УДК 62-505.15

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МЕТОДУ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

А.И.Москаленко

Рассматривается метод аппроксимации функций, заданных посредством системы дифференциальных уравнений. Получены оценки точности аппроксимации. Рассмотрено применение этих оценок к методу малого параметра интегрирования дифференциальных уравнений.

Введение

Пусть динамическая система описывается уравнением в векторной форме

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), \rho), \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

где $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$ – постоянный, т.е. независимый от t, y параметр, $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_m(t)\}$ – фазовая координата, т.е. функция, заданная соотношениями (1), $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ – достаточно гладкая функция переменных t, y, ρ.

Будем допускать, что параметр ρ и начальное значение фазовой координаты принадлежат ограниченным областям k-мерного и m-мерного евклидовых пространств, т.е.

$$\rho \in P, \quad y_0 \in B_0 \tag{2}$$

Рассмотрим функцию конечного состояния системы

$$J = F(y_1, \rho), \tag{3}$$

где $y_1 = y(T)$; T – фиксированное число, F – кусочно-гладкая функция своих переменных.

Очевидно, что функция J конечного состояния системы является, по существу, функцией конечного числа переменных (y_0, ρ). Пусть система (1) сложна, и получение точной аналитической формулы $J = J(y_0, \rho)$ невозможно. В этом случае имеет смысл задача нахождения приближенного выражения для функции (3) и задача оценки его точности.

В работе предлагаются методы их решения, основанные на использовании одного конструктивного соображения, примененного в [1 - 2][ж)]. Полученные оценки точности аппроксимации полезны также при решении задачи поиска абсолютного минимума функции (3) при условиях (2). Применение этих оценок к методу малого параметра решения дифференциальных уравнений дает возможность получить оценки точности приближенного решения.

§ 1. Метод аппроксимации

Запишем более компактно формулы (1 - 3).

$$\frac{dz}{dt} = f_1(t, z), \quad z(0) = z_0, \tag{4}$$

$$z_0 \in B_0 \times P, \tag{5}$$

$$J(z_0) = F(z_1), \tag{6}$$

где $z = \{y, \rho\}$, $z_1 = z(T)$, $f_1 = \{f, 0\}$, $\times$ – знак прямого произведения множеств.

ж) Здесь имеется в виду конструкция функционала L.

Пусть $\varphi(t, x)$ - дифференцируемая функция своих аргументов. Построим функционал L [I].

$$L = \Phi(x_0, x_1) - \int_0^T R(t, x(t), \varphi)\, dt , \tag{7}$$

где

$$\Phi(x_0, x_1) = F(x_1) + \varphi(T, x_1) - \varphi(0, x_0),$$

$$R(t, x, \varphi) = \varphi_x(t, x) f(t, x) + \varphi_t(t, x), \quad \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Очевидно, $L = J$, если функция $x(t)$ удовлетворяет (4).

Пусть функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi_x(t, x) f(t, x) + \varphi_t(t, x) = 0 , \tag{8}$$

$$F(x) + \varphi(T, x) = 0 . \tag{9}$$

Тогда

$$J(x_0) = -\varphi(0, x_0) . \tag{I0}$$

Если $\tilde{\varphi}(t, x)$ приближенно удовлетворяет уравнению (8) и точно - условию (9), то при выполнении (4) имеем:

$$J(x_0) = -\tilde{\varphi}(0, x_0) - \int_0^T R(t, x(t), \tilde{\varphi})\, dt . \tag{II}$$

Отбросив интегральный член, получим приближенное выражение для функции $J(x_0)$.

Будем искать функцию $\tilde{\varphi}(t, x)$ в виде*):

$$\tilde{\varphi} = -F(x) + \sum_{i=0}^{N} a_i(t) \psi^i(x), \quad a_i(T) = 0 ,$$

---

*) Нередко имеется возможность получить достаточно простое первое приближение функции $\varphi(t, x)$ (обозначим его $\varphi_0(t, x)$), заменив функцию f некоторыми приближенными выражениями, такими, что система (4) интегрируется. В этом случае, очевидно, имеет смысл искать функцию $\tilde{\varphi}$ в виде

$$\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \sum_{i=0}^{N} a_i(t) \psi^i(x), \quad a_i(T) = 0 .$$

Здесь допускается, что $\varphi_0(t, x)$ удовлетворяет условию (9).

где $\psi^i(x)$ - линейно независимые функции.

Тогда

$$J(x_0) \cong F(x_0) - \sum_{i=0}^{N} a_i^0 \psi^i(x_0), \quad a_i^0 = a_i(0) . \tag{I2}$$

В пространстве (t, x) выберем систему из $N+1$ линий $x_j(t)$ ($j = 0, I, \ldots, N$), которые назовем линиями уровня (ЛУ).

Для получения замкнутой системы, определяющей функции $a_i(t)$, достаточно положить

$$R(t, x_j(t), \tilde{\varphi}) = 0 , \quad j = 0, 1, \ldots, N . \tag{I3}$$

Соотношения (I3) представляют из себя систему $(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно производных $a_i'(t)$ ($i = 0, I, \ldots, N$). Допускаем, что ЛУ (линейные уравнения) выбраны так, что определитель этой системы отличен от нуля. Тогда для нахождения функций $a_i(t)$ имеем систему $(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями $a_i(T) = 0$ ($i = 0, I, \ldots, N$).

Выбор ЛУ произволен, каждому будет соответствовать своя процедура расчета функций $a_i(t)$. Предположим, что ЛУ удовлетворяют уравнению (4) при начальных условиях

$$x_j(0) = x_{j0} , \quad (j = 0, 1, \ldots, N) .$$

Тогда, очевидно,

$$J(x_{j0}) = -\tilde{\varphi}(0, x_{j0}), \quad j = 0, 1, \ldots, N .$$

Этих соотношений достаточно для определения коэффициентов a_i^0, и метод получения разложения (I2) совпадает с хорошо известным методом аппроксимации функции, заданной в дискретном ряде точек (в нашем случае это точки x_{j0}). Вообще говоря, выбор ЛУ позволяет использовать для подсчёта коэффициентов информацию о функции $J(x_0)$ бо́льшую, чем та, которая заключена в конечном числе точек.

З а м е ч а н и е. Из других методов нахождения функции $\tilde{\varphi}$ можно указать следующие.

I. Метод Галеркина:

$$\tilde{\varphi} = -F(x) + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i A_i(t, x), \quad A_i(T, x) = 0 .$$

где $A_i(t,z)$ – элементы линейно независимой системы функций. Постоянные коэффициенты α_i находятся из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\int_0^T\int_B R(t,z,\tilde{\varphi})A_j(t,z)\,dz\,dt=0\,,\; j=0,1,\dots,N\,,$$

где $B\ni z(t)$ при $z_0\in B_0\times P$ и $t\in[0,T]$.

2. $\tilde{\varphi}=-F(z)+\sum_{i=0}^{N}\alpha_i(t)\psi^i(z)$, $\alpha_i(T)=0$.

Коэффициенты $\alpha_i(t)$ находятся из уравнений

$$\int_B R(t,z,\tilde{\varphi})\psi_j(z)\,dz=0,\; j=0,1,\dots,N.$$

Эти уравнения могут оказаться более удобными, чем (I3), в том случае, когда функции $\psi_j(z)$ ортогональны, т.е.

$$\int_B \psi_i(z)\psi_k(z)\,dz=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k,\\ \mathrm{I} \text{ при } i=k,\end{cases}$$

и уравнения (I3) окажутся разрешенными относительно производных α_i'.

Для интерпретации того, как влияет выбор ЛУ на процедуру расчета коэффициентов α_i^o, рассмотрим следующий

П р и м е р I.

$$\mathcal{I}(\rho)=-2\int_0^1 y\,dt\,,\qquad \frac{dy}{dt}=\psi(\rho),\; y(0)=0,$$

$\psi(\rho)$ – заданная функция параметра ρ, $\psi(0)=0$. Очевидно

$$\mathcal{I}(\rho)=\psi(\rho).$$

Имеем:

$$R=\varphi_y\psi(\rho)+2y+\varphi_t\,,\;(\varphi=\varphi(t,y,\rho)),\;\varphi(1,y,\rho)=0.$$

Ищем функцию $\tilde{\varphi}$ в виде:

$$\tilde{\varphi}=a_1\rho+a_2\rho^2+b_1y+b_2y^2.$$

В качестве ЛУ возьмем следующие:

I) $y=0$, $\rho=\ell_1(t)$, $\ell_1(0)=0$, $\ell_1(t)\geqslant 0$,

2) $y=1$, $\rho=0$,

3) $y=0$, $\rho=\ell_2(t)$, $\ell_2(0)=0$, $\ell_2(t)\geqslant 0$,

4) $y=\frac{1}{2}$, $\rho=0$.

Уравнения (I3) имеют вид:

$$\begin{aligned}&b_1\psi(\ell_1)+a_{1t}\ell_1+a_{2t}\ell_1^2=0\,,\\&2+b_{1t}+b_{2t}=0\,,\\&b_1\psi(\ell_1)+a_{1t}\ell_2+a_{2t}\ell_2^2=0\,,\\&1+\tfrac{1}{2}b_{1t}+\tfrac{1}{4}b_{2t}=0\end{aligned}\tag{14}$$

Отсюда

$$a_{1t}=-\frac{\Delta_1 b_1}{\Delta}\,,\; a_{2t}=-\frac{\Delta_2 b_1}{\Delta}\,,\; b_{1t}=-2,\; b_{2t}=0\,,$$

где

$$\Delta=\ell_1\ell_2^2-\ell_2\ell_1^2\,,$$

$$\Delta_1=\psi(\ell_1)\ell_2^2-\psi(\ell_2)\ell_1^2,\;\Delta_2=\ell_1\psi(\ell_2)-\ell_2\psi(\ell_1).$$

Тогда

$$a_1^o=\int_0^1 b_1\frac{\Delta_1}{\Delta}\,dt,\quad a_2^o=\int_0^1 b_1\frac{\Delta_2}{\Delta}\,dt\,.\tag{I5}$$

Очевидно, что первое и третье уравнения из (I4) заключают в себе факт равенства функции $\psi(\rho)$ с функцией $\frac{a_{1t}}{b_1}\rho+\frac{a_{2t}}{b_1}\rho^2$ на линиях $\rho=\ell_1(t)$, $\rho=\ell_2(t)$ соответственно. Соотношения (I5) осуществляют осреднение коэффициентов $\frac{a_{1t}}{b_1}$, $\frac{a_{2t}}{b_1}$ на отрезке $[0,\mathrm{I}]$ с весом $b_1(t)$ ($\int_0^1 b_1\,dt=\mathrm{I}$). При этом используется информация о функции $\psi(\rho)$ на отрезке

$$0\leqslant\rho\leqslant\max_{\ell_1,\ell_2}(\ell_1(1),\,\ell_2(1))\,.$$

Итак, в данном простом примере посредством соответствующего выбора ЛУ приходим также к известной процедуре подсчета коэффициентов разложения. Она лучше, чем аппроксимация на основе значений в дискретных точках. При произвольном выборе ДУ процедура использования информации о функции $\mathcal{J}(\rho)$ может оказаться очень сложной.

Сделаем оценки точности аппроксимации. Пусть $B(t)$ - область в $(m+k)$-мерном евклидовом пространстве, содержащая все траектории, исходящие из точек $x_0 \in B_0 \times P$, $\tilde{\varphi}(t,x)$ обозначает здесь функцию, определенную одним из способов, описанных выше*), $\mathcal{D}=\{\delta\varphi\}$ - некоторое подмножество из множества C^1 дифференцируемых функций переменных (t, x), удовлетворяющих условию $\delta\varphi(T,x)=0$. В частности, $\mathcal{D}$ может состоять из элементов вида:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i W_i(t,x), \tag{16}$$

где α_i - произвольные константы, $W_i(t,x)$ - линейно независимые дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям $W_i(T,x)=0$. Обозначим:

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi} + \delta\varphi .$$

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. Для любой точки x_0 из множества $B_0 \times P$ справедливы неравенства:

$$\mathcal{J}(x_0) + \tilde{\varphi}(0,x_0) \le -\sup_{\delta\varphi\in\mathcal{D}} \Big\{ \inf_{x\in B_0\times P} \delta\varphi(0,x) + \int_0^T \inf_{x\in B(t)} R(t,x,\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt \Big\}; \tag{17}$$

$$\mathcal{J}(x_0) + \tilde{\varphi}(0,x_0) \ge -\inf_{\delta\varphi\in\mathcal{D}} \Big\{ \sup_{x\in B_0\times P} \delta\varphi(0,x) + \int_0^T \sup_{x\in B(t)} R(t,x,\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt \Big\}. \tag{18}$$

*) Заметим, что полученные неравенства (теоремы I,2) справедливы и для произвольной функции $\tilde{\varphi}(t,x)$.

Доказательство следует из соотношения:

$$\mathcal{J}(x_0) + \tilde{\varphi}(0,x_0) = -\delta\varphi(0,x_0) - \int_0^T R(t,x(t),\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt ,$$

которое получается аналогично (II).

Следующая теорема дает оценки типа (2.7) из работы [2].

ТЕОРЕМА 2.*) Пусть в точке $\tilde{x}_0$ достигается абсолютный минимум функции $-\tilde{\varphi}(0,x_0)$ при условии (5), а α - минимальное значение функционала $\mathcal{J}$ при условиях (4-5). Тогда имеют место неравенства:

$$\mathcal{J}(\tilde{x}_0) - \alpha \le \inf_{\delta\varphi\in\mathcal{D}} E_j, \quad j=1,2, \tag{19}$$

где

$$E_1 = \sup_{x\in B_0\times P} \tilde{\tilde{\varphi}}(0,x) - \tilde{\tilde{\varphi}}(0,\tilde{x}_0) + \int_0^T \Big[\sup_{x\in B(t)} R(t,x,\tilde{\tilde{\varphi}}) - \inf_{x\in B(t)} R(t,x,\tilde{\tilde{\varphi}}) \Big] dt ,$$

$$E_2 = \mathcal{J}(\tilde{x}_0) + \sup_{x\in B_0\times P} \tilde{\tilde{\varphi}}(0,x) + \int_0^T \sup_{x\in B(t)} R(t,x,\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt .$$

*) Очевидно, что эту теорему можно сформулировать для произвольной точки x_0, однако принятая формулировка в данном случае более удобна. С использованием неравенства $\sup \tilde{\tilde{\varphi}}(0,x) \le \tilde{\varphi}(0,\tilde{x}_0) + \sup \delta\varphi(0,x)$ ($x\in B_0\times P$, $\tilde{x}_0$ -точка минимума функции $-\tilde{\varphi}(0,x)$) можно получить более простые, но более грубые оценки. Однако нередко они будут достаточно эффективны (см., например, следствие 2).

Доказательство следует из соотношений:

$$\alpha \geq -\sup_{z\in B_0\times D} \tilde{\tilde{\varphi}}(0,z) - \int_0^T \sup_{z\in B(t)} R(t,z,\tilde{\tilde{\varphi}})dt \,,$$

$$\mathcal{J}(\tilde{z}_0) = -\tilde{\tilde{\varphi}}(0,\tilde{z}_0) - \int_0^T R(t,\tilde{z}(t),\tilde{\tilde{\varphi}})dt \,,$$

где функция $\tilde{z}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4) при начальном условии $z(0)=\tilde{z}_0$.

Заметим, что оценки (I7–I8) существенно зависят от множества $\mathcal{D}$. Наиболее простые и грубые соотношения получаются в случае, если множество $\mathcal{D}$ состоит лишь из одного элемента $\delta\varphi = 0$. Если множеством $\mathcal{D}$ является все множество дифференцируемых функций $\delta\varphi(t,z)$, подчиняющихся условию $\delta\varphi(T,z) = 0$, то неравенства (I9) превращаются в равенства, а правая часть в неравенстве (I7) совпадает с величиной $\sup\limits_{z_0\in B_0\times D}(\mathcal{J}(z_0)+\tilde{\varphi}(0,z))$ (аналогично правая часть в неравенстве (I8) совпадает с величиной $\inf\limits_{z_0\in B_0\times D}(\mathcal{J}(z_0)+\tilde{\varphi}(0,z_0))$. Последнее утверждение следует из того, что в этом случае функцию $\delta\varphi$ достаточно выбрать из условий:

$$R(t,z,\tilde{\tilde{\varphi}})=0, \quad \delta\varphi(T,z)=0, \tag{20}$$

которые представляют собой задачу Коши для неоднородного линейного уравнения в частных производных первого порядка.

§ 2. Метод малого параметра

Пусть система дифференциальных уравнений (I) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = f^{\circ}(t,y,\rho) + \varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i g^i(t,y,\rho), \; \varepsilon>0 \;\ldots \tag{I^x}$$

Здесь предполагается сходимость ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i g^i$.

Один из известных методов приближенного аналитического решения уравнений (I^x) состоит в представлении решения в виде полинома по малому параметру

$$y(t) \cong y^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j y^j(t)\,, \tag{2I}$$

в нахождении функций $y^j(t)$ из соотношений, получающихся из (I^x) путем подстановки в него функции $y(t)=y^{(n)}(t)$ и приравнивания нулю коэффициентов при ε^j, $j = 0,\ldots,n$.[ж)]

Наша задача состоит в получении оценок точности приближенного аналитического решения (2I). Предварительно изложим метод малого параметра в удобном для этого виде.

Введем m функционалов над множеством непрерывных функций $z(\tau)$, $\tau\in[0,t]$ типа функционала (7).

$$L_i = y_i(t)+\varphi_i(t,z(t)) - \varphi_i(0,z_0) - \int_0^t R_i(\tau,z(\tau),\varphi_i)d\tau, \; i=1,\ldots,m\,,$$

где

$$R_i(\tau,z,\varphi_i) = \varphi_{iy}(\tau,z)(f^{\circ}(\tau,z)+\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i g^i(\tau,z)) + \varphi_{i\tau}(\tau,z)\,.$$

Рассмотрим m задач Коши.

$$R_i(\tau,z,\varphi_i)=0, \quad \varphi_i(t,z)=-y_i\,, \quad i=1,\ldots,m\,.$$

Приближенное решение каждой из них будем искать методом разложения по параметру ε.

$$\varphi_i(\tau,z) \cong \varphi_i^{(n)}(\tau,z) = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\varphi_i^j(\tau,z)\,,$$

где функции $\varphi_i^j(\tau,z)$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{gathered} \varphi_{iy}^{\circ} f^{\circ} + \varphi_{i\tau}^{\circ} = 0, \quad \varphi_i^{\circ}(t,z) = -y_i\,, \\ \varphi_{iy}^{j} f^{\circ} + \varphi_{i\tau}^{j} + \sum_{l=0}^{j-1}\varphi_{iy}^{(j-1-l)} g^l = 0, \quad \varphi_i^j(t,z)=0, \\ i=1,\ldots,m\,, \quad j=1,\ldots,n\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Тогда

$$y_i^{(n)}(t) = -\sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j\varphi_i^j(0,z_0)\,, \quad i=1,\ldots,m\,. \tag{23}$$

ж) Отметим, что задача получения приближенного аналитического вида функционала (6) методом малого параметра сводится к последней путем введения дополнительной фазовой координаты.

Оценки точности n -го приближения (23) могут быть получены как следствие теорем I, 2.

СЛЕДСТВИЕ I.

$$y_i(t)-y_i^{(n)}(t)\le \varepsilon^{n+1}\Big(-\inf_{z\in B_0\times P}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k}(0,z)+\varepsilon^{s}M_i^{n+s}(t)\Big), \qquad (24)$$

$$y_i(t)-y_i^{(n)}(t)\ge \varepsilon^{n+1}\Big(-\sup_{z\in B_0\times P}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k}(0,z)+\varepsilon^{s}S_i^{n+s}(t)\Big),$$

$$i=1,\dots,m,$$

где

$$M_i^{n+s}(t)=\int_0^t\sup_{z\in B(\tau)}K_i^{n+s}(\tau,z)\,d\tau,$$

$$S_i^{n+s}(t)=\int_0^t\inf_{z\in B(\tau)}K_i^{n+s}(\tau,z)\,d\tau,$$

$$K_i^{n+s}(\tau,z)=-\sum_{k=0}^{n+s}\varphi_{iy}^{k}(\tau,z)\overline{\sum_{l=n+s-k}}\varepsilon^{l-n-s+k}g^{l}(\tau,z),$$

Функции $\varphi_i^{n+k}(\tau,z)$ определяются из соотношений:

$$\varphi_{iy}^{n+k}f^{0}+\varphi_{i\tau}^{n+k}+\sum_{l=0}^{n+k-1}\varphi_{iy}^{(n+k-l-1)}g^{l}=0,\quad \varphi_i^{n+k}(t,y)=0,$$

$$k=1,\dots,s,$$

$s>0$ - целое число.

При $s=0$ соотношения (23) остаются справедливыми, если положить

$$\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k}=0\quad\text{при}\quad s=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соотношениях (I7), (I8) положим

$$F(z)=-y_i,\ \tilde\varphi=\varphi_i^{(n)},\ \delta\varphi=\varepsilon^{n+1}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k},\ i=1,\dots,m. \qquad (25)$$

СЛЕДСТВИЕ I*.

$$y_i(t)-y_i^{(n)}(t)\le\varepsilon^{n+1}\inf_{\delta\varphi_i\in\mathcal{D}}\Big\{\sup_{z\in B_0\times P}\delta\varphi_i(0,z)+\int_0^t\sup_{z\in B(\tau)}\big[R_i(\tau,z,\delta\varphi_i)+K_i^{n}(\tau,z)\big]d\tau\Big\},$$

$$y_i(t)-y_i^{(n)}(t)\ge\varepsilon^{n+1}\sup_{\delta\varphi_i\in\mathcal{D}}\Big\{\inf_{z\in B_0\times P}\delta\varphi_i(0,z)+\int_0^t\inf_{z\in B(\tau)}\big[R_i(\tau,z,\delta\varphi_i)+K_i^{n}(\tau,z)\big]d\tau\Big\},$$

$$i=1,\dots,m.$$

Для доказательства достаточно положить в теореме I:

$$F(z)=-y_i,\quad \tilde\varphi=\varphi_i^{(n)},\quad i=1,\dots,m,$$

а вместо $\delta\varphi$ писать $\varepsilon^{n+1}\delta\varphi$.

На основе следствия I*, очевидно, может быть построен алгоритм численного нахождения оценок точности n -го приближения, если взять множество $\mathcal{D}$ состоящим из элементов (I6).

Обозначим:

$$d_i(t)=\inf_{z_0\in B_0\times P}y_i(t,z_0),\quad i=1,\dots,m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Пусть в точках $\tilde z_0^{(ni)}$, (i = I,...,m) достигаются минимумы функций $-\varphi_i^{(n)}(0,z)$ (i = I,...,m) при $z\in B_0\times P$.

Тогда имеют место неравенства:

$$y_i(t,\tilde z_0^{(ni)})-d_i(t)\le E_j^{(is)},\quad j=1,2,$$

где

$$E_1^{(is)}=\varepsilon^{n+1}\Big[\sup_{z\in B_0\times P}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k}(0,z)-\sum_{k=1}^{s}\varepsilon^{k-1}\varphi_i^{n+k}(0,z_0^{(ni)})+\varepsilon^{s}\big(M_i^{n+s}(t)-S_i^{n+s}(t)\big)\Big],$$

$$E_2^{(is)} = y_i(t, z_o^{(ni)}) + \sup_{z \in B_o \times D} \varphi_i^{(n+s)}(0,z) +$$

$$+ \varepsilon^{s+n+1} M_i^{n+s}(t),$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{k-1} \varphi_i^{n+k}(0,z) = 0, \quad \text{при} \quad s = 0.$$

Доказательство следует из теоремы 2, если положить выполненными соотношения (25), и учесть, что

$$\sup_{z \in B_o \times D} \varphi_i^{(n+s)}(0,z) \leq \varphi_i^{(n)}(0, \tilde z_o^{(ni)}) + \varepsilon^{n+1} \sup_{z \in B_o \times D} \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{k-1} \varphi_i^{n+k}(0,z).$$

СЛЕДСТВИЕ 2*. В условиях следствия 2 имеют место неравенства:

$$y_i(t, \tilde z_o^{(ni)}) - d_i(t) \leq \inf_{\delta\varphi \in D} E_j^i, \quad j = 1, 2,$$

где

$$E_1^i = \sup_{z \in B_o \times D} (\varphi_i^{(n)}(0,z) + \delta\varphi(0,z)) - \varphi_i^{(n)}(0, \tilde z_o^{(ni)}) +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} \int_0^t \Big(\sup_{z \in B(\tau)} \big[R_i(\tau, z, \delta\varphi_i) + K_i^n(\tau, z)\big] - \inf_{z \in B(\tau)} \big[R_i(\tau, z, \delta\varphi_i) +$$

$$+ K_i^n(\tau, z)\big]\Big) d\tau,$$

$$E_2^i = y_i(t, \tilde z_o^{(ni)}) + \sup_{z \in B_o \times D} (\varphi_i^{(n)}(0,z) + \delta\varphi_i(0,z)) +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} \int_0^t \sup_{z \in B(\tau)} \big[R_i(\tau, z, \delta\varphi_i) + K_i^n(\tau, z)\big] d\tau.$$

ПРИМЕР 2. $\mathcal{J} = \int_0^T y^2 dt,$

$$\frac{dy}{dt} = py - \varepsilon \frac{p^3}{y} e^{-\varepsilon^2 y^2}, \quad y(0) = y_o, \ \varepsilon > 0, \qquad (*)$$

$$0 \leq y_o \leq y_{om}, \qquad 0 \leq p \leq p_m,$$

где T, y_{om}, p_m – фиксированные положительные числа.

При $\varepsilon = 0$ зависимость $\mathcal{J} = \mathcal{J}^o(y_o, p)$ находится просто. Функция $\tilde\varphi$, соответствующая этому случаю, дается формулой

$$\tilde\varphi = \frac{y^2}{2p}(1 - e^{2p(T-t)}).$$

Тогда

$$\mathcal{J}^o = -\tilde\varphi(0, y_o, p).$$

Имеем

$$R(\tilde\varphi) = \varepsilon z(t,p) e^{-\varepsilon^2 y^2},$$

где

$$z(t,p) = -p^2(1 - e^{2p(T-t)}),$$

и

$$\tilde\varphi(0, y_o, p) + \mathcal{J}(y_o, p) = -\varepsilon \int_0^T z(t,p) e^{-\varepsilon^2 y^2(t)} dt,$$

где $y(t)$ удовлетворяет условиям (*).

Отсюда

$$|\tilde\varphi(0, y_o, p) + \mathcal{J}(y_o, p)| \leq \varepsilon \int_0^T z(t, p_m) dt.$$

Также имеет место оценка (теорема 2):

$$\mathcal{J}(\tilde y_o, \tilde p) - d \leq \varepsilon \int_0^T z(t, p_m) dt.$$

Более тонкие оценки могут быть получены следующим образом. Пусть

$$\tilde{\tilde\varphi} = \tilde\varphi + \varepsilon \alpha(t,p) e^{-\varepsilon^2 y^2},$$

где

$$\alpha(t,\rho)=\int_0^T z(\tau,\rho)d\tau .$$

Тогда

$$R(\tilde{\varphi})=-2\varepsilon^3 e^{-\varepsilon^2 y^2}\alpha(t,\rho)(\rho y^2+\rho^3 e^{-\varepsilon^2 y^2}),$$

$$\sup_{y_0,\rho} R(\tilde{\varphi})=0 ,$$

$$\inf_{y_0,\rho} R(\tilde{\varphi})=-2\varepsilon^3\alpha(t,\rho)(\rho_m\bar{x}(t)+\rho_m^3),$$

где $\bar{x}(t)=y_{om}^2 e^{2\rho_m t}$.

Здесь использованы соотношения:

$$y^2(t)\leqslant x(t)\leqslant\bar{x}(t),$$

где $\frac{dx}{dt}=2\rho x$, $x(0)=y_{om}^2$.

Оценки имеют вид:

$$|\tilde{\varphi}(0,y_0,\rho)+J(y_0,\rho)|\leqslant\varepsilon E,$$

$$J(\tilde{y}_0,\tilde{\rho})-d\leqslant\varepsilon E,$$

где

$$E=\alpha(0,\rho_m)+2\varepsilon^2\int_0^T\alpha(t,\rho_m)(\rho_m\bar{x}(t)+\rho_m^3)dt .$$

§ 3. Некоторые обобщения

Полученные результаты могут быть распространены на случай функционала

$$J=\int_0^L\int_0^T F(t,x,v(t,x),\rho)dt\,dx , \tag{26}$$

заданного на множестве решений системы

$$v_t=f ,\ f=\sigma(t,x,\rho)v_x+w(t,x,v,\rho), \tag{27}$$

$$v(0,x)=v_0(x) \quad \text{при} \quad x\in[0,L] ,$$

$$v(t,0)=v^0(t) \quad \text{при} \quad t\in[0,T] ,$$

где $\rho=\{\rho_1,\dots,\rho_k\}$ – параметр из ограниченной области P k-мерного евклидова пространства, $v=v(t,x)$, $W=W(t,x,v,\rho)$ – m-мерные вектор-функции, функция W непрерывна, $\sigma(t,x,\rho)\geqslant 0$ при $t>0$, $x>0$, $\sigma(0,0,\rho)>0$ – скалярная функция, непрерывная по всем своим аргументам и дифференцируемая по x. $v_0(x)$, $v^0(t)$ – кусочно-непрерывные функции со значениями из областей $V_0(x)$, $V^0(t)$ m-мерного евклидова пространства.

Обозначим Ω множество элементов $\omega=(\rho,v_0(x),v^0(t))$, где параметр ρ и функции $v_0(x)$, $v^0(t)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, $V(t,x)$ – область, содержащую все решения системы (27) при $\omega\in\Omega$.

Система (27) каждому элементу $\omega\in\Omega$ ставит в соответствие единственную кусочно-непрерывную вектор-функцию $v(t,x)$ с разрывами на характеристиках, т.е. линиях, определяемых уравнением $\frac{dx}{dt}=\sigma(t,x,\rho)$. Производные v_x понимаются здесь как обобщенные функции.

Введем функционал L_1, родственный функционалу (7),

$$L_1=\Phi-\int_0^L\int_0^T R\,dt\,dx ,$$

где

$$\Phi=\int_0^L(\varphi(T,x,v(T,x),\rho)-\varphi(0,x,v_0(x),\rho))dx ,$$

$$R=\varphi_v f-F+\varphi_t ,$$

$\varphi=\varphi(t,x,v,\rho)$ – обозначает, как и прежде, произвольную дифференцируемую функцию.

ЛЕММА. Если функция φ удовлетворяет условиям

$$R_1=0 ,\quad \varphi(T,x,v,\rho)=0, \tag{28}$$

$$\varphi(t,L,v,\rho)=0, \tag{29}$$

где

$$R_1=\varphi_t+\varphi_v w-\varphi_x\sigma-\varphi\sigma_x-F ,$$

то функционал (26) может быть представлен в виде

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\varphi), \tag{30}$$

где

$$\mathcal{J}(\varphi) = -\int_0^L \varphi(0,x,v_0(x),\rho)\,dx + \int_0^T \sigma(t,0,\rho)\ \varphi(t,0,v^0(t),\rho)\,dt .$$

Для доказательства достаточно заметить [3], что

$$\int_0^L R\,dx = \sigma\,\varphi\Big|_0^L + \int_0^L R_1\,dx \text{ *)}. \tag{31}$$

Из леммы следует, что для аппроксимации функционала может быть применен метод, аналогичный изложенному в § I. Для нахождения функции $\tilde{\varphi}$, удовлетворяющей приближенно соотношениям (28), (29), можно пользоваться способами, изложенными в § I, если брать функции ψ^i (или A_i) такими, чтобы было выполнено условие (29).

Приведем теоремы, являющиеся аналогом теорем I и 2. Пусть

$$\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(\tilde{\varphi}),\quad \tilde{\tilde{\mathcal{J}}} = \mathcal{J}(\tilde{\tilde{\varphi}}),\quad \delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(\delta\varphi),$$

$\mathcal{D}^*$ – множество, состоящее из дифференцируемых функций $\delta\varphi = \delta\varphi(t,x,v,\rho)$, удовлетворяющих условиям:

$$\delta\varphi(T,x,v,\rho) = 0,\quad \delta\varphi(t,L,v,\rho) = 0 .$$

ТЕОРЕМА I*. Для любого элемента $\omega\in\Omega$ справедливы неравенства

$$\mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}} \le -\sup_{\delta\varphi\in\mathcal{D}^*} h,\qquad \mathcal{J} - \tilde{\mathcal{J}} \ge \inf_{\delta\varphi\in\mathcal{D}^*} H,$$

где

$$h = -\sup_{\omega\in\Omega} \delta\mathcal{J} + \int_0^L\!\!\int_0^T \inf_{\substack{v\in V(t,x)\\ \rho\in P}} R_1(t,x,v,\rho;\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt\,dx ,$$

$$H = -\inf_{\omega\in\Omega} \delta\mathcal{J} + \int_0^L\!\!\int_0^T \sup_{\substack{v\in V(t,x)\\ \rho\in P}} R_1(t,x,v,\rho;\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt\,dx ,$$

---

*) Отметим, что если $v_0(0) \ne v^0(0)$, то функция $\varphi(t,x,\rho) = \varphi(t,x,v(t,x),\rho)$ является неопределенной в точке $(t=0$, $x=0)$, однако для формулы (30), очевидно, это несущественно.

ТЕОРЕМА 2*. Пусть на элементе $\tilde{\omega}$ достигается минимум функционала $\tilde{\mathcal{J}}$ на множестве Ω, а d – минимальное значение функционала $\mathcal{J}$. Тогда имеют место неравенства

$$\mathcal{J}(\tilde{\omega}) - d \le \inf_{\delta\varphi\in\mathcal{D}^*} \Pi_j ,\quad j = 1,2 ,$$

где

$$\Pi_1 = -\inf_{\omega\in\Omega} \tilde{\tilde{\mathcal{J}}} + \tilde{\tilde{\mathcal{J}}}(\tilde{\omega}) + \int_0^L\!\!\int_0^T \Big(\sup_{\substack{v\in V(t,x)\\ \rho\in P}} R_1(t,x,v,\rho;\tilde{\tilde{\varphi}}) - \inf_{\substack{v\in V(t,x)\\ \rho\in P}} R_1(t,x,v,\rho;\tilde{\tilde{\varphi}})\Big)\,dt\,dx ,$$

$$\Pi_2 = \mathcal{J}(\tilde{\omega}) - \inf_{\omega\in\Omega} \tilde{\tilde{\mathcal{J}}} + \int_0^L\!\!\int_0^T \sup_{\substack{v\in V(t,x)\\ \rho\in P}} R_1(t,x,v,\rho;\tilde{\tilde{\varphi}})\,dt\,dx .$$

Доказательство может быть выполнено по той же схеме, что и доказательство теорем I и 2. Естественная разница состоит в том, что вместо функционала (7) используется функционал , преобразованный согласно соотношению (31).

Аналогично § 2 из теорем I*, 2* можно получить оценки точности приближенного представления функционала (26) по методу малого параметра в случае, если функции F, σ, w являются степенными рядами по малому параметру.

Отметим, что после этого остается нерешенной задача оценки точности приближенного решения уравнений (27) по методу малого параметра, т.е. она не сводится к оценке функционала вида (26). В том частном случае, когда функция σ не зависит от малого параметра (т.е. положение характеристик не зависит от малого параметра), эта задача может быть сведена к аналогичной для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dv}{dt} = w(\tau,x,v,\rho;\varepsilon),\quad \frac{dx}{dt} = \sigma(\tau,x),\quad \frac{d\tau}{dt} = 1 ,$$

причем множество $B_\circ$ для начального вектора ($v_\circ^\circ$, $x_\circ$, $\tau_\circ$) задается так:

$$v_\circ^\circ = v_\circ(x_\circ),\ v_\circ(x_\circ) \in V_\circ(x_\circ) \text{ при } x_\circ \in [0, L],\ \tau_\circ = 0,$$
$$v_\circ^\circ = v^\circ(\tau_\circ),\ v_\circ(\tau_\circ) \in V^\circ(\tau_\circ) \text{ при } x_\circ = 0,\ \tau_\circ \in [0, T].$$

В заключение отметим, что изложенные результаты без труда переносятся на следующую задачу

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^T F(t, x, v(t,x), \rho)\, dt\, dx,$$

где функция F достаточно быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$, $v(t,x)$ подчиняется уравнению (27) при дополнительном условии

$$v(0,x) = v_\circ(x),\ v_\circ(x) \in V_\circ(x),\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Условие неотрицательности функции σ можно опустить.

Действительно, условия (28) в этом случае однозначно определяют функцию φ , стремящуюся к нулю при $|x| \to \infty$. После этого очевидно, что в теоремах I", 2" следует положить φ (t , 0, v , ρ) = 0 и проводить интегрирование по x в пределах $(-\infty, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф. КРОТОВ. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. I. - Автоматика и телемеханика, 1962, т.XXIII, № 12.
2. В.Ф. КРОТОВ. Приближенный синтез оптимального управления. - Автоматика и телемеханика, 1964, т.XXV, № 11.
3. Я. МИКУСИНСКИЙ и Р. СИКОРСКИЙ. Элементарная теория обобщенных функций. М., 1959.

Поступила в редакцию
16. IV. 1969 г.