решение задачи о прогибе пластинки под действием "нагрузки" с интенсивностью $\sigma[1-y^{(k-1)}(x)]^{-2}$, то, увеличивая в каждом приближении интенсивность "нагрузки" до $\sigma[1-z^{(k-1)}(a)]^{-2}$, мы тем самым ухудшаем сходимость (2.12). Отсюда следует вывод, что последовательность (2.12) равномерно сходится, если выполнено условие равномерной сходимости (2.13), то есть при $\sigma<\sigma_*'$, а найденное из (2.15) значение $\sigma'(y_*)$ является нижней оценкой σ задачи (2.7) при том же y_*.

Заметим, что зависимость $\sigma'(y_*)$ качественно совпадает с $\varkappa(y_*)$, приведенной на рис.2.

Для нахождения верхней оценки σ задачи (2.7) рассмотрим функциональную последовательность вида

$$\rho^{(0)}(x)=\sigma''\int_a^b K(x,\theta;\alpha)d\theta=y^{(0)}(x),$$

$$\rho^{(1)}(x)=\frac{\sigma''}{[1-\rho^{(0)}(b)]^2}\int_a^b K(x,\theta;\alpha)d\theta,$$

и т.д.

$$\rho^{(k)}(x)=\frac{\sigma''}{[1-\rho^{(k-1)}(b)]^2}\int_a^b K(x,\theta;\alpha)d\theta, \qquad (2.17)$$

причем по-прежнему

$$0<\rho^{(0)}<\rho^{(1)}<\dots<\rho^{(k)}<\dots,\quad a\le x\le b.$$

Пусть существует предел последовательности (2.17) $\rho(x)$. Вполне аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что равенство

$$\sigma''=\frac{y_*[1-\rho(b)]^2}{\int_a^b K(0,\theta;\alpha)d\theta},\quad \rho(b)=y_*\frac{\int_a^b K(b,\theta;\alpha)d\theta}{\int_a^b K(0,\theta;\alpha)d\theta}, \qquad (2.18)$$

где

$$\int_a^b K(b,\theta;\alpha)d\theta=(1-b)(b-a)-\frac{\alpha(b-a)}{\operatorname{sh}\frac{1}{\alpha}}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{\alpha}-\operatorname{ch}\frac{b}{\alpha}\right)-\frac{2\alpha^2}{\operatorname{sh}\frac{1}{\alpha}}\times$$

$$\times\left(\operatorname{ch}\frac{1-b}{\alpha}-1\right)\operatorname{sh}\frac{b-a}{2\alpha}\operatorname{ch}\frac{b+a}{2\alpha},$$

определяет верхнюю оценку σ задачи (2.7) при том же y_*. Решения (2.18) и, следовательно, решения (2.7) не существует, если

$$\sigma''>\sigma_*''=\frac{4}{27}\left[\int_a^b K(b,\theta;\alpha)d\theta\right]^{-1}, \qquad (2.19)$$

поскольку из расходимости последовательности (2.17) вытекает расходимость последовательности (2.12).

Таким образом, мы нашли, что последовательность (2.12) равномерно сходится и решение (2.7) существует, если $0<\sigma<\sigma_*$, где σ_* оценивается значениями σ_*' и σ_*'': $\sigma_*'<\sigma_*<\sigma_*''$. При этом кривая $\sigma(y_*)$ задачи (2.7) заключена между кривыми $\sigma'(y_*)$ и $\sigma''(y_*)$: $\sigma'(y_*)<\sigma(y_*)<\sigma''(y_*)$, $0<y_*<1$.

Оценки σ' и σ'', найденные из рассмотрения сходимости последовательностей $z^{(k)}(x)$ и $\rho^{(k)}(x)$, могут быть получены непосредственно из (2.7). Действительно, из физической интерпретации задачи следует, что решение (2.7) – монотонно изменяющаяся на [0,1] функция, причем $y(a)>y(x)>y(b)$, $a<x<b$. Имея в виду правую часть (2.7), будем аппроксимировать $y(x)$ одной "ступенькой": $y=y(a)$ при $a\le x\le b$, например. Интенсивность "нагрузки" окажется при этом завышенной. Вынося постоянную $[1-y(a)]^{-2}$ за знак интеграла, получаем выражение, совпадающее с $z(x)$, откуда и следует (2.15).

Отметим два следствия.

а) Так как при $b\to a$ $\sigma_*''\to\sigma_*'$, то асимптотическое поведение σ_* задачи (2.7) описывается формулой:

$$\sigma_*=\frac{4}{27(b-a)}\left[1-a-\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\frac{1}{\alpha}}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{\alpha}-2\operatorname{ch}\frac{a}{\alpha}+\operatorname{ch}\frac{a}{\alpha}\operatorname{ch}\frac{1-a}{\alpha}\right)\right]^{-1},\quad b\to a$$

б) Пусть $a=0$ и $b=1$. Тогда, как следует из (2.16),

$$\sigma_*>\sigma_*'=\frac{8}{27}\left(1-2\alpha\operatorname{th}\frac{1}{2\alpha}\right)^{-1}$$

Сопоставляя σ_*' при различных α со значением $\sigma_*=0.350$ при $\alpha=0$ (см. § 1,1), получаем, что влияние жёсткости пластинки на величину "напряжения срабатывания" становится существенным уже при $1/\ell\sqrt{D/P}\sim10^{-1}$.

3. Изложенный метод получения простейших оценок σ при

одноступенчатой аппроксимации $y(x)$ естественным образом обобщается на случай аппроксимации $y(x)$ многоступенчатой функцией, что позволяет вычислить более точные оценки σ.

Разобьем $[a, b]$ на N частей с точками разбиения x_s:

$$x_s = x_0 + s\delta,\ \delta = \frac{b-a}{N},\ s = 0, 1, 2, \ldots, N;\ x_0 = a,\ x_N = b, \quad (2.20)$$

и будем задавать аппроксимирующую функцию в виде:

$$\text{а) } y = y(x_s) \equiv y_s,\ x_s \leq x < x_{s+1},$$
$$\text{б) } y = y(x_{s+1}) \equiv y_{s+1},\ x_s < x \leq x_{s+1}. \quad (2.21)$$

Опираясь на свойство монотонности $y(x)$, можно утверждать, что в случае а) мы имеем завышенную интенсивность "нагрузки", а в случае б) интенсивность "нагрузки" занижена. Кроме того, с ростом числа разбиений завышенная интенсивность "нагрузки" уменьшается, а заниженная интенсивность "нагрузки" увеличивается, но характер аппроксимации при этом не меняется.

На рис. 6 в качестве примере приведены случаи а) и б) при $N=4$.

Запишем интегральное уравнение (2.7) в более развернутом виде. После подстановки в правую часть соответствующего выражения функции Грина получим

$0 < x \leq a$,

$$\frac{1}{\sigma} y(x) = \int_a^b \left\{1-\theta - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{\theta}{\alpha} + \left(ch\frac{1-\theta}{\alpha} - 1\right) ch\frac{x}{\alpha}\right]\right\}\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2};$$

$a \leq x \leq b$,

$$\frac{1}{\sigma} y(x) = \int_a^x \left\{1-x - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{x}{\alpha} + \left(ch\frac{1-x}{\alpha} - 1\right) ch\frac{\theta}{\alpha}\right]\right\}\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} +$$
$$+ \int_x^b \left\{1-\theta - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{\theta}{\alpha} + \left(ch\frac{1-\theta}{\alpha} - 1\right) ch\frac{x}{\alpha}\right]\right\}\frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}; \quad (2.22)$$

$b \leq x < 1$,

$$\frac{1}{\sigma} y(x) = \int_a^b \left\{1-x - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{x}{\alpha} + \left(ch\frac{1-x}{\alpha} - 1\right) \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, ch\frac{\theta}{\alpha}\right]\right\} \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}.$$

Для определенности выберем случай а) (2.21) и рассмотрим элементарный отрезок по θ, на котором аппроксимируемая функция равна y_s, то есть

$$\frac{1}{[1-y(\theta)]^2} = \frac{1}{(1-y_s)^2} \equiv f_s, \quad x_s \leq \theta < x_{s+1}.$$

Вычислим коэффициенты при f_s, отнесенные к δ. Имеем:

$$A_s(x) = \frac{1}{\delta}\int_{x_s}^{x_{s+1}} \left\{1-x - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{x}{\alpha} + \left(ch\frac{1-x}{\alpha} - 1\right) ch\frac{\theta}{\alpha}\right]\right\} d\theta =$$
$$= 1-x - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left(ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{2\alpha^2}{\delta\, sh\frac{1}{\alpha}}\, sh\frac{\delta}{2\alpha}\left(ch\frac{1-x}{\alpha} - 1\right) ch\frac{2x_s+\delta}{2\alpha}.$$

$$B_s(x) = \frac{1}{\delta}\int_{x_s}^{x_{s+1}} \left\{1-\theta - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left[ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{\theta}{\alpha} + \left(ch\frac{1-\theta}{\alpha} - 1\right) ch\frac{x}{\alpha}\right]\right\} d\theta = \quad (2.23)$$
$$= 1 - x_s - \frac{\delta}{2} - \frac{\alpha}{sh\frac{1}{\alpha}}\left(ch\frac{1}{\alpha} - ch\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{2\alpha^2}{\delta\, sh\frac{1}{\alpha}}\, sh\frac{\delta}{2\alpha} \times$$
$$\times \left(ch\frac{x}{\alpha}\, ch\frac{2-2x_s-\delta}{2\alpha} - ch\frac{2x_s+\delta}{2\alpha}\right).$$

С использованием (2.23) результат аппроксимации $y(\theta)$ в равенствах (2.22) N-ступенчатой функцией можно представить в виде:

$$0 < x \leq a, \quad y(x) = \sigma\delta\sum_{s=0}^{N-1} B_s(x) f_s,$$
$$a \leq x_i < b, \quad y(x_i) = \sigma\delta\left\{\sum_{s=0}^{i-1} A_s(x_i) f_s + \sum_{s=i}^{N-1} B_s(x_i) f_s\right\}, \quad (2.24)$$
$$b \leq x < 1, \quad y(x) = \sigma\delta\sum_{s=0}^{N-1} A_s(x) f_s,$$

где x_i – одна из точек разбиения $[a, b]$, причем при $i=0$

$$y(x_0) = \sigma\delta \sum_{s=0}^{N-1} B_s(x_0) f_s$$

Второе равенство (2.24) после подстановки в него x_i, $i=0,1,2,\ldots,N-1$, образует систему N трансцендентных уравнений относительно $y_i = y(x_i)$. Естественно ожидать, что решение этой системы может быть найдено лишь при тех значениях σ, при которых существует решение (2.7): $0<\sigma<\sigma_*$. Однако величина σ_* заранее неизвестна. С другой стороны, опираясь на физическую интерпретацию задачи, можно утверждать, что зависимость $\sigma(y_*)$ задачи (2.7) качественно аналогична $x(y_*)$ (рис.2), то есть $\sigma=\sigma(y_*)$, $0<y_*<1$, - однозначная функция. Поэтому каждому значению y_* соответствует своё значение σ. Отсюда следует, что решение обратной задачи (2.7), в которой задано не σ, а y_*, $0<y_*<1$, всегда существует и единственно.

Исключим σ, поделив обе части равенств системы на

$$y_* = y(0) = \sigma\delta \sum_{s=0}^{N-1} B_s(0) f_s$$

Получим следующую систему уравнений, представляющую обратную задачу (2.7)

$$y_0 = y_* \frac{\sum_{s=0}^{N-1} B_s(x_0) f_s}{\sum_{s=0}^{N-1} B_s(0) f_s},$$

$$y_i = y_* \frac{\sum_{s=0}^{i-1} A_s(x_i) f_s + \sum_{s=i}^{N-1} B_s(x_i) f_s}{\sum_{s=0}^{N-1} B_s(0) f_s},\quad i=1,2,\ldots,N-1, \tag{2.25}$$

где y_* - заданный параметр. Если (2.25) решена, то значение σ, соответствующее заданному y_*, вычисляется по формуле

$$\sigma = y_* \left[\delta \sum_{s=0}^{N-1} B_s(0) f_s\right]^{-1}, \tag{2.26}$$

а правые части первого и третьего равенств (2.24) становятся определенными. Подчеркнем, что (2.26) дает нижнюю оценку $\sigma(y_*)$ задачи (2.7) при том же y_*!

Выражения, аналогичные (2.25) и (2.26), имеют место и в случае б) (2.21). При этом система уравнений относительно y_1, y_2, . . ., y_N записывается следующим образом:

$$y_i = y_* \frac{\sum_{s=1}^{i} A_{s-1}(x_i) f_s + \sum_{s=i+1}^{N} B_{s-1}(x_i) f_s}{\sum_{s=1}^{N} B_{s-1}(0) f_s},\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

$$y_N = y_* \frac{\sum_{s=1}^{N} B_{s-1}(x_N) f_s}{\sum_{s=1}^{N} B_{s-1}(0) f_s} \tag{2.27}$$

После решения (2.27) можем найти верхнюю оценку $\sigma(y_*)$

$$\sigma = y_* \left[\delta \sum_{s=1}^{N} B_{s-1}(0) f_s\right]^{-1}, \tag{2.28}$$

а также значения y для x, не принадлежащих $[\alpha, \beta]$,

$$0 < x \le \alpha,\quad y(x) = \sigma\delta \sum_{s=1}^{N} B_{s-1}(x) f_s,$$

$$\beta < x < 1,\quad y(x) = \sigma\delta \sum_{s=1}^{N} A_{s-1}(x) f_s.$$

Будем решать систему (2.25) или (2.27) методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем $y_i^{(0)}$, которые получаются при подстановке в правую часть (2.25) $f_s \equiv 1$:

$$y_0^{(0)} = y_* \frac{\sum_{s=0}^{N-1} B_s(x_0)}{\sum_{s=0}^{N-1} B_s(0)},$$

$$y_i^{(0)}=y_*\frac{\sum\limits_{s=0}^{i-1}A_s(x_i)+\sum\limits_{s=i}^{N-1}B_s(x_i)}{\sum\limits_{s=0}^{N-1}B_s(0)}\,,\quad i=1,2,\ldots,N-1\,,$$

то есть нулевое приближение соответствует $\tau(x)$ (2.I4). Вычислив $f_s^{(k-1)}\equiv[1-y_s^{(k-1)}]^{-2}$ из $(k-1)$ -го приближения, найдём k -е приближение в виде $k=1,2,\ldots$

$$y_0^{(k)}=y_*\frac{\sum\limits_{s=0}^{N-1}B_s(x_0)f_s^{(k-1)}}{\sum\limits_{s=0}^{N-1}B_s(0)f_s^{(k-1)}}\,,$$

$$y_i^{(k)}=y_*\frac{\sum\limits_{s=0}^{i-1}A_s(x_i)f_s^{(k-1)}+\sum\limits_{s=i}^{N-1}B_s(x_i)f_s^{(k-1)}}{\sum\limits_{s=0}^{N-1}B_s(0)f_s^{(k-1)}}\,,\quad i=1,2,\ldots,N-1\,.$$

Не занимаясь вопросами, связанными с обоснованием приме - нения метода последовательных приближений к системам (2.25) и (2.27), лишь заметим, что на практике итерационный процесс сходится очень быстро. Естественно оценивать сходимость по относительной погрешности

$$\Sigma=\frac{6^{(k+1)}-6^{(k)}}{6^{(k+1)}}\,,$$

где $6^{(k)}$ (для оценки снизу, например) вычисляется по формуле

$$6^{(k)}=y_*\Big[\delta\sum_{s=0}^{N-1}B_s(0)f_s^{(k)}\Big]\,.$$

В рассмотренных ниже примерах при заданной относительной по - грешности, равной 10^{-3}, требовалось всего 3-4 итерации. Кроме того, результаты решений (2.25) и (2.27) при $\alpha=0$ согласуются с точным решением задачи, изложенным в § I.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению систем (2.25) и (2.27), состоящих из N трансцендентных уравнений, которые являются двусторонними оценками точного решения

(2.7). При этом по заданному y_*, $0<y_*<1$, с известной точностью вычисляется 6 (2.7). Перебором y_* можно, в частности, оценить максимальное значение 6_*.

В заключение остановимся на предельных случаях. При малых значениях α использование (2.23) для расчета $A_s(x)$ и $B_s(x)$ становится затруднительным. Поэтому (2.23) следует преобразо - вать к виду:

$$A_s(x)=1-x-\alpha\frac{1+e^{-\frac{2}{\alpha}}-e^{-\frac{1-x}{\alpha}}(1+e^{-\frac{2x}{\alpha}})}{1-e^{-\frac{2}{\alpha}}}-\frac{\alpha^2(1-e^{-\frac{\delta}{\alpha}})}{2\delta(1-e^{-\frac{2}{\alpha}})}\times$$

$$\times e^{-\frac{x-x_{s+1}}{\alpha}}(1-e^{-\frac{1-x}{\alpha}})^2(1+e^{-\frac{2x_s+\delta}{\alpha}}),\quad x\geqslant x_{s+1}\,,$$

$$B_s(x)=1-x_s-\frac{\delta}{2}-\alpha\frac{1+e^{-\frac{2}{\alpha}}-e^{-\frac{1-x}{\alpha}}(1+e^{-\frac{2x}{\alpha}})}{1-e^{-\frac{2}{\alpha}}}-\frac{\alpha^2(1-e^{-\frac{\delta}{\alpha}})}{2\delta(1-e^{-\frac{2}{\alpha}})}\times\qquad(2.29)$$

$$\times e^{-\frac{x_s-x}{\alpha}}\Big[(1+e^{-\frac{2x}{\alpha}})(1+e^{-\frac{2-2x_s-\delta}{\alpha}})-$$

$$-2e^{\frac{1+x-x_{s+1}}{\alpha}}(1+e^{-\frac{2x_s+\delta}{\alpha}})\Big],\qquad x\leqslant x_s\,.$$

Если $\alpha=0$, то

$$A_s(x)=1-x\,,\ B_s(x)=1-x_s-\frac{\delta}{2}\,,\ y_0=y_*\,.\qquad(2.30)$$

Приближенный способ решения задачи о прогибе пластинки без учета жесткости более предпочтителен, чем поиск точного решения, если имеется несколько (больше двух) симметрично расположенных относительно середины притягивающих электродов.

Наконец, если $\alpha=\infty$, то система равенств, к которой сводится решение задачи о прогибе пластинки без учета натяжения, в случае а) (2.2I) имеет вид (2.25), (2.26) и (2.27), (2.28) в случае б) (2.2I), где вместо 6, $A_s(x)$ и $B_s(x)$ нужно подставить ϱ (2.I0), $\bar{A}_s(x)$ и $\bar{B}_s(x)$,

$$\bar{A}_s(x)=\frac{1}{12}(1-x)^2(1+2x-x_{s+1}^2-x_{s+1}x_s-x_s^2)\,,$$

$$\bar{B}_s(x)=\frac{1}{12}\Big[1+\frac{1}{2}(x_{s+1}+x_s)(x_{s+1}^2+x_s^2)-x_{s+1}^2-x_{s+1}x_s-x_s^2-3x^2\times$$
$$\times\Big(1-x_{s+1}-x_s+\frac{x_{s+1}^2+x_{s+1}x_s+x_s^2}{3}\Big)\Big]\ .$$

4. В качестве примера приводится решение задачи (2.7) и (2.II) при $a=0.2$, $b=0.84$ и различных $\alpha\geqslant 0$, причем значения параметров a и b были заданы в соответствии с геометрией пленочного электростатического реле. Все основные результаты получены при $N=32$, так как найденные в этом случае оценки вполне удовлетворяют потребностям практики. Другие значения N задавались с целью изучения влияния числа разбиений интервала интегрирования на точность оценок. Результаты вычислений представлены в виде графиков на рис. 7–I2. Сделаем краткие пояснения к рисункам. На рис.7 показан характер сходимости итерационного процесса при решении систем (2.25) и (2.27) при $\alpha=0.2$, $N=32$, $y_*=1$. Результаты нулевых приближений (2.25) и (2.27) совпадают, что, как легко видеть, имеет место для любых α и N. Начиная с первого, приближения мало отличаются от последующих и в то же время близки между собой. Сходимость же итерационного процесса по σ, как и следовало ожидать, несколько худшая (см. табл.I)[*]. Аналогичная сходимость наблюдалась и при других значениях y_* и α.

На рис.8 приведены результаты вычислений σ по формулам (2.26) и (2.28) при $\alpha=0.2$ в зависимости от N. Из них, в частности, можно составить табл.2, описывающую уменьшение разности между верхней и нижней оценками σ_* задачи (2.7) с ростом N (разность вычислена с точностью до 10^{-3}). Если за величину σ_* взять среднее значение между оценками, равное I.04 при $N=32$, то ошибка будет иметь порядок одного процента.

Двусторонние оценки σ задачи (2.7) как функции y_* при $\alpha=0$, 0.I, 0.2, 0.3; $N=32$ даны на рис.9. Отсюда, например, видно, что при фиксированном y_* погрешность оценок σ возрастает с увеличением α. Кроме того, результаты вычислений подтверждают вывод о том, что учет параметра α при определении σ_* становится существенным, начиная с α порядка 10^{-1}.

В качестве примеров на рис.I0 и II даны решения систем

[*] Все таблицы приведены в приложении.

(2.26) и (2.28) при $y_*=0.3$ и $y_*=0.7$, $N=32$ и различных α, соответствующие оценкам сверху и снизу, которые практически совпадают.

Решение задачи о статическом прогибе пластинки представляет интерес прежде всего как возможность теоретически вычислить наименьшее "напряжение срабатывания". Записав уравнение равновесия в безразмерных величинах, мы свели число независимых параметров, определяющих σ_*, до трех, и, таким образом, σ_* является функцией только α, если заданы a и b. Рис. I2 содержит основной результат рассматриваемой задачи при трех характерных сочетаниях a и b: I) $a=0$, $b=0.I$, $N=50$; 2) $a=0.2$, $b=0.84$, $N=32$; 3) $a=0$, $b=I$, $N=50$. Здесь в виде графиков представлены зависимости двусторонних оценок σ_* от α, $0\leqslant\alpha\leqslant I$. Более точные значения оценок при некоторых α приведены в табл. 3.

Заметим, что при $b-a\ll 1$ зависимость $\sigma_*(\alpha)$ может быть построена из решения задачи о прогибе пластинки под действием сосредоточенной нагрузки, причем сохраняется достаточная для практических целей точность вычисления σ_*. Пусть в безразмерных переменных x и y величина сосредоточенной нагрузки определяется через $(b-a)\sigma[1-y(a)]^{-2}$. В этом случае решение задачи имеет вид:

$$y(x)=\frac{(b-a)\sigma}{[1-y(a)]^2}K(x,a;\alpha),$$

где $y(a)$ определяется из равенства

$$y(a)[1-y(a)]^2=(b-a)\sigma K(a,a;\alpha)\ .$$

Отсюда максимальное значение $(b-a)\sigma$, при котором решение задачи ещё существует, равно

$$(b-a)\sigma_*=\frac{4}{27K(a,a;\alpha)}$$

и совпадает с асимптотическим выражением (см. следствие 1,§2,2). В частности, при $a=0$, $b=0.I$

$$\sigma_*(\alpha)=\frac{40}{27(1-2\alpha\, th\frac{1}{2\alpha})}$$

График этой функции нанесен на рис.12 пунктирной линией.

Таким образом, используя предложенный метод, можно получить двусторонние оценки решения интегрального уравнения вида

$$y(\xi)=\varkappa\int_0^1 G(\xi,\theta;\beta)f[y(\theta)]\varphi(\theta)d\theta ,$$

являющегося интегральным представлением краевой задачи

$$\beta^2\frac{d^4y}{d\xi^4}=\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varkappa\varphi(\xi)f(y),$$

$$y=\frac{dy}{d\xi}=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=1 .$$

Здесь $\varkappa>0$ и $\beta>0$ – параметры, $\varphi(\xi)$ – симметричная относительно $\xi=\frac{1}{2}$ ступенчатая функция, причем

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}0,\ 0<\xi<\xi_1,\\ 1,\ \xi_1<\xi<\xi_2,\\ 0,\ \xi_2<\xi<\frac{1}{2},\end{cases}$$

$f(y)>0$, $0\le y<y_0$, – монотонно возрастающая с увеличением y функция, которая стремится к бесконечности при $y\to y_0$; $G(\xi,\theta;\beta)$ – функция Грина краевой задачи.

При этом оказывается, что в случае $\beta>0$ существуют такие $\varkappa_0$ и $\varkappa_*$, $\varkappa_0<\varkappa_*$, что интегральное уравнение имеет: а) единственное решение, если $0<\varkappa<\varkappa_0$; б) два решения, если $\varkappa_0<\varkappa<\varkappa_*$; в) решения нет, если $\varkappa>\varkappa_*$. При $\beta=0$ $\varkappa_0=0$, и интегральное уравнение имеет либо два решения, либо ни одного. Этот вывод естественным образом обобщает рассмотренное решение (2.7) и иллюстрируется результатами, приведенными на рис.9.

5. К интегральному уравнению (2.7) сводится задача о "залипании" пластинки (см. § 1,2). Пусть требуется найти решение задачи:

$$\alpha^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)\frac{\sigma}{(1-y)^2},\quad \sigma>\sigma_* \qquad (2.32)$$

$$y=y_*,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}=0 \text{ при } x=x_*;\ y=\frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=1,$$

где x_*, $a<x_*<b$, соответствует правой границе области "залипания". Равенство нулю третьей производной при $x=x_*$ является естественным граничным условием.

Вместо x введем новую переменную η по формуле:

$$x=(1-x_*)\eta+x_*$$

При этом задача (2.32) примет вид:

$$\bar\alpha^2\frac{d^4y}{d\eta^4}=\frac{d^2y}{d\eta^2}+\varphi(\eta)\frac{\bar\sigma}{(1-y)^2}, \qquad (2.33)$$

$$y=y_*,\ \frac{dy}{d\eta}=\frac{d^3y}{d\eta^3}=0 \text{ при } \eta=0,\quad y=\frac{dy}{d\eta}=0 \text{ при } \eta=1,$$

Здесь

$$\varphi(\eta)=\begin{cases}1,\ 0\le\eta<\eta_0,\\ 0,\ \eta_0<\eta<1\end{cases}$$

$$\eta_0=\frac{b-x_*}{1-x_*},\quad \bar\alpha=\frac{\alpha}{1-x_*},\quad \bar\sigma=(1-x_*)^2\sigma .$$

Легко видеть, что решение (2.33) совпадает с (2.7), если в (2.7) подставить значения $a=0$, $b=\eta_0$, $\sigma=\bar\sigma$ и $\alpha=\bar\alpha$. Пусть положение правой границы области "залипания" известно. Тогда из решения (2.33) мы можем найти $\bar\sigma(y_*)$, соответствующее заданному x_*. После чего σ определяется из равенства

$$\sigma=\frac{\bar\sigma}{(1-x_*)^2} .$$

§ 3. Определение натяжения и жесткости пластинки при помощи резонанса

В силу технологических особенностей изготовления реле возникает задача об определении натяжения P. Кроме того, реальная жесткость пластинки может значительно отличаться от D. Эти параметры: натяжение P и эффективная жесткость D_* могут быть рассчитаны в рамках принятой модели реле, если экспериментально замерены две резонансных частоты.

Пусть к пластинке и неподвижным электродам приложена периодически меняющаяся разность потенциалов, пропорциональная $\cos(\Omega t)$, где t – время. За счет малости амплитуды U можно добиться выполнения условия $Y(X,t)\ll H$, $0<X<\ell$, $t>0$.

При этом уравнение колебаний пластинки имеет вид:

$$\frac{M}{m\ell}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\mathcal{D}_*\frac{\partial^4 y}{\partial X^4}=P\frac{\partial^2 y}{\partial X^2}+\varphi(X)\frac{\varepsilon_0 U^2\cos^2(\Omega t)}{2[H+\frac{1}{\varepsilon}(d-H)]^2}, \qquad (3.1)$$

$$y=\frac{\partial y}{\partial X}=0 \text{ при } X=0 \text{ и } X=\ell; \quad y=\frac{\partial y}{\partial t}=0 \text{ при } t=0,$$

где M и m – масса и ширина пластинки; остальные обозначения уже применялись ранее. Сопротивлением среды пренебрегаем. Таким образом, требуется найти P и $\mathcal{D}_*$, если известны две, например, наименьшие резонансные частоты Ω.

В безразмерных переменных ξ, τ и $y=y(\xi,\tau)$

$$X=\ell\xi,\ t=\sqrt{\frac{\ell M}{mP}}\,\tau, \quad y=[H+\tfrac{1}{\varepsilon}(d-H)]\,y, \qquad (3.2)$$

задача (3.I) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2}+\beta_*^2\frac{\partial^4 y}{\partial\xi^4}=\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}+\varphi(\xi)\varkappa\cos^2(\omega\tau), \qquad (3.3)$$

$$y=\frac{\partial y}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=0 \text{ и } \xi=1; \quad y=\frac{\partial y}{\partial\tau}=0 \text{ при } \tau=0.$$

Здесь

$$\beta_*^2=\frac{\mathcal{D}_*}{\ell^2 P}, \quad \omega=\Omega\sqrt{\frac{\ell M}{mP}}. \qquad (3.4)$$

Как известно, явление резонанса наблюдается при совпадении частоты возбуждающей силы с одной из собственных частот. В случае (3.3) собственные частоты $\sqrt{\lambda_n}$ и соответствующие им собственные функции $f_n(\xi)$ определяются из решения краевой задачи [7]

$$\beta_*^2\frac{d^4 f_n}{d\xi^4}=\frac{d^2 f_n}{d\xi^2}+\lambda_n f_n, \quad n=1,2,\dots, \qquad (3.5)$$

$$y_n=\frac{dy_n}{d\xi}=0 \quad \text{при } \xi=0 \text{ и } \xi=1,$$

а условие резонанса имеет вид:

$$\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n}. \qquad (3.6)$$

В данном параграфе мы приведем результаты решения (3.5) в зависимости от величины β_*, использование которых позволяет вычислить P и $\mathcal{D}_*$.

I. Запишем общее решение (3.5), опуская индекс "n":

$$f(\xi)=A\sin(a\xi)+B\cos(a\xi)+C\,sh(b\xi)+\mathcal{D}\,ch(b\xi).$$

Здесь A, B, C, $\mathcal{D}$ – постоянные интегрирования,

$$a=\sqrt{\frac{1}{2\beta_*^2}\left[\sqrt{1+4\beta_*^2\lambda}-1\right]}, \quad b=\sqrt{\frac{1}{2\beta_*^2}\left[\sqrt{1+4\beta_*^2\lambda}+1\right]},$$

причем из выражений a и b следуют равенства:

$$\frac{a}{b}=\frac{\beta_* a}{\sqrt{1+\beta_*^2 a^2}}, \quad b=\frac{1}{\beta_*}\sqrt{1+\beta_*^2 a^2}. \qquad (3.7)$$

Потребовав выполнения граничных условий при $\xi=0$ и $\xi=1$, получим характеристическое уравнение, определяющее a и, следовательно,

$$\sqrt{\lambda}=a\sqrt{1+\beta_*^2 a^2},$$

$$\Delta(a)=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)th\,b\,\sin a-2\frac{a}{b}\left(\cos a-\frac{1}{ch\,b}\right)=0. \qquad (3.8)$$

Обратимся к решению (3.8). Нетрудно видеть, что искомый корень $\Delta(a)=0$ заключен между a_- и a_+, $a_-<a<a_+$, где левая граница a_- удовлетворяет уравнению

$$\sin a=0, \quad a_-=\pi n, \ n=1,2,\dots, \qquad (3.9)$$

а правая граница a_+ есть решение уравнения

$$\cos a_+=\frac{1}{ch\,b_+}, \quad b_+=\frac{1}{\beta_*}\sqrt{1+\beta_*^2 a_+^2}. \qquad (3.10)$$

Для определения a_+ воспользуемся методом решения трансцендентного уравнения вида: $\cos 2x\,ch 2x=1$, приведенного в [8]. Поскольку $b_+>\pi$, то с достаточной точностью решение (3.10) можно записать в виде ряда:

$$a_+=A_0+e^{-B_0}A_1+e^{-2B_0}A_2+e^{-3B_0}A_3+\dots, \qquad (3.11)$$

ограничившись четырьмя первыми членами. Здесь

$$A_0 = (n+\tfrac{1}{2})\pi\,,\quad B_0 = \frac{1}{\beta_*}\sqrt{1+\beta_*^2 A_0^2}\,,\quad A_1 = 2(-1)^{n+1}\,,$$

$$A_2 = -4\frac{A_0}{B_0}\,,\quad A_3 = (-1)^{n+1}2\left[6\frac{A_0^2}{B_0^2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{B_0}\left(1-\frac{A_0^2}{B_0^2}\right)\right].$$

Вычислив значения α_- и α_+, найдем искомый корень α, например, методом деления отрезка $[\alpha_-, \alpha_+]$ пополам.

Запишем выражения $f(\xi)$ и нормы Q,

$$Q = \int_0^1 f^2(\xi)\,d\xi\,,$$

преобразованные к удобному для вычислений виду:

$$f(\xi) = \frac{1}{th\,b + \frac{a\sin a}{b\,ch\,b}}\left\{R(\xi) + S(\xi)\right\}, \tag{3.12}$$

где

$$R(\xi) = th\,b\sin(a\xi) - \frac{a}{b}\cos(a\xi),$$

$$S(\xi) = \frac{a}{b(1-e^{-2b})}\left\{e^{-b\xi}\left[1+e^{-2b(1-\xi)}\right] + 2e^{-b}\cos\left[a(1-\xi)\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-b(1-\xi)}(1+e^{-2b\xi})\cos a - \frac{a}{b}e^{-b(1-\xi)}(1-e^{-2b\xi})\sin a\right\}.$$

Заметим, что $R(\xi)$ дает главное значение $f(\xi)$ за исключением малых окрестностей точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$, в то время как $S(\xi)$ – функция типа погранслоя – ответственна лишь за выполнение граничных условий. Норма собственной функции может быть подсчитана по формуле

$$Q = \frac{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\left(th\,b - \frac{a\sin a}{b\,ch\,b}\right) - \frac{2}{b}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\cos a}{ch\,b}\right)}{2\left(th\,b + \frac{a\sin a}{b\,ch\,b}\right)}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим предельные случаи.

а) Пусть $\pi(n+\frac{1}{2})\beta_* \to 0$ при фиксированном n. Тогда из равенств (3.7) следует, что $a/b \to 0$, $b \to \infty$ и в пределе

$$\Delta(a) = \sin a = 0, \quad a = \sqrt{\lambda} = \pi n\,; \tag{3.14}$$

то есть мы получили характеристическое уравнение задачи

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \lambda f = 0, \quad f = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \text{ и } \xi = 1, \tag{3.15}$$

определяющей собственные частоты и собственные функции натянутой нежесткой пластинки [7]. Выражения $f(\xi)$ и Q после выполнения в (3.12) и (3.13) предельного перехода имеют вид:

$$f(\xi) = \sin(a\xi), \quad Q = \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

б) Пусть $\pi n\beta_* \to \infty$ при фиксированном n. При этом $a/b \to 1$, и в пределе

$$\Delta(a) = -2\left(\cos a - \frac{1}{ch\,a}\right) = 0, \quad \sqrt{\lambda} = \beta_* a^2. \tag{3.17}$$

Решение (3.17) можно представить в виде ряда (3.11), в котором $A_0 = B_0$

$$a = A_0 + e^{-A_0}A_1 + e^{-2A_0}A_2 + e^{-3A_0}A_3 + \ldots\,, \tag{3.18}$$

где

$$A_0 = (n+\tfrac{1}{2})\pi\,,\quad A_1 = 2(-1)^{n+1},\quad A_2 = -4\,,\quad A_3 = \frac{34}{3}(-1)^{n+1}.$$

Нетрудно убедиться, что (3.17) является характеристическим уравнением задачи

$$\beta_*^2\frac{d^4 f}{d\xi^4} = \lambda f\,,\quad f = \frac{df}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = 1, \tag{3.19}$$

которая определяет собственные частоты и функции жесткой пластинки без натяжения [7]. В этом случае

$$f(\xi) = \frac{1}{th\,a + \frac{\sin a}{ch\,a}}\left\{\bar{R}(\xi) + \bar{S}(\xi)\right\}, \tag{3.20}$$

где

$$\bar{R}(\xi)=\operatorname{th}a\sin(a\xi)-\cos(a\xi),$$

$$\bar{S}(\xi)=\frac{1}{1+e^{-2a}}\Big\{e^{-a\xi}\left[1+e^{-2a(1-\xi)}\right]+2e^{-a}\cos\left[a(1-\xi)\right]+e^{-a(1-\xi)}\left(1+e^{-2a\xi}\right)\cos a-e^{-a(1-\xi)}\left(1-e^{-2a\xi}\right)\sin a\Big\},$$

а (3.13) преобразуется к виду:

$$Q=\frac{1-\dfrac{\sin a}{\operatorname{sh}a}}{1+\dfrac{\sin a}{\operatorname{sh}a}} \qquad (3.21)$$

Очевидно, мы придем к тому же результату, если будем увеличивать n при фиксированном β_*.

Построим асимптотическое решение (3.8) при $\beta_*\to\infty$, то есть в окрестности $a=a_+$. Пусть

$$a=a_++\delta a,\quad b=b_++\frac{a_+}{b_+}\delta a+\frac{1}{2b_+}\left(1-\frac{a_+^2}{b_+^2}\right)(\delta a)^2+\dots$$

Подставив эти выражения в (3.8), найдем, что δa имеет порядок ν,

$$\nu=\frac{\operatorname{th}b_+\sin a_+}{2\beta_*^2a_+b_+C_1+S_1},$$

$$C_1=\sin a_+-\frac{a_+}{b_+}\frac{\operatorname{sh}b_+}{\operatorname{ch}^2b_+},\qquad S_1=\frac{a_+}{b_+}\sin a_++\frac{\operatorname{sh}b_+}{\operatorname{ch}^2b_+}, \qquad (3.22)$$

где $\nu\to 0$ при $\beta_*\to\infty$. Таким образом, асимптотическое решение (3.8) имеет вид:

$$a=U_0+\nu U_1+\nu^2U_2+\dots,\quad \sqrt{\lambda}=a\sqrt{1+\beta_*^2a^2}. \qquad (3.23)$$

Здесь

$$U_0=a_+,\quad U_1=-1,\quad U_2=-\frac{2\beta_*^2b_+\left[\left(1+\dfrac{a_+^2}{b_+^2}\right)C_1+a_+C_2\right]-S_2}{2\beta_*^2a_+b_+C_1+S_1},$$

$$C_2=\frac{a_+}{b_+}\operatorname{th}b_+\sin a_++\frac{1}{2\operatorname{ch}b_+}\left(1-\frac{a_+^2}{b_+^2}\right)\left(1-\frac{\operatorname{th}b_+}{b_+}\right),$$

$$S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a_+^2}{b_+^2}\right)\left(\operatorname{th}b_+-\frac{1}{b_+}\right)\sin a_+-\frac{a_+}{b_+\operatorname{ch}b_+}.$$

Результаты решения (3.8), n = 1,2,3,4,5, содержатся в табл. 1-5. Здесь даны значения $\sqrt{\lambda_n}$, a_n и b_n в зависимости от β_*, $0\le\beta_*\le 2$ и $\beta_*=\infty$. При $\beta_*>2$ для вычисления a_n можно воспользоваться асимптотической формулой (3.23), точность которой оценивается следующими примерами: абсолютная ошибка при вычислении a_n по формуле (3.23) равна $2\cdot 10^{-5}$, если $n=1$, $\beta_*=1$, и $2\cdot 10^{-6}$, если $n=1$, $\beta_*=2$.

Для того чтобы нагляднее выделить предельные случаи (3.8), на рис. 13 приведены зависимости a_n/b_n от β_*, n=1,2,3,4,5. Графики первых пяти собственных функций при некоторых β построены на рис.14–18. Интересно, что предельный случай (3.20) практически реализуется уже при β_* порядка единицы.

2. Пусть известны резонансные частоты Ω' и Ω'', $\Omega'<\Omega''$. Согласно равенствам (3.4) и (3.6) отношение Ω''/Ω' является функцией только β_*. Например, если Ω' и Ω'' соответствуют λ_1 и λ_2, то

$$\frac{\Omega''}{\Omega'}=\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}=g(\beta_*) \qquad (3.24)$$

Построив из решения (3.8) $g(\beta_*)$, можем отсюда найти β_* по заданному Ω''/Ω' и, следовательно, λ_1. При этом натяжение P и эффективная жесткость D_* вычисляются по формулам:

$$P=4\Omega'^2\frac{\ell M}{m\lambda_1},\quad D_*=4\Omega'^2\frac{\ell^3M}{m\lambda_1}\beta_*^2. \qquad (3.25)$$

Знание этих величин позволяет рассчитать "напряжение срабатывания" реле, используя метод, предложенный в предыдущем параграфе.

Заметим, что решение (3.3) можно представить в виде ряда

$$y(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\tau)f_n(\xi), \qquad (3.26)$$

где

$$u_n(\tau)=\frac{\gamma_n}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\tau}\sin\left[(\tau-\theta)\sqrt{\lambda_n}\right]\cos^2(\omega\theta)d\theta,$$

$$\gamma_n = \frac{\varkappa}{Q_n}\int_0^1 \varphi(\xi) f_n(\xi)\,d\xi ,$$

или

$$u_n(\tau) = \gamma_n\left[\frac{1-\cos(\tau\sqrt{\lambda_n})}{2\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n - 4\omega^2}\sin\frac{(\sqrt{\lambda_n}-2\omega)\tau}{2}\sin\frac{(\sqrt{\lambda_n}+2\omega)\tau}{2}\right],$$

$$\sqrt{\lambda_n} \neq 2\omega .$$

Если $\sqrt{\lambda_n} = 2\omega$, то

$$u_n(\tau) = \gamma_n\left[\frac{1-\cos(\tau\sqrt{\lambda_n})}{2\lambda_n} + \frac{\tau}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin(\tau\sqrt{\lambda_n})\right],$$

и при достаточно больших τ решение (3.3) описывается выражением (с точностью до малых порядка $\varkappa$)

$$y(\xi,\tau) = \frac{\gamma_n}{4\sqrt{\lambda}}\tau\sin(\tau\sqrt{\lambda_n}) f_n(\xi). \tag{3.27}$$

Вычисление $f(\xi)$ показывает, что $f_{2k}(\xi) = -f_{2k}(1-\xi),\ k=1,2,\dots$. Так как $\varphi(\xi)$ – симметричная относительно $\xi=\frac{1}{2}$ функция, то $\gamma_{2k}=0$ и $u_{2k}(\xi)=0$. Таким образом, в случае симметрично распределенной возмущающей нагрузки условие резонанса имеет вид (3.6), где $n=2k-1,\ k=1,2,\dots$. Однако на практике условие симметрии точно не выполняется. Поэтому при $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{2k}}$ мы имеем медленно развивающийся во времени резонанс.

Необходимые для расчета P и $\mathcal{D}_*$ данные приведены на рис.19–22. На рис.19–21 построены зависимости $\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_3/\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_3/\lambda_2}$ от β_* , $0\le\beta_*\le 1$. Заметим, что уже при $\beta_*=1$ отношение собственных частот близко к предельному значению, обозначенному на рисунках пунктирной линией

$$\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} = \frac{a_i^2}{a_j^2} = \frac{(2i+1)^2}{(2j+1)^2} \qquad \text{при} \quad \beta_* = \infty ,$$

$$i,j=1,2,\dots,\ i\neq j .$$

Здесь же приведены отношения собственных частот натянутой жесткой пластинки с шарнирным закреплением концов [7]

$$\sqrt{\frac{\lambda_i'}{\lambda_j'}} = \frac{i}{j}\sqrt{\frac{1+\pi^2 i^2\beta_*^2}{1+\pi^2 j^2\beta_*^2}},\quad i,j=1,2,\dots,\ i\neq j .$$

Сравнение двух случаев показывает, что способ закрепления концов пластинки мало существен , если β_* имеет порядок 10^{-2} и менее.

После определения β_* значение λ может быть найдено из рис.22, где построены зависимости $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$ от β_* , $0<\beta_*\le 1$.

Все численные результаты данной работы получены при помощи ЭВМ "БЭСМ-6" по программам, составленным Лукьяновой Р.Г., Шведовой К.В., а также Еньшиной В.Ф.

Авторы выражают благодарность Дятлову В.Л. за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л.ДЯТЛОВ, Н.С. СОЛДАТЕНКОВ. Некоторые результаты исследований пленочных электростатических реле. –Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Выпуск 5, Физико-технологические исследования, Новосибирск, "Наука" Сиб.отд.,1968.
2. С.П.ТИМОШЕНКО, С.ВОЙНОВСКИЙ-КРИГЕР, Пластинки и оболочки,ФМ, 1963.
3. Современная математика для инженеров. Сборник статей под ред. Беккенбаха, ИЛ, 1959.
4. В.И.СМИРНОВ. Курс высшей математики, том 4, Гостехтеоретиздат, 1957.
5. В.В.НЕМЫЦКИЙ, В.В.СТЕПАНОВ, Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
6. Ф.ТРИКОМИ. Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
7. Р.В.САУСВЕЛЛ. Введение в теорию упругости, ИЛ, 1948.
8. Е.ЯНКЕ и Ф.ЭМДЕ. Таблицы функций с формулами и кривыми.Гостехиздат, 1949.

Поступила в редакцию
31 мая 1969 г.

Таблица I

Номер итерации		I	2	3	4
σ	оценка сверху	0.059	0.I44	0.I40	0.I40
	оценка снизу	0.042	0.I04	0.I02	0.I02

Таблица 2

N	I	4	8	32
Разность между оценками σ_*	3.2I	0.22	0.II	0.02

Таблица 3

α	$a=0,\ b=0.1,\ N=50$		$a=0.2,\ b=0.84,\ N=32$		$a=0,\ b=1,\ N=50$	
	Оценка σ_*		Оценка σ_*		Оценка σ_*	
	снизу	сверху	снизу	сверху	снизу	сверху
0.0	I.506		0.554		0.350	
0.I	I.906	I.908	0.733	0.749	0.437	0.445
0.2	2.502	2.504	I.028	I.055	0.586	0.596
0.3	3.425	3.427	I.458	I.499	0.8I0	0.825
0.4	4.700	4.703	2.036	2.096	I.II7	I.I39
0.5	6.333	6.337	2.769	2.853	I.509	I.539
0.6	8.327	8.33I	3.66I	3.774	I.988	2.026
0.7	I0.682	I0.687	4.7I3	4.859	2.552	2.602
0.8	I3.398	I3.405	5.926	6.III	3.204	3.266
0.9	I6.477	I6.485	7.299	7.528	3.942	4.0I8
I.0	I9.9I7	I9.928	8.834	9.III	4.766	4.859
∞	$\frac{\sigma_*}{\alpha^2}$ I8.I05	I8.II4	8.II7	8.282	4.339	4.424

Таблица 4

β_*	$\sqrt{\lambda_1}$	α_1	b
0.00	3.I4I5927	3.I4I5927	∞
0.0I	3.2072975	3.2056508	I00.05I37
0.02	3.279007I	3.2720085	50.I06946
0.03	3.3570887	3.3403583	33.500285
0.04	3.44I8667	3.4I02836	25.23I529
0.05	3.53360I7	3.48I2578	20.3007I8
0.06	3.6324708	3.5526564	I7.04II02
0.07	3.738553I	3.6237829	I4.738I63
0.08	3.85I8223	3.6939075	I3.034376
0.09	3.972I495	3.7623I57	II.730806
0.I0	4.09936I	3.8283569	I0.707769
0.I2	4.3729547	3.95I2857	9.2226408
0.I4	4.6699203	4.0599295	8.2I60475
0.I6	4.987I396	4.I53565I	7.5043056
0.I8	5.32I6572	4.2329583	6.9844208
0.20	5.67082I4	4.2996722	6.59448II
0.22	6.0323447	4.3555339	6.29538I8
0.24	6.4042973	4.4023200	6.06I4794
0.26	6.7850702	4.44I6II0	5.87544II
0.28	7.I733298	4.4747469	5.7252478
0.30	7.56797I7	4.5028340	5.6023767
0.35	8.5768690	4.5564572	5.378I565
0.40	9.6097465	4.5936650	5.2298908
0.45	I0.659762	4.620342I	5.I2697II
0.50	II.722375	4.6400325	5.0527I23
0.55	I2.794480	4.6549378	4.9974224
0.60	I3.873896	4.6664703	4.955I7I3
0.65	I4.959052	4.6755644	4.922I709
0.70	I6.048792	4.6828553	4.8959II6
0.75	I7.I42244	4.688786I	4.8746787
0.80	I8.238746	4.6936727	4.8572692
0.85	I9.337779	4.697745I	4.8428I87
0.90	20.438937	4.70II736	4.8306937
0.95	2I.54I895	4.7040864	4.82042I4
I.00	22.64639I	4.70658I6	4.8II6432
I.I0	24.859I78	4.7I06058	4.7975258
I.20	27.075993	4.7I36798	4.7867757
I.30	29.295924	4.7I60800	4.778402I
I.40	3I.5I83I3	4.7I79894	4.77I753I
I.50	33.742674	4.7I95330	4.7663860
I.60	35.968643	4.7207984	4.76I99I5
I.70	38.I95938	4.72I8486	4.7583480
I.80	40.42434I	4.7227298	4.7552937
I.90	42.653678	4.7233476	4.7527082
2.00	44.883809	4.724II40	4.7505003
∞	∞	4.73004I0	4.73004I0

Таблица 5

β_*	$\sqrt{\lambda_2}$	a_2	b_2
0.00	6.2831853	6.2831853	∞
0.01	6.4241290	6.4109678	100.20529
0.02	6.5969193	6.5411812	50.426055
0.03	6.8029885	6.6707229	33.994259
0.04	7.0429426	6.7962851	25.907325
0.05	7.3164634	6.9148362	21.161639
0.06	7.6223584	7.0240536	18.086324
0.07	7.9587397	7.1225571	15.962846
0.08	8.3232623	7.2098991	14.430268
0.09	8.7133594	7.2863768	13.287140
0.10	9.1264311	7.3527763	12.412225
0.12	10.011668	7.4595787	11.184353
0.14	10.961277	7.5389475	10.385381
0.16	11.961041	7.5983259	9.8385495
0.18	12.999973	7.6433176	9.4490476
0.20	14.069721	7.6779239	9.1624514
0.22	15.163949	7.7049543	8.9458078
0.24	16.277832	7.7263822	8.7782739
0.26	17.407665	7.7436053	8.6461739
0.28	18.550579	7.7576263	8.5402499
0.30	19.704326	7.7691741	8.4540628
0.35	22.625283	7.7904277	8.2978328
0.40	25.584263	7.8046110	8.1952397
0.45	28.569522	7.8145177	8.1243436
0.50	31.573641	7.8216971	8.0733478
0.55	34.591723	7.8270598	8.0354620
0.60	37.620418	7.8311678	8.0065577
0.65	40.657361	7.8343824	7.9840098
0.70	43.700835	7.8369442	7.9660850
0.75	46.749567	7.8390181	7.9516025
0.80	49.802593	7.8407202	7.9397351
0.85	52.859170	7.8421341	7.9298897
0.90	55.918716	7.8433213	7.9216322
0.95	58.980770	7.8443277	7.9146390
1.00	62.044961	7.8451881	7.9086646
1.10	68.178602	7.8465726	7.8990599
1.20	74.317808	7.8476275	7.8917490
1.30	80.461307	7.8484497	7.8860559
1.40	86.608185	7.8491027	7.8815365
1.50	92.757771	7.8496300	7.8778890
1.60	98.909560	7.8500619	7.8749029
1.70	105.06317	7.8504200	7.8724275
1.80	111.21829	7.8507203	7.8703526
1.90	117.37468	7.8509745	7.8685963
2.00	123.53217	7.8511192	7.8670966
∞	∞	7.8532046	7.8532046

Таблица 6

β_*	$\sqrt{\lambda_3}$	a_3	b_3
0.00	9.4247780	9.4247780	∞
0.01	9.6599770	9.6156261	100.46124
0.02	9.9917480	9.8049998	50.952311
0.03	10.421771	9.9835975	34.796312
0.04	10.947322	10.144053	26.979655
0.05	11.561848	10.282486	22.488431
0.06	12.256330	10.398452	19.644480
0.07	13.020762	10.493826	17.725745
0.08	13.845283	10.571543	16.370935
0.09	14.720854	10.634707	15.380305
0.10	15.639549	10.686142	14.635356
0.12	17.580356	10.768864	13.611895
0.14	19.625845	10.815573	12.961367
0.16	21.747157	10.852862	12.523861
0.18	23.924433	10.879995	12.216321
0.20	26.143838	10.900252	11.992309
0.22	28.395573	10.915721	11.824302
0.24	30.672558	10.927773	11.695185
0.26	32.969587	10.937330	11.593881
0.28	35.282760	10.945026	11.512979
0.30	37.609106	10.951309	11.447370
0.35	43.468732	10.962746	11.328948
0.40	49.373069	10.970288	11.251543
0.45	55.307818	10.975515	11.198223
0.50	61.264150	10.979281	11.159956
0.55	67.236333	10.982084	11.131574
0.60	73.220492	10.984224	11.109948
0.65	79.213913	10.985894	11.093094
0.70	85.214643	10.987223	11.079706
0.75	91.221240	10.988297	11.068896
0.80	97.232617	10.989178	11.060042
0.85	103.24794	10.989909	11.052700
0.90	109.26656	10.990522	11.046544
0.95	115.28795	10.991041	11.041332
1.00	121.31171	10.991485	11.036881
1.10	133.36504	10.992198	11.029727
1.20	145.42451	10.992742	11.024283
1.30	157.48872	10.993165	11.020045
1.40	169.55665	10.993501	11.016681
1.50	181.62756	10.993772	11.013967
1.60	193.70089	10.993994	11.011745
1.70	205.77622	10.994178	11.009903
1.80	217.85322	10.994332	11.008360
1.90	229.93162	10.994463	11.007053
2.00	242.01121	10.994574	11.005938
∞	∞	10.995608	10.995608

Таблица 7

β_*	$\sqrt{\lambda_4}$	a_4	b_4
0.00	I2.56637I	I2.56637I	∞
0.0I	I2.924222	I2.8I93I8	I00.8I833
0.02	I3.499809	I3.06I498	5I.677875
0.03	I4.289I42	I3.275II5	35.8795I8
0.04	I5.274839	I3.45I343	28.389058
0.05	I6.43I247	I3.590450	24.I80578
0.06	I7.7304I7	I3.697804	2I.573308
0.07	I9.I4622I	I3.780090	I9.84874I
0.08	20.656238	I3.843352	I8.65I767
0.09	22.242II6	I3.892399	I7.789I97
0.I0	23.889205	I3.930846	I7.I48424
0.I2	27.32323I	I3.985837	I6.280297
0.I4	30.892245	I4.022068	I5.736544
0.I6	34.554786	I4.046976	I5.374655
0.I8	38.284I63	I4.064736	I5.I22202
0.20	42.062668	I4.07780I	I4.939360
0.22	45.878I96	I4.087668	I4.802823
0.24	49.722243	I4.09529I	I4.698243
0.26	53.588682	I4.I0I296	I4.6I64I0
0.28	57.472999	I4.I06I05	I4.55II96
0.30	6I.37I803	I4.II00I6	I4.498402
0.35	7I.I66563	I4.II7095	I4.403320
0.40	8I.009736	I4.I2I737	I4.34I320
0.45	90.885600	I4.I2494I	I4.298679
0.50	I00.78455	I4.I27244	I4.268II2
0.55	II0.70039	I4.I28954	I4.245459
0.60	I20.62896	I4.I30257	I4.2282I0
0.65	I30.56736	I4.I3I274	I4.2I4773
0.70	I40.5I349	I4.I32082	I4.204I04
0.75	I50.46584	I4.I32735	I4.I9549I
0.80	I60.42323	I4.I33270	I4.I88439
0.85	I70.38479	I4.I337I3	I4.I82592
0.90	I80.34983	I4.I34085	I4.I7769I
0.95	I90.3I779	I4.I34400	I4.I73542
I.00	200.28825	I4.I34669	I4.I69999
I.I0	220.23528	I4.I35I02	I4.I64305
I.20	240.I8879	I4.I3543I	I4.I59973
I.30	260.I4727	I4.I35687	I4.I5660I
I.40	280.I0968	I4.I35890	I4.I53925
I.50	300.0752I	I4.I36055	I4.I5I766
I.60	320.04329	I4.I36I89	I4.I49999
I.70	340.0I348	I4.I36300	I4.I48534
I.80	359.9854I	I4.I36394	I4.I47306
I.90	379.9588I	I4.I36473	I4.I46267
2.00	399.93347	I4.I36540	I4.I45380
∞	∞	I4.I37I65	I4.I37I65

Таблица 8

β_*	$\sqrt{\lambda_5}$	a_5	b_5
0.00	I5.707963	I5.707963	∞
0.0I	I6.226096	I6.02I763	I0I.27535
0.02	I7.I55086	I6.309370	52.592733
0.03	I8.470480	I6.544653	37.2I3393
0.04	20.II9200	I6.722827	30.077449
0.05	22.038I38	I6.852784	26.I53706
0.06	24.I68482	I6.946723	23.76908I
0.07	26.46I747	I7.0I5II2	22.2I70I3
0.08	28.880330	I7.065636	2I.I53863
0.09	3I.395857	I7.I0362I	20.395848
0.I0	33.987098	I7.I32693	I9.837569
0.I2	39.336993	I7.I7323I	I9.088329
0.I4	44.843595	I7.I99285	I8.623529
0.I6	50.455800	I7.2I6903	I8.3I6229
0.I8	56.I420I9	I7.229322	I8.I02866
0.20	6I.88I884	I7.238382	I7.948867
0.22	67.66I760	I7.245I83	I7.834I66
0.24	73.4722I2	I7.2504I2	I7.746487
0.26	79.306526	I7.2545I6	I7.677987
0.28	85.I59798	I7.257794	I7.623466
0.30	9I.028375	I7.260452	I7.579372
0.35	I05.75004	I7.26525I	I7.500062
0.40	I20.5224I	I7.268388	I7.4484I7
0.45	I35.32889	I7.270549	I7.4I2930
0.50	I50.I5939	I7.272I00	I7.387508
0.55	I65.00743	I7.273250	I7.368678
0.60	I79.86867	I7.274I27	I7.354343
0.65	I94.74009	I7.2748I0	I7.343I8I
0.70	209.6I952	I7.275352	I7.3343I9
0.75	224.50537	I7.275790	I7.327I67
0.80	239.39644	I7.276I49	I7.32I3II
0.85	254.29I82	I7.276446	I7.3I6457
0.90	269.I9078	I7.276696	I7.3I2388
0.95	284.09277	I7.276907	I7.308944
I.00	298.99733	I7.277087	I7.306003
I.I0	328.8I277	I7.277377	I7.30I278
I.20	358.63489	I7.277598	I7.297683
I.30	388.462I4	I7.277770	I7.294885
I.40	4I8.29343	I7.277906	I7.292664
I.50	448.I2796	I7.2780I6	I7.290873
I.60	477.965I0	I7.278I06	I7.289406
I.70	507.80442	I7.278I80	I7.288I9I
I.80	537.64553	I7.278243	I7.287I72
I.90	567.488I7	I7.278296	I7.2863I0
2.00	597.33209	I7.27834I	I7.285574
∞	∞	I7.278560	I7.278560

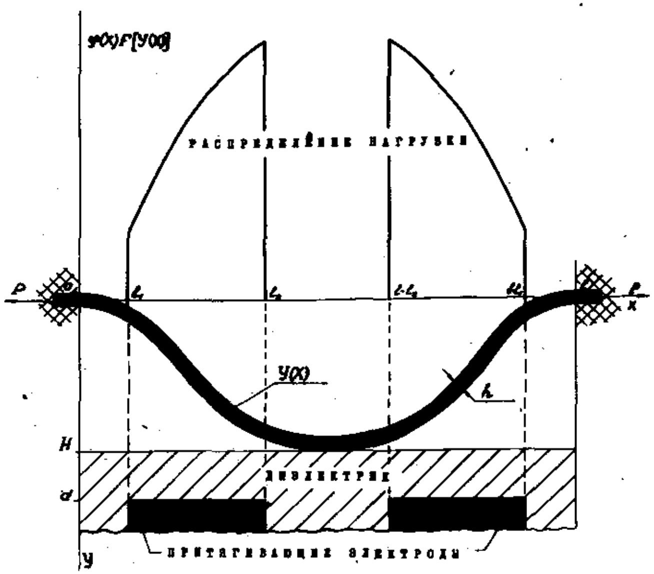


Рис. I.

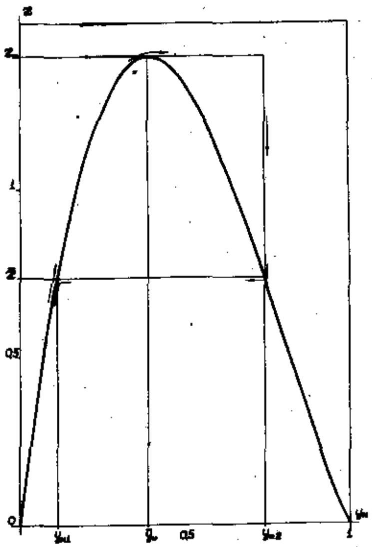


Рис. 2.

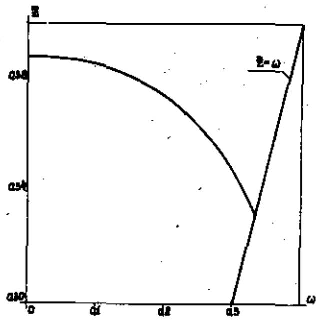


Рис. 3.

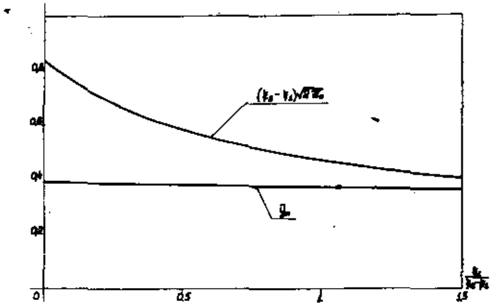


Рис. 4.

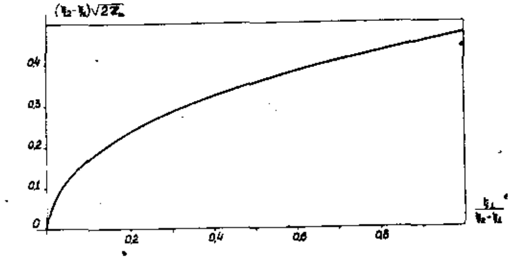


Рис. 5.

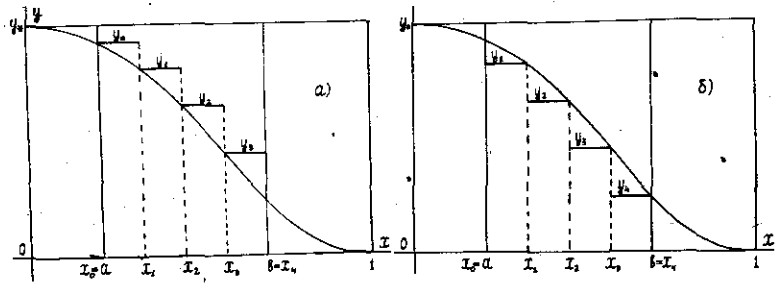


Рис. 6.

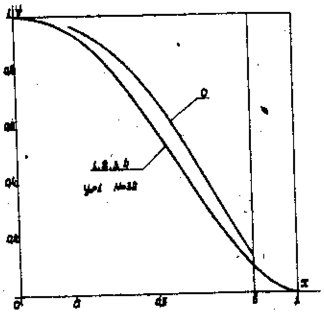


Рис. 7.

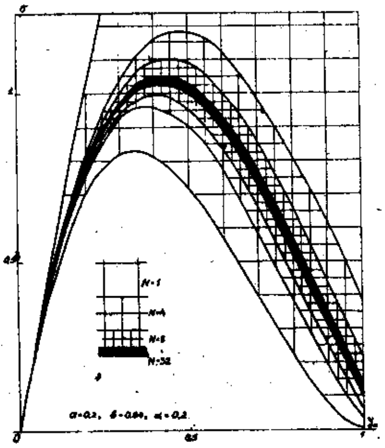


Рис. 8.

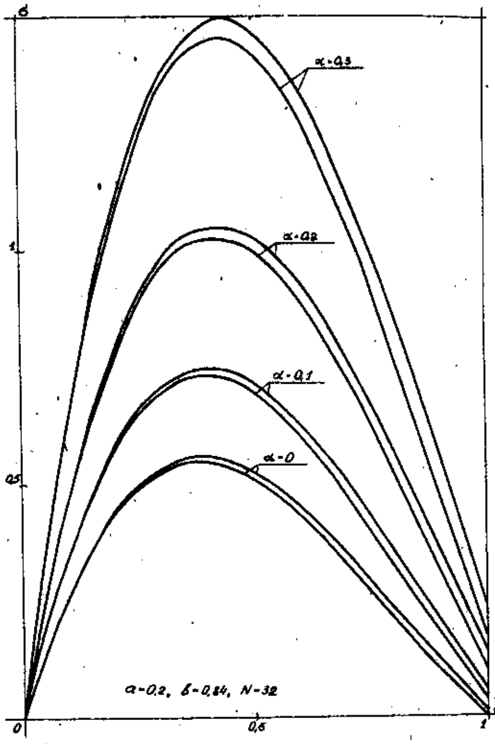


Рис. 9.

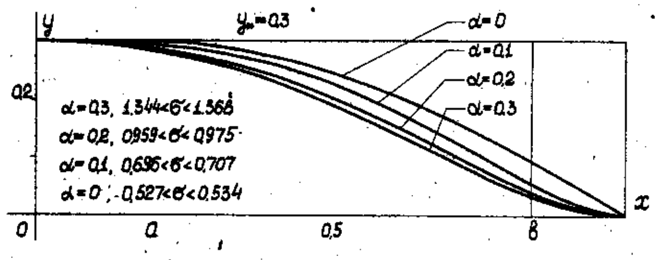


Рис. 10.

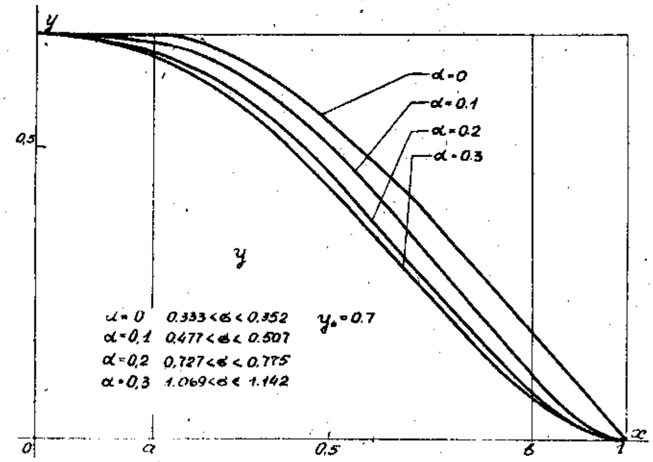


Рис. 11.

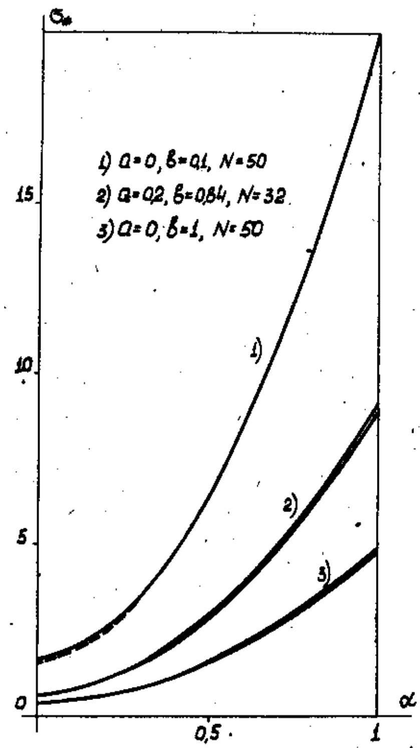


Рис. 12.

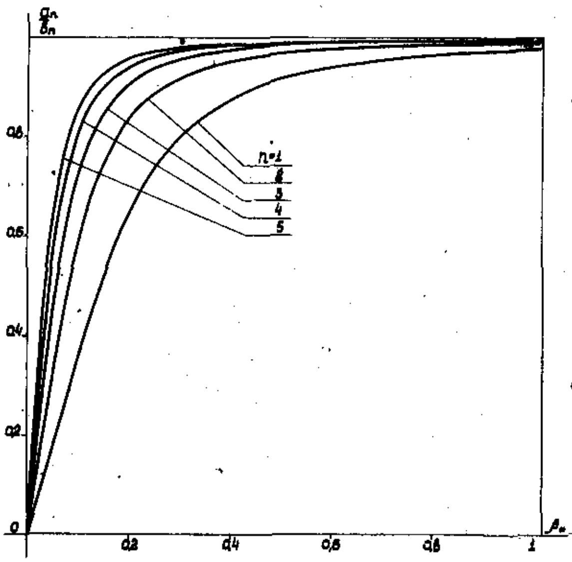


Рис. I3.

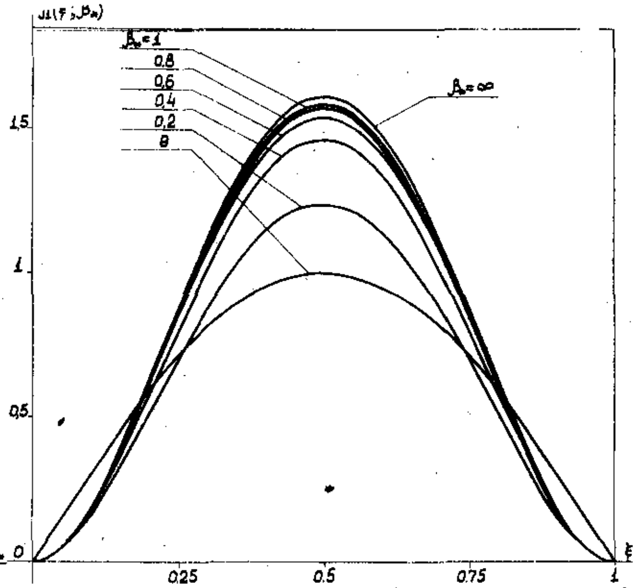


Рис. I4.

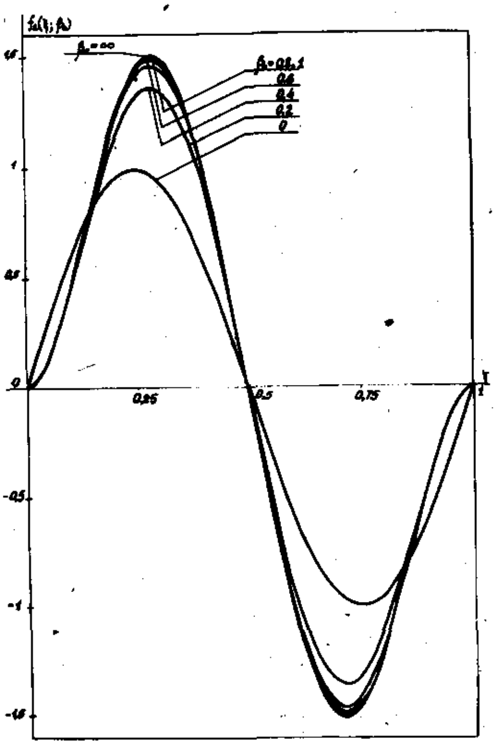


Рис.I5.

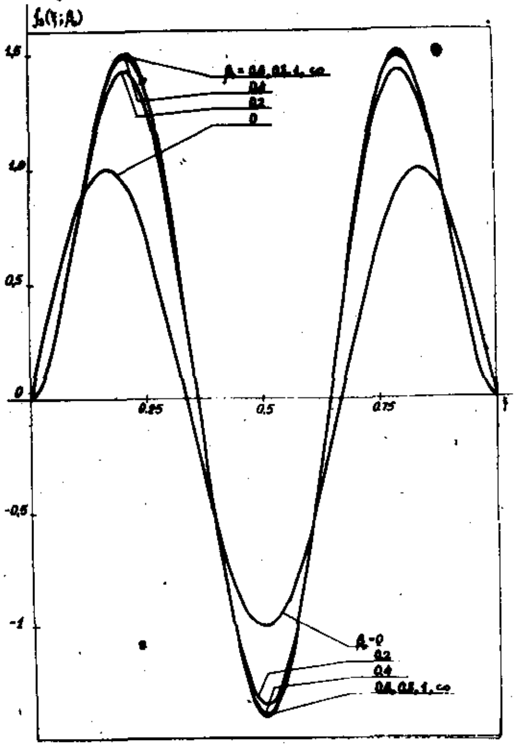


Рис. I6.

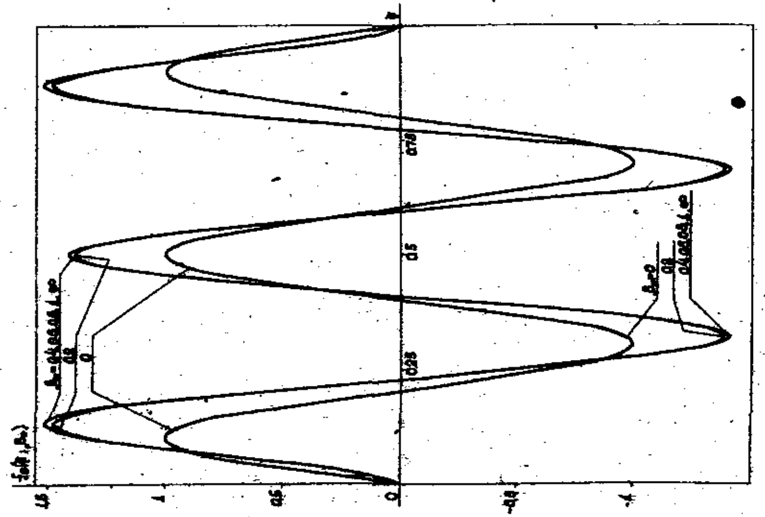


Рис. I8.

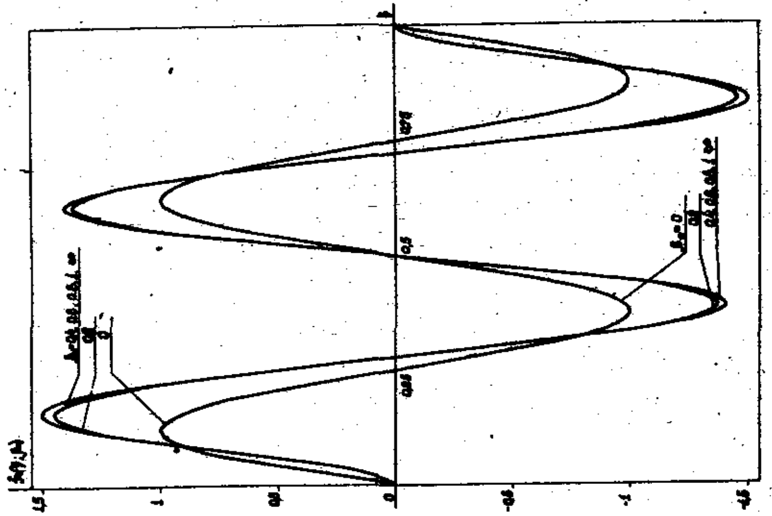


Рис. I7.

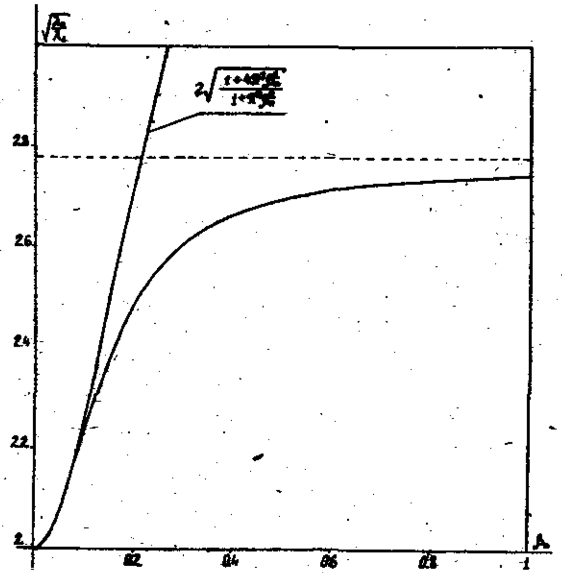


Рис. I9.

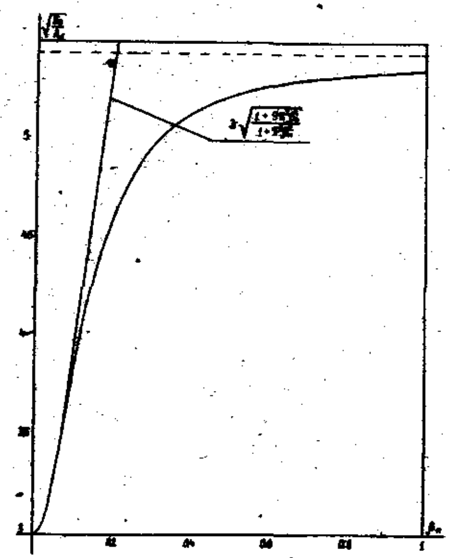
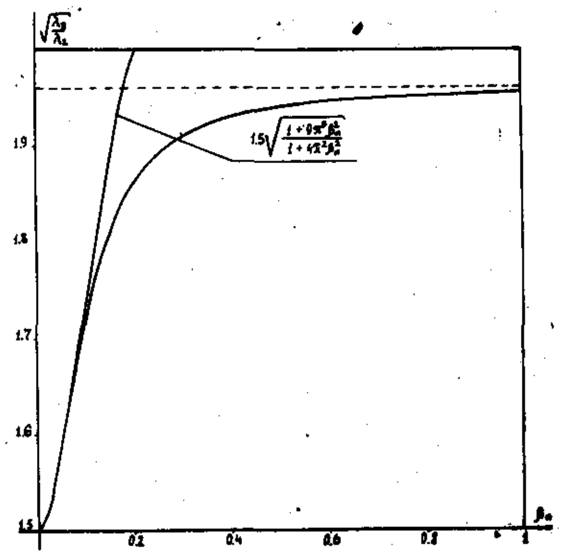
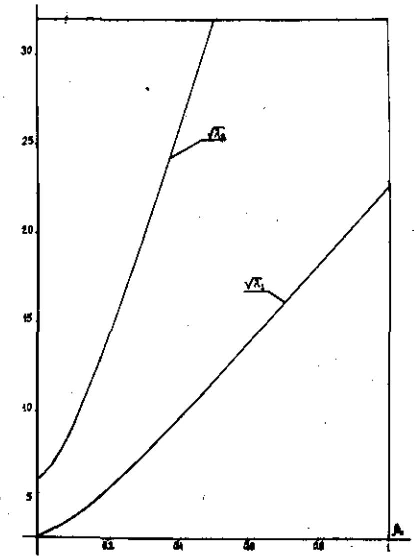


Рис. 20.



$\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}$
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1
β_o

Рис. 2I



30
25
20
15
10
5
$\sqrt{\lambda_2}$
$\sqrt{\lambda_1}$
1

Рис. 22.