УДК 681.142.6:512.95

ПРАВИЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Н.А. Абрамова

Наряду с однородными логическими сетями, в которых элементы одинаково соединены между собой [1], в качестве вычислительных сред можно использовать сети с неполностью однородной, периодически повторяющейся структурой, названные в [2] итеративными. В таких сетях могут чередоваться или типы элементов, или способы их включения в сеть, или то и другое вместе.

Интерес к итеративным средам обусловлен тем, что требование однородности на возможно более низком уровне организации устройств, продиктованное особенностями микроэлектронной технологии, не всегда согласуется с методами реализации функций на средах. Чередование нескольких типов элементов или их связей может расширить функциональные возможности среды, упростить алгоритм настройки или удешевить реализацию функций на среде.

Итеративная сеть характеризуется тем, что её можно разбить на подсети таким образом, что полученная сеть над множеством укрупненных элементов однородна. Такое разбиение сети мы будем называть правильным разбиением*).

Задача анализа правильных разбиений возникает в тех случаях, когда приходится рассматривать одну и ту же вычислитель-

*) Формальное определение этого понятия будет дано ниже.

ную среду на разных уровнях организации, причем на таких, на которых структура сети однородна, например, при моделировании высокопараллельных машин на однородных средах с простыми элементами, в задачах локального резервирования в средах [3] и др.

В [I] структура однородных логических сетей изучается с помощью анализа их групп автоморфизмов. Этот же путь, принятый в настоящей работе, позволяет не только формально определить понятие правильного разбиения логической сети, а через него – понятие итеративной сети, но и дает возможность описать все возможные правильные разбиения произвольной сети и дать методику их построения.

В первой части статьи даются основные определения и классификация структуры логических сетей, а во второй – приводится теорема, описывающая получение всевозможных правильных разбиений сети по группе её автоморфизмов.

I. Пусть А – конечный автомат [4]. Подстановку на множестве полюсов автомата будем называть д о п у с т и м о й п о д с т а н о в к о й п о л ю с о в а в т о м а т а [I], если ограниченно-детерминированный оператор, реализуемый автоматом, в результате подстановки не меняется. Точно так же определяется допустимая подстановка для пары одинаковых автоматов.

Пусть L – логическая сеть[ж)] [4].

А в т о м о р ф и з м о м с е т и L называется такая подстановка на множестве элементов сети, при которой отождествленные полюса элементов отображаются на отождествленные, и подстановка полюсов каждого элемента на полюса элемента, в который он отображается, является допустимой.

Множество автоморфизмов сети образует группу относительно операции умножения (последовательного выполнения) автоморфизмов[жж)].

Сеть называется о д н о р о д н о й, если для любой пары ее элементов существует автоморфизм, переводящий первый из

ж) В дальнейшем логическую сеть будем называть просто сетью.

жж) Все использованные в работе сведения из теории групп можно найти в [5].

элементов во второй, другими словами: если группа автоморфизмов транзитивно действует на множестве элементов сети.

Разобьем множество M элементов сети L на непересекающиеся подмножества M_i, $M_i \cap M_j = \varnothing$; $\cup M_i = M$. Назовем подсетью L_i разбиения $\mathcal{Z}(L)$ сети L сеть над множеством M_i такую, что:

I) полюса элементов $A_1, A_2 \in M_i$ отождествлены в L_i тогда и только тогда, когда они отождествлены в L;

2) входными полюсами L_i являются те полюса элементов из M_i, которые отождествляются с выходными полюсами других подмножеств разбиения $M_j \neq M_i$ или являются входными полюсами сети L;

3) выходные полюса определены аналогично.

Назовем э л е м е н т о м $\mathfrak{A}_i$ ф а к т о р - с е т и $\Phi(L, \mathcal{Z})$ элемент, определенный следующим образом:

I) состояние элемента $\mathfrak{A}_i$ есть набор состояний элементов из M_i;

2) множествами входных и выходных полюсов элемента $\mathfrak{A}_i$ являются множества входных и выходных полюсов подсети L_i;

3) ограниченно-детерминированный оператор элемента $\mathfrak{A}_i$ есть ограниченно-детерминированный оператор подсети L_i.

Сеть $\Phi(L, \mathcal{Z})$ над множеством $\{\mathfrak{A}_i\}$ элементов, соответствующих всем подсетям разбиения $\mathcal{Z}(L)$, полюса которых отождествлены в Φ тогда и только тогда, когда они отождествлены в L, назовем ф а к т о р - с е т ь ю сети L по разбиению $\mathcal{Z}(L)$.

Разбиение $\mathcal{Z}(L)$ сети L назовем т р и в и а л ь н ы м, если оно максимально, т.е. содержит один единственный элемент – всю сеть, или минимально, т.е. каждое множество разбиения содержит в точности один элемент. В последнем случае фактор-сеть, очевидно, совпадает с самой сетью.

Автоморфизм g фактор-сети $\Phi(L, \mathcal{Z})$ назовем д о п у с т и м ы м для L, если для любых ее элементов $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$ таких, что $g(\mathfrak{A}_i) = \mathfrak{A}_j$, отображение множества полюсов $\mathfrak{A}_i$ на множество полюсов $\mathfrak{A}_j$ определяет изоморфизм сети L_i на L_j[ж)].

ж) Сеть L_1 изоморфна сети L_2, если существует отображение g множества элементов сети L_1 на множество элементов сети L_2, при котором: I) для каждого элемента A из L_1 отображение его полюсов в полюса элемента gA из L_2 есть изоморфизм A на gA; 2) отождествленные полюса в L_1 переходят в отождествленные полюса в L_2.

Иными словами, автоморфизм g фактор-сети $\Phi(L, \mathcal{Z})$ допустим для L, если существует автоморфизм g сети L такой, что подстановка полюсов L, являющихся внешними для подсетей $L_i \in \mathcal{Z}$, определяется автоморфизмом g.

Разбиение $\mathcal{Z}(L)$ сети L назовем **п р а в и л ь н ы м р а з б и е н и е м**, если для любой пары элементов α_i, α_j фактор-сети $\Phi(L, \mathcal{Z})$ существует автоморфизм g, $g(\alpha_i) = \alpha_j$, допустимый для L.

Если разбиение $\mathcal{Z}(L)$ правильно, то фактор-сеть $\Phi(L,\mathcal{Z})$ однородна, однако обратное в общем случае не обязательно справедливо, поскольку изоморфизм элементов α_i, α_j означает лишь изоморфизм операторов элементов, но не сетей L_i, L_j, реализующих эти операторы.

Всякая сеть L обладает, по крайней мере, одним правильным разбиением – максимальным.

П о д р а з б и е н и е м сети L относительно разбиения $\mathcal{Z}(L)$ назовем такое разбиение $\mathcal{Z}'(L)$, не совпадающее с $\mathcal{Z}(L)$, что множество M_i' элементов любой подсети $L_i' \in \mathcal{Z}'(L)$ содержится в множестве M_j элементов некоторой подсети $L_j \in \mathcal{Z}(L)$: $M_i' \subseteq M_j$.

Правильное разбиение $\mathcal{Z}(L)$ назовем **н а и м е н ь ш и м п р а в и л ь н ы м р а з б и е н и е м**, если не существует правильного разбиения $\mathcal{Z}'(L)$, которое было бы подразбиением разбиения $\mathcal{Z}(L)$.

П о р я д к о м правильного разбиения назовем число элементов в подсети разбиения.

Если минимальное разбиение сети правильно, то сеть однородна. Напротив, если единственным (наименьшим) правильным разбиением является максимальное разбиение, в сети вообще отсутствует периодическая повторяемость структуры.

Сеть будем называть **и т е р а т и в н о й**, если любое из её наименьших правильных разбиений не тривиально.

Для того, чтобы сеть была итеративной, достаточно, чтобы существовало, по крайней мере, одно нетривиальное наименьшее правильное разбиение*).

Таким образом, с точки зрения периодической повторяемости структуры сети можно разбить на три класса: однородные (рис. Iа), итеративные (рис. Iб) и сети, в которых периодическая повторяемость вообще отсутствует (рис. Iв).

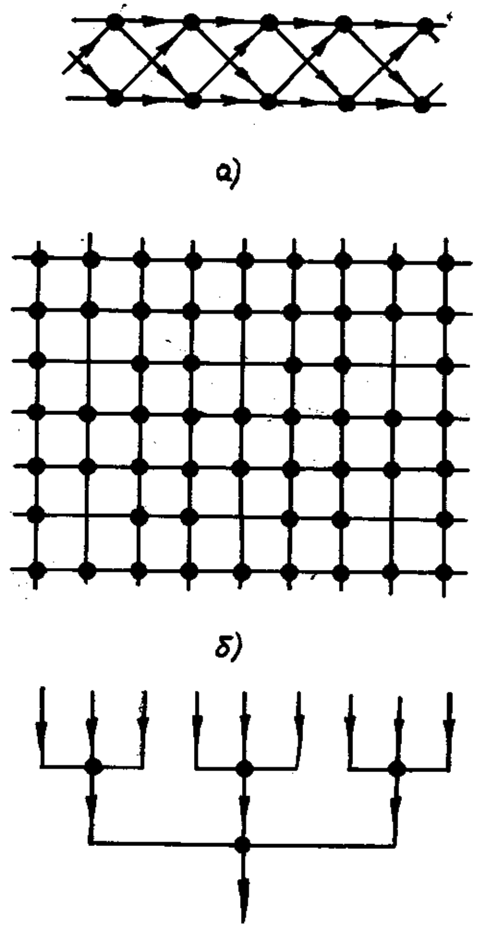

Рис. I.

Для того, чтобы сеть была однородной или итеративной, необходимо, чтобы для любого из элементов сети множество автоморфизмов сети, переводящих этот элемент в себя, не совпадало со всей группой сети.

II. Все возможные правильные разбиения сети могут быть получены, если рассмотреть для каждой из подгрупп группы сети разбиение множества элементов сети на системы транзитивности (т.е. множества элементов, переводимые друг в друга элементами этой подгруппы) и далее рассмотреть действие подгруппы как транзитивной группы подстановок на каждой из систем транзитивности. Результаты этого анализа представляет следующая

ТЕОРЕМА. **С е т ь L о б л а д а е т н е м а к с и м а л ь н ы м п р а в и л ь н ы м р а з б и е н и е м $\mathcal{Z}(L)$ т о г д а и т о л ь к о т о г д а, к о г д а в г р у п п е а в т о м о р ф и з м о в с е т и $G(L)$ с у щ е с т в у ю т п о д г р у п п ы H_0, H,**

---

*) Доказательство этого и последующих утверждений, если они просты, для краткости опускаем.

$$H_0 \subset H \subseteq G(L)$$

такие, что для некоторого элемента $A_{0,\alpha}$ из каждой системы транзитивности $M_\alpha(H)$ по подгруппе H справедливо

$$H_{A_c} \subseteq H_0 ,$$

где H_{A_0} – подгруппа автоморфизмов из H, переводящих $A_{0,\alpha}$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}(L)$ – немаксимальное правильное разбиение сети L. Тогда в группе $G(L)$ содержится подгруппа H $(H \subseteq G(L))$ автоморфизмов, сохраняющих разбиение $\mathcal{L}(L)$, т.е. переводящих всякую подсеть разбиения в подсеть того же разбиения. При этом для любых подсетей L_i, $L_j \in \mathcal{L}(L)$, существует автоморфизм $g \in H$, переводящий L_i в L_j. Поскольку по условию в разбиении $\mathcal{L}(L)$ содержится более одной подсети, группа H_0 автоморфизмов из H, переводящих в себя некоторую подсеть L_0 разбиения $\mathcal{L}(L)$, не совпадает с $H: H_0 \subset H$.

Для каждого элемента A множества M_0 сети L_0 группа H_{A_0} автоморфизмов из H, переводящих A_0 в себя, содержится в H_0. Но из правильности разбиения следует, что в M_0 содержатся элементы каждой системы транзитивности $M_\alpha(H)$, откуда вытекает

$$H_{A_0} \subseteq H_0$$

по всем $M_\alpha(H)$. Прямая теорема доказана.

Пусть теперь H, H_0 – подгруппы группы $G(L)$, удовлетворяющие условиям обратной теоремы, и пусть $\widetilde{M}_0$ – множество элементов сети, содержащее по одному элементу $A_{0,\alpha}$ из каждой системы транзитивности $M_\alpha(H)$, удовлетворяющему условию теоремы

$$H_{A_c} \subseteq H_0 .$$

Разобьем множество M элементов сети на непересекающиеся подмножества, отнеся к одному множеству M_i все те элементы сети, в которые множество $\widetilde{M}_0$ переводится автоморфизмами, принадлежащими одному левому смежному классу группы H по подгруппе H_0. Построим разбиение $\mathcal{L}(L)$ сети L, соответствующее этому разбиению множества M. Покажем теперь, что все автоморфизмы из H сохраняют разбиение $\mathcal{L}(L)$. Для этого достаточно рассмотреть действие группы H на каждой из систем транзитивности $M_\alpha(H)$.

Пусть группа автоморфизмов из H, переводящих $A_{0,\alpha}$ в себя, совпадает с H_0:

$$H_{A_0} = H_0 .$$

Тогда каждому элементу $A_{i,\alpha}$ можно поставить в соответствие множество элементов из H, которые переводят $A_{0,\alpha}$ в $A_{i,\alpha}$ и которые, как известно [5], образуют в группе H левый смежный класс по H_0. При этом всякий автоморфизм $h \in H$ переводит $A_{i,\alpha}$ в тот элемент $A_{j,\alpha}$, который соответствует классу

$$h_j H_0 = h \cdot h_i H_0 .$$

Пусть теперь $A_0 \in M_\beta$ и $H_{A_0} \subset H$. Тогда H действует на системе транзитивности M_β как импримитивная группа подстановок. При этом в одной системе импримитивности находятся все элементы сети, в которые A_0 переводится автоморфизмами из одного левого смежного класса H по H_0. Действие группы на системы импримитивности аналогично рассмотренному в предыдущем случае с той разницей, что каждому левому смежному классу по H_0 соответствует не один элемент, а некоторая система импримитивности [5]. Из сказанного следует, что автоморфизмы группы H сохраняют разбиение $\mathcal{L}$, причем для любых двух классов разбиения существует автоморфизм, переводящий первый класс во второй.

Поскольку каждому автоморфизму L, сохраняющему разбиение $\mathcal{L}$, соответствует (в смысле одинаковости подстановок на множестве $\{\alpha_i\}$) автоморфизм фактор-сети $\Phi(L,\mathcal{L})$, допустимый для L, разбиение $\mathcal{L}$ правильно. Теорема доказана.

Методика определения правильного разбиения по паре (H_0, H) видна из доказательства обратной теоремы. При решении практических задач, связанных с определением правильных разбиений, выбор множества $\widetilde{M}_0$ может диктоваться такими соображениями, как связность подсетей разбиения, получение фактор-сети с наибольшей группой и др.

Порядок z правильного разбиения, порождаемого парой подгрупп (H_0, H), определяется по формуле

$$r = |H_0| \sum_{M_\alpha \in \mathfrak{M}(H)} \frac{1}{|H_\alpha|},$$

где $\mathfrak{M}(H)=\{M_\alpha\}$ – множество систем транзитивности множества элементов сети по подгруппе H ; H_α – подгруппа автоморфизмов из H, оставляющих на месте некоторый элемент из M_α.

ПРИМЕР. На рис. 2а,б,в пунктиром показаны правильные разбиения сети, построенной из симметрических элементов двух типов (отмеченных на графе различными значками) с двусторонними связями. Группа сети порождается отражениями от вертикальных и горизонтальных осей, проходящих через центры граней графа. Разбиение рис. 2а порождается группой сети и подгруппой H_0 отражений от осей I–I и II–II. Множество M_0 состоит из элементов A, B. Разбиение рис. 2б порождается подгруппой параллельных переносов и единичной подгруппой H_0, а разбиение рис. 2в – подгруппой H, которая порождается всеми центральными симметриями группы $G(L)$, и подгруппой $H_0 = E$.

Сложность задачи нахождения правильных разбиений даже при известной группе сети существенно зависит от структуры сети и ее группы. Наиболее простыми в этом смысле являются сети, в группе которых имеются подгруппы специального вида: подгруппы переносов. Подгруппой переносов сети L будем называть такую подгруппу H ее группы $G(L)$, что для любого элемента сети единственным автоморфизмом из H, оставляющим на месте этот элемент, является тождественный автоморфизм, т.е. по всем

$$A_i \in M(L),$$

$$G_{A_i} \cap H = E,$$

где E – единичная подгруппа.

Для построения правильного разбиения по этой подгруппе (точнее, по паре (E, H)) можно в качестве элементов $\tilde{M}_0$ выбирать произвольных представителей каждой системы транзитивности, причем $\tilde{M}_0$ совпадает с одним из множеств разбиения M_0.

Всякая подгруппа H' подгруппы переносов H, очевидно, также является подгруппой переносов, и всякое разбиение $\mathcal{L}^H(L)$,

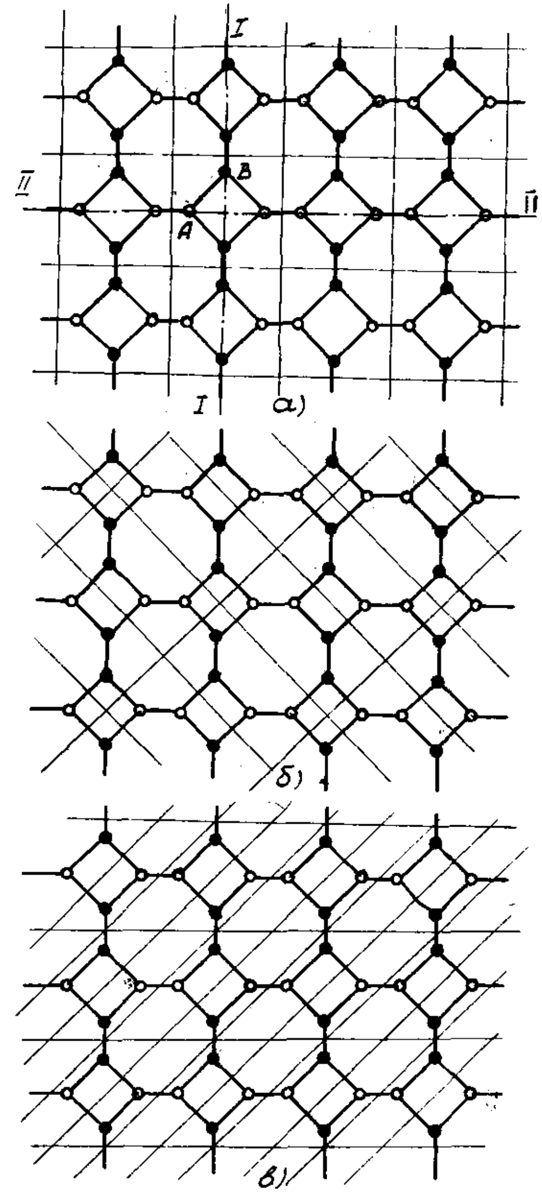

Рис. 2.

порождаемое подгруппой H, является подразбиением некоторого разбиения $\mathcal{L}^{H'}(L)$, порождаемого подгруппой H'.

Если в группе сети содержится абелева подгруппа переносов H с образующими бесконечного порядка (к таким сетям относятся все однородные и итеративные решетчатые среды) и порядок правильного разбиения по этой подгруппе равен $|M_0|$, то нетрудно показать, что могут быть построены правильные разбиения любого порядка $k|M_0|$ (где k – любое целое число), причем фактор-сети по этим разбиениям обладают подгруппой переносов, изоморфной H. К этому множеству разбиений принадлежат и все "клеточные" разбиения, т.е. такие, которыми граф сети разбивается на множество " клеток ", образующих решетку. Существование бесконечно большого числа правильных "клеточных" разбиений однородной среды позволяет моделировать на ней однородные среды с более сложными элементами.

Полученные результаты применимы не только в исследованиях однородных и итеративных сред. Они могут использоваться во всех задачах, где находят разбиения графа с отмеченными вершинами и концами ребер на одинаковые части, одинаково связанные между собой, например, в теории синтеза конечных автоматов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. АБРАМОВА. Однородные логические сети и их группы автоморфизмов. Автоматика и телемеханика, 1970, № 11.
2. И.В. ПРАНГИШВИЛИ. Итеративные и однородные планарные структуры и соответствующие им графы. Автоматика и телемеханика, 1968, № 5.
3. А.А. КОЙФМАН. Регулярное локальное резервирование и перестройка в вычислительных средах. Материалы научно-технической конференции, посвященной 75-летию со дня изобретения радио, секция вычислительной техники, Новосибирск, 1970.
4. Н.Е. КОБРИНСКИЙ, Б.А. ТРАХТЕНБРОТ. Введение в теорию конечных автоматов, Физматгиз, М., 1962.
5. ВАН-ДЕР-ВАРДЕН Б.Л. Современная алгебра, ч.1, Гостехиздат, 1947.

Поступила в редакцию
15.XI.1970г.