

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО БИКУБИЧЕСКИХ МНОГОЗВЕННИКОВ
И ЗАДАЧА СГЛАЖИВАНИЯ

И.С. Завьялов

Впервые вопрос об экстремальном свойстве бикубических многозвенников, интерполирующих значения z_{ij} на прямоугольной сетке узлов в прямоугольной области R , был поставлен Бриггофом и Гарабедяном [1]. Они предложили определять интерполяционный многозвенник так, чтобы минимизировался функционал

$$J[f] = \iint_R (f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2) dx dy.$$

Подынтегральное выражение является приближенным выражением суммы квадратов главных кривизн поверхности $z = f(x, y)$, и функционал оказывается естественным обобщением функционала для одной переменной. Однако экстремальной поверхностью в этом случае может быть только частный бикубический многозвенник, у которого $f_{x^2y^2} \equiv 0$ в области R . По этой причине указанный подход здесь не рассматривается.

В работах Альберга, Нильсона и Уолша [2,3] рассмотрен функционал

$$J[f] = \iint_R f_{x^2y^2}^2 dx dy$$

в классе функций $C^{2,2}(R)$, имеющих непрерывную смешанную производную $f_{x^2y^2}$, и показано, что минимум ему среди функций, интерполирующих множество значений z_{ij} , дает бикубический многозвенник. Однако в [2,3] ошибочно утверждается, что решение вариационной задачи при сделанных ограничениях единственно. Для единственности необходимы дополнительные условия. С другой стороны, функционал в [2,3], будучи определен через смешанную производную высокого порядка $f_{x^2y^2}$, не имеет геометрического смысла.

Нами исследован функционал

$$\mathcal{J}[f] = \iint_R (f_{xx}^2 + f_{yy}^2) dx dy,$$

отличающийся от функционала работы [1] отсутствием члена $2f_{xy}^2$ и представляющий собой приближенно интеграл от суммы квадратов кривизн поверхности в направлении координатных осей x и y . Оказалось, что для такого функционала обобщается экстремальное свойство, известное для функций одной переменной [3], и решение вариационной задачи единственно. Этому посвящен § 1.

В § 2 на основе установленного экстремального свойства бикубических многозвенников формулируется проблема сглаживания экспериментальных данных, определенных в узлах прямоугольной сетки, как задача о минимуме функционала

$$\mathcal{J}_n[f] = \mathcal{J}[f] + \sum_{ij} \rho_{ij} (f_{ij} - z_{ij}^0)^2$$

Она является обобщением задачи Шенберга [4] для одномерного случая. Показано, что при определенных ограничениях бикубический многозвенник является решением проблемы и притом единственным.

Два последних параграфа (§§3 и 4) касаются численного решения системы линейных уравнений задачи сглаживания. Система весьма сложная с матрицей клеточной структуры. Для её решения предлагается использовать итерационный попеременно-треугольный алгоритм А.А. Самарского. Дается изложение этого алгоритма для случая клеточных матриц более общих, чем положительно определенные.

Описывается возможный способ распараллеливания построенно-

го алгоритма и его реализации на однородной вычислительной системе.

§ 1. Экстремальное свойство интерполяционных бикубических многозвенников

Рассматривается плоская прямоугольная область $R [a \leq x \leq b; c \leq y \leq d]$. В области определен класс функций $\mathcal{H}^{2,2}(R)$, имеющих абсолютно непрерывные первые частные производные $f_x(x,y), f_y(x,y)$ и суммируемые с квадратами вторые частные производные.

Область R разделена на ячейки R_{ij} прямыми линиями $x=x_i, y=y_j$; где x_i и y_j — точки множеств

$$\Delta_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_N = b,$$

$$\Delta_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_M = d.$$

Будем рассматривать связанные с таким делением бикубические многозвенники. Они определяются своими значениями в точках (x_i, y_j) и граничными условиями четырех типов: I — IV [6].

Функции в классе $\mathcal{H}^{2,2}(R)$ будем объединять в подклассы. Функция $f(x,y)$ типа I', если её нормальные производные f_n (f_x или f_y) на границе Γ области R обращаются в нуль. Две функции принадлежат одному и тому же подклассу типа I, если их разность типа I'. Аналогично определяются подклассы типа II. Периодические по обоим переменным функции образуют подкласс $\mathcal{H}_\pi^{2,2}(R)$, если периоды равны $b-a$ и $d-c$ [3]. Добавим в рассмотрение смешанные подклассы, отвечающие различным из указанных условий на разных сторонах границы Γ или не имеющие условий на части сторон. Например, по одной из переменных заданы условия периодичности, а по другой заданы значения f_n . Подклассы, определяемые условиями типа I, периодичности, и, быть может, имеющие некоторые свободные границы, назовем типа I₁.

Бикубические многозвенники в классе $\mathcal{H}^{2,2}(R)$ образуют множество, зависящее от $(N+3)(M+3)$ параметров. В подклассах типа I и II число таких параметров $(N+1)(M+1)$, а в подклассе $\mathcal{H}_\pi^{2,2}(R)$ только NM . В подклассах типа I₁ число па-

параметров меньше $(N+3)(M+3)$, но больше NM .

В классе функций $\mathcal{H}^{2,2}(R)$ будем рассматривать функционал

$$\mathcal{J}[f] = \iint_R \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy, \quad (I.1)$$

где интеграл берется в смысле Лебега ([10], 4.6-15). Поставим задачу о нахождении минимума $\mathcal{J}[f]$ при условиях $f(x_i, y_j) = x_{ij}$, где x_{ij} — значения, заданные в узлах сетки $\Delta_x \Delta_y$ и, быть может, при граничных условиях.

В работах [3,7] было указано, что в случае функции одной переменной минимум функционалу $\mathcal{J}[f] = \int_a^b |f''(x)|^2 dx$, аналогичному (I.1), дает кубический многозвенник. Естественно поэтому потребовать, чтобы в сечениях экстремальной поверхности плоскостями $x=x_i, y=y_j$ лежали кубические многозвенники. Эти многозвенники имеют заданные граничные условия. Если же последние не фиксируются, то в соответствии с результатами для функций одной переменной будем полагать, что на конце вторая частная производная равна нулю.

Два семейства кубических многозвенников образуют сеть линий на поверхности. Для таких сетей введем такую же классификацию, как и для функций $f(x, y) \in \mathcal{H}^{2,2}(R)$. Будем различать сети типа I, I', II, II', периодические и смешанные, состоящие из семейств многозвенников разных типов.

Если на границах области заданы производные x_n , то предполагаем, что эти функции есть кубические многозвенники по соответствующим переменным.

ТЕОРЕМА I.1. Пусть в области R на множестве $\Delta_x \Delta_y$ заданы значения x_{ij} , определяющие сеть кубических многозвенников типа II'. Тогда среди функций $f(x, y)$ класса $\mathcal{H}^{2,2}(R)$, интерполирующих эту сеть, бикубический многозвенник $x = \mathcal{S}(x, y)$ минимизирует функционал $\mathcal{J}[f]$ (I.1).

Если $f(x, y)$ принадлежит одному из подклассов: а) типа I, б) $\mathcal{H}^{2,2}(R)$, в) типа I', то при интерполировании

сети соответствующего вида минимум функционалу даёт бикубический многозвенник одного с ней типа.

Функция, дающая минимум, единственна среди допустимых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функционал $\mathcal{J}[f]$ (I.1) ограничен снизу нулем, и его точная нижняя граница достигается в классе $\mathcal{H}^{2,2}(R)$. Для её нахождения поступим следующим образом. Если $S(x, y)$ и $f(x, y) \in \mathcal{H}^{2,2}(R)$, то можно записать

$$\mathcal{J}[f-S] = \mathcal{J}[f] - \mathcal{J}[S] - 2\mathcal{J}, \quad (I.2)$$

где

$$\mathcal{J} = \iint_R \left\{ (f_{xx} - S_{xx}) S_{xx} + (f_{yy} - S_{yy}) S_{yy} \right\} dx dy. \quad (I.3)$$

В прямоугольной области этот интеграл можно представить в виде:

$$\mathcal{J} = \int_c^d \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_{xx} - S_{xx}) S_{xx} dx dy + \int_a^b \sum_{j=0}^{M-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (f_{yy} - S_{yy}) S_{yy} dx dy$$

и, взяв внутренние интегралы по частям, получить

$$\mathcal{J} = \int_c^d \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ (f_x - S_x) S_{xx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_x - S_x) S_{xx} dx \right\} dy + \\ + \int_a^b \sum_{j=0}^{M-1} \left\{ (f_y - S_y) S_{yy} \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} - \int_{y_j}^{y_{j+1}} (f_y - S_y) S_{yy} dy \right\} dx$$

Здесь функции $(f_x - S_x) S_{xx}$ и $(f_y - S_y) S_{yy}$ непрерывны в R , а S_{xx} на $[x_i, x_{i+1}]$ не зависит от x , и S_{yy} на $[y_j, y_{j+1}]$ не зависит от y . Отсюда следует, что

$$\mathcal{J} = \int_c^d \left\{ (f_x - S_x) S_{xx} \Big|_a^b - \sum_{i=0}^{N-1} S_{xx}(x_i, y) (f - S) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right\} dy + \\ + \int_a^b \left\{ (f_y - S_y) S_{yy} \Big|_c^d - \sum_{j=0}^{M-1} S_{yy}(x, y_j) (f - S) \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} \right\} dx. \quad (I.4)$$

По предположению бикубический многозвенник имеет фиксированные граничные условия, которым подчиняются и интерполяционные кубические многозвенники в сечениях. В силу единственности последних $(f-S)_{x=x_i} = (f-S)_{y=y_j} = 0$. Но тогда

$$Y = \int_0^a (f_x - S_x) S_{xx} \Big|_0^b dy + \int_0^b (f_y - S_y) S_{yy} \Big|_0^a dx, \quad (I.5)$$

Когда $S(x,y)$ типа II, то $S_{nn} = 0$ на Γ и $Y = 0$. Если а) $S(x,y)$ из подкласса типа I, то $f_n - S_n = 0$ на Γ , б) функции периодические, то $(f_n - S_n) S_{nn}$ принимает равные значения на противоположных сторонах границы. В этих ситуациях, а также в случае в) (смешанный подкласс) подинтегральные функции в (I.5) равны нулю, и, следовательно, $Y = 0$.

Тогда из (I.2.) следует, что

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[S] + \mathcal{F}[f-S]. \quad (I.6)$$

Величина $\mathcal{F}[f-S] > 0$, если имеет место хотя бы одно из двух условий $f_{xx} \neq S_{xx}$, $f_{yy} \neq S_{yy}$ в \mathcal{R} . Следовательно, минимальное значение функционала $\mathcal{F}[f]$ достигается при $f_{xx} = S_{xx}$, $f_{yy} = S_{yy}$. Функция $S(x,y)$ единственна, так как всякая другая должна иметь вид:

$$f(x,y) = S(x,y) + Ax + By + Cx + Dy. \quad (I.7)$$

Постоянные A, B, C, D должны равняться нулю, т.к. по условию $f(x,y)$ и $S(x,y)$ совпадают на целой сети кубических многозвенников*. Без этого предположения возникает новая, несравненно более трудная задача.

З а м е ч а н и е. Имея в виду выпуклость функционала $\mathcal{F}[f]$ в классе $\mathcal{H}^{1,2}(\mathcal{R})$, можно было бы свести задачу об абсолютном минимуме к нахождению относительного минимума обычными методами вариационного исчисления [II]. Как необходимые условия экстремума получаются:

* Это условие не предполагалось при исследовании функционала $\mathcal{F}[f] = \iint_{\mathcal{R}} f_{xx}^2 dx dy$ в работах [2,3], вследствие чего задача имеет не единственное решение. Минимум достигается на функциях $f(x,y) = S(x,y) + Ax + By + Cx + Dy$, т.е. на функциях (I.7), где A и C — функции от x , а B и D от y .

а) дифференциальные уравнения ячеек \mathcal{R}_{ij} (уравнения Эйлера-Пуассона);

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (i=0,1,\dots,N-1; j=0,1,\dots,M-1);$$

б) условия непрерывности f_{xx} вдоль линий $x=x_i$ и f_{yy} вдоль линий $y=y_j$ (условия Вейерштасса-Эрдмана);

в) естественные краевые условия $f_{nn} = 0$ на свободных сторонах границы области.

Это означает, что экстремальная поверхность при $(f-S)_{x=x_i} = 0$, $(f-S)_{y=y_j} = 0$ есть бикубический многозвенник. Достаточные условия минимума также выполняются.

§ 2. Задача сглаживания

I. Постановка задачи и единственность решения. По аналогии с функциями одной переменной образуем функционал

$$\mathcal{F}_r[f] = \iint_{\mathcal{R}} (|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|^2 + |\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|^2) dx dy + \sum_i \sum_j \rho_{ij} (f_{ij} - x_{ij}^0)^2, \quad (2.1)$$

где x_{ij}^0 и $\rho_{ij} > 0$ — заданные величины. Суммирование по i ведется от 0 до $N-1$ для периодических по x функций и от 0 до N для непериодических. Аналогично суммирование по j ведется от 0 до $M-1$ или M . Будем рассматривать далее задачу минимизации этого функционала. Как и в предыдущем параграфе, с множеством линий $\Delta_x \cdot \Delta_y$ связывается сеть кубических многозвенников. Однако теперь эта сеть подвижная, не изменяется только её тип, а в случае типа I фиксируются многозвенники, описывающие функции x_n на Γ . Множествами допустимых функций будут те функции из класса $\mathcal{H}^{1,2}(\mathcal{R})$, которым отвечают поверхности, несущие сеть многозвенников заданного типа (рис.1).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть в области \mathcal{R} в узлах сетки $\Delta_x \cdot \Delta_y$ заданы значения x_{ij}^0 .

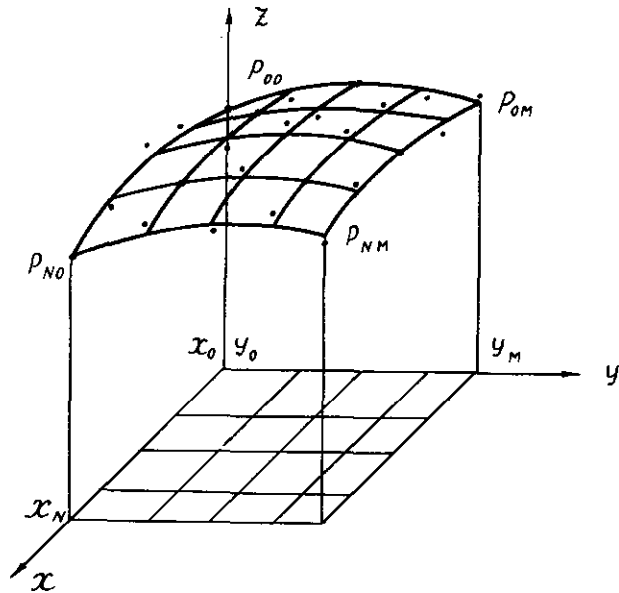


Рис. I.

Тогда среди функций класса $\mathcal{H}_T^{2,2}(R)$, несущих сеть кубических многозвенников типа II', бикубический многозвенник типа II' минимизирует функционал (2.1).

Если функции $f(x, y)$ принадлежат одному из подклассов: а) типа I, б) $\mathcal{H}_T^{2,2}(R)$ или в) типа I, и несут сети соответствующего типа, то минимум функционалу дает бикубический многозвенник одного с сетью типа.

Функция, дающая минимум, един-

ственна среди допустимых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как при доказательстве предыдущей теоремы

I.1, запишем

$$\mathcal{J}_1[f-S] = \mathcal{J}_1[f] - \mathcal{J}_1[S] - 2\mathcal{J}_1, \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J} + \sum_i \sum_j \rho_{ij} (f_{ij} - S_{ij})(S_{ij} - x_{ij}^0), \quad (2.3)$$

а \mathcal{J} определяется формулой (1.3).

Преобразуя \mathcal{J} к виду (1.4), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 = & \int_c^d (f_x - S_x) S_{xx} \Big|_a^b dy + \int_a^b (f_y - S_y) S_{yy} \Big|_c^d dx - \\ & - \int_c^d \sum_{i=0}^{N-1} S_{x^3}(x_i, y)(f-S) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} dy - \int_a^b \sum_{j=0}^{M-1} S_{y^3}(x, y_j) \times \\ & \times (f-S) \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} dx + \sum_i \sum_j \rho_{ij} (f_{ij} - S_{ij})(S_{ij} - x_{ij}^0). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первые два интеграла в (2.4), зависящие только от граничных условий, равны нулю, как и в теореме I.1. Допустимые функции $f(x, y)$ в каждом случае несут сеть кубических многозвенников, поэтому $(f-S)_{x=x_i}$ и $(f-S)_{y=y_j}$ суть кубические многозвенники. Выразим их через базисную систему [5] функций своего подкласса.

Базисной системой в подклассе называется система $u_i(x)$ ($i=0, 1, \dots, N$) линейно независимых кубических многозвенников, такая, что любой многозвенник подкласса выражается линейной комбинацией базисных. Для периодических функций они определяются условием

$$u_i(x_k) \begin{cases} 1, & \text{если } i=k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases} \quad (i=0, 1, \dots, N-1); \quad (2.5)$$

и условиями периодичности

$$u_i^{(p)}(x_0) = u_i^{(p)}(x_N), \quad (2.5a)$$

где $\rho = 0, 1, 2$ - символ производной.

Для неперiodических функций формулы (2.5) имеют место для всех $i = 0, 1, \dots, N$ с граничными условиями

$$u_i^{(\rho)}(x_0) = u_i^{(\rho)}(x_N) = 0 \quad (\rho = 1 \text{ или } 2). \quad (2.6)$$

Кроме того, следует ввести ещё две функции $u_{-1}(x)$ и $u_{N+1}(x)$ таких, что

$$\begin{aligned} u_{-1}(x_N) = u_{N+1}(x_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N), \\ u_{-1}^{(\rho)}(x_0) = u_{N+1}^{(\rho)}(x_N) = 1, \quad u_{-1}^{(\rho)}(x_N) = u_{N+1}^{(\rho)}(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда каждый кубический многозвенник может быть представлен в виде:

$$S(x) = \sum_i u_i(x) u_i(x). \quad (2.8)$$

В случае периодических функций суммирование ведётся по $i = 0, 1, \dots, N-1$. Свойства функций $u_i(x)$ (2.5) обеспечивают выполнение условий $S(x_i) = u_i$ ($y_0 = y_N$). Для неперiodических функций суммирование в (2.8) ведётся от $i = -1$ до $i = N+1$. Свойства функций $u_i(x)$ (2.6) и (2.7) обеспечивают выполнение граничных условий $S^{(\rho)}(x_0) = u_{-1}$, $S^{(\rho)}(x_N) = u_{N+1}$.

Совершенно аналогично вводится система базисных функций

$u_j(y)$ ($j = -1, 0, \dots, M, M+1$) (в периодическом случае $j = 0, 1, \dots, M-1$).

Теперь по формула (2.8) запишем

$$(f-S)_{x=x_i} = \sum_j (f_{ij} - S_{ij}) u_j(y) \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

$$(f-S)_{y=y_j} = \sum_i (f_{ij} - S_{ij}) u_i(x) \quad (j = 0, 1, \dots, M).$$

Поскольку $f(x, y)$ и $S(x, y)$ содержат сети кубических многозвенников одного типа, то в неперiodическом случае значения их частных производных в граничных узлах равны, т.е. $f_{ij} - S_{ij} = 0$, если $i = -1, N+1$ или $j = -1, M+1$, поэтому суммирование ведётся по $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$.

Подставим полученные выражения в формулу (2.4). В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i = & - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_j (f_{ij} - S_{ij}) \Big|_{x=x_i} \int_0^a S_{x^2}(x_i, y) u_j(y) dy - \\ & - \sum_{j=0}^{M-1} \sum_i (f_{ij} - S_{ij}) \Big|_{y=y_j} \int_0^b S_{y^2}(x, y_j) u_i(x) dx + \\ & + \sum_i \sum_j \rho_{ij} (f_{ij} - S_{ij}) (S_{ij} - z_{ij}^0). \end{aligned}$$

До сих пор бикубический многозвенник не был зафиксирован. Определим его так, чтобы обращались в нуль коэффициенты при $(f_{ij} - S_{ij})$ в формуле \mathcal{L}_i . В периодическом случае суммирование по i проводится от 0 до $N-1$ и по j от 0 до $M-1$. Тогда получаем NM условий:

$$\begin{aligned} \int_0^a [S_{x^2}(x_i, y)] u_j(y) dy + \int_0^b [S_{y^2}(x, y_j)] u_i(x) dx = \\ = -\rho_{ij} (S_{ij} - z_{ij}^0) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M-1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где символ $[g]$ означает разрыв функций при фиксированном значении одной из переменных, например, $[g(x_i, y)] = g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y)$. Имеет место циклическая замена индексов $i = -1$ на $N-1$ и $j = -1$ на $M-1$.

Для неперiodических функций уравнения (2.9) верны лишь для $i = 1, 2, \dots, N-1$ и $j = 1, 2, \dots, M-1$. К ним добавляются соотношения в граничных узлах. Их можно записать в том же виде, если условиться, что

$$\begin{aligned} S_{x^2}(x_i, y) = 0 \quad \text{для } i = -1, N; \\ S_{y^2}(x, y_j) = 0 \quad \text{для } j = -1, M. \end{aligned} \quad (2.9')$$

Тогда в (2.9) i изменяется от 0 до N , а j от 0 до M , т.е. всегда получается $(N+1)(M+1)$ условий.

Итак, при условиях (2.9) $\mathcal{L}_i = 0$, и, следовательно, из (2.2) получаем соотношение

$$\mathcal{L}_i[f] = \mathcal{L}_i[S] + \mathcal{L}_i[f-S], \quad (2.10)$$

аналогичное (I.6). Повторяя сделанные для (I.6) рассуждения, приходим к выводу, что бикубический многозвенник $x = S(x, y)$ с условиями (2.9) есть единственное решение задачи.

К теореме (2.1) относится замечание, сделанное о теореме I.1.

2. Система уравнений. Теорема 2.1. имеет смысл только в том случае, если существует бикубический многозвенник, удовлетворяющий условиям (2.9). Покажем, что это так.

Для единообразия, как и в задаче интерполирования [6], будем предполагать число слоев увеличенным на единицу по тем переменным, по которым функции периодические. Тогда число уравнений во всех случаях будет одинаковым и равным $(N+1)(M+1)$.

В уравнениях (2.9) выразим функции $S_{x^s}(x_i, y)$ и $S_{y^s}(x, y_j)$ через базисные:

$$\left. \begin{aligned} S_{x^s}(x_i, y) &= \sum_{\ell} S_{x^s}(x_i, y_{\ell}) v_{\ell}(y), \\ S_{y^s}(x, y_j) &= \sum_{\kappa} S_{y^s}(x_{\kappa}, y_j) u_{\kappa}(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Здесь в периодическом случае суммирование ведется по ℓ от 0 до M , по κ от 0 до N , а в непериодическом по ℓ от -1 до $M+1$, по κ от -1 до $N+1$. При этом заметим, что дополнительные члены в непериодическом случае известны из граничных условий. Так, при $\ell = -1$ и $M+1$

$$S_{x^s}(x_i, y_{\ell}) = S_{x^s y^s}(x_i, y_j) \quad (q=1 \text{ или } 2)$$

в сечениях $j=0$ и $j=M$, а при $\kappa = -1$ и $N+1$

$$S_{y^s}(x_{\kappa}, y_j) = S_{x^p y^s}(x_i, y_j) \quad (p=1 \text{ или } 2)$$

в сечениях $i=0$ и $i=N$. Для $q=1$ $S_y(x, y_j)$ ($j=0, M$) — известная функция, следовательно, можно вычислить и значения $S_{x^s y^s}(x_i, y_j)$. Для $q=2$ $S_{x^s y^s}(x_i, y_j) = 0$ ($j=0, M$), так как рассматриваются лишь условия типа Π' , т.е. $S_{y^s}(x, y_j) \equiv 0$ ($j=0, M$). Аналогично обстоит дело со значениями $S_{x^p y^s}(x_i, y_j)$.

Введем обозначения

$$u_{i\kappa} = \int_a^b u_i(x) u_{\kappa}(x) dx, \quad v_{j\ell} = \int_c^d v_j(y) v_{\ell}(y) dy. \quad (2.12)$$

Тогда уравнения (2.9) принимают вид:

$$\sum_{\ell=0}^M v_{j\ell} [S_{x^s}(x_i, y_{\ell})] + \sum_{\kappa=0}^N u_{i\kappa} [S_{y^s}(x_{\kappa}, y_j)] = -\rho_{ij} (S_{ij} - x_{ij}^0) - (\omega_1)_{ij} - (\omega_2)_{ij} \quad (i=0, 1, \dots, N; j=0, 1, \dots, M), \quad (2.13)$$

где $(\omega_1)_{ij} = 0$, если функции периодические по x , и $(\omega_2)_{ij} = 0$, если периодические по y . Для непериодических многозвенников

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1)_{ij} &= u_{i,-1} [S_{x^p y^s}(x_0, y_j) + u_{i, N+1} [S_{x^p y^s}(x_N, y_j)], \\ (\omega_2)_{ij} &= v_{j,-1} [S_{x^s y^s}(x_i, y_0)] + v_{j, M+1} [S_{x^s y^s}(x_i, y_M)] \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

известные величины.

Следующим этапом будет переход в уравнениях (2.13) к определяющим параметрам бикубического многозвенника. Уравнения его ячеек суть бикубические полиномы:

$$P_{ij}(x, y) = \sum_{\lambda=0}^2 \sum_{\mu=0}^2 a_{\lambda\mu}^{(ij)} (x-x_i)^{\lambda} (y-y_j)^{\mu}. \quad (2.15)$$

Условие, что функция $S(x, y)$ имеет непрерывную производную $S_{x^p y^q}(x, y)$ в области R , приводит к зависимости между коэффициентами $a_{\lambda\mu}^{(ij)}$. Как показано в [6], свободными можно считать только коэффициенты $a_{00}^{(ij)}$, $a_{20}^{(ij)}$, $a_{02}^{(ij)}$ и $a_{22}^{(ij)}$ ($i=0, 1, \dots, N$; $j=0, 1, \dots, M$), а остальные вычисляются через них по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_{2\mu}^{(ij)} &= \frac{a_{2\mu}^{(i+1, j)} - a_{2\mu}^{(i, j)}}{3h_i}, \\ a_{1\mu}^{(ij)} &= \frac{a_{0\mu}^{(i+1, j)} - a_{0\mu}^{(i, j)}}{h_i} - \frac{h_i}{3} (a_{2\mu}^{(i+1, j)} + 2a_{2\mu}^{(i, j)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.16a)$$

$$(\mu=0, 2; i=0, 1, \dots, N-1; j=0, 1, \dots, M);$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\lambda 3}^{(ij)} &= \frac{\alpha_{\lambda 2}^{(i,j+1)} - \alpha_{\lambda 2}^{(ij)}}{3 \ell_j}, \\ \alpha_{\lambda 1}^{(ij)} &= \frac{\alpha_{\lambda 0}^{(i,j+1)} - \alpha_{\lambda 0}^{(ij)}}{\ell_j} - \frac{\ell_j}{3} (\alpha_{\lambda 2}^{(i,j+1)} + 2 \alpha_{\lambda 2}^{(ij)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.166)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, 3; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M-1),$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \ell_j = y_{j+1} - y_j.$$

В задаче интерполирования $\alpha_{00}^{(i,j)} = \alpha_{ij}^0$, в задаче сглаживания они не известны. Поэтому в уравнениях интерполирования мы должны сохранить $\alpha_{00}^{(i,j)}$ как неизвестные. В матричной форме эти уравнения записываются так:

$$Q_1^0 \alpha_{20}^{(j)} = 3 T_1^0 \alpha_{00}^{(j)} + \delta_1^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, M); \quad (2.17a)$$

$$Q_2^0 \alpha_{02}^{(i)} = 3 T_2^0 \alpha_{00}^{(i)} + \delta_2^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, N); \quad (2.17b)$$

$$Q_7^0 \alpha_{22}^{(j)} = 3 T_7^0 \alpha_{02}^{(j)} + \delta_7^{(j)} \quad (j = 0, 1, \dots, M). \quad (2.17в)$$

Каждое из уравнений служит для построения кубического многочлена $S(x, y)$, $S(x_i, y)$ и $S(x, y_j)$ соответственно. Матрицы Q_1^0 и T_1^0 были нами исследованы в [6]. Они трехдиагональные, а Q_7^0 к тому же положительно определенная. Такой же характер имеет матрицы Q_2^0 и T_2^0 , отличающиеся от Q_1^0 и T_1^0 заменой x_i на y_j и, вообще говоря, порядком. Векторы $\delta_1^{(j)}$, $\delta_2^{(i)}$ и $\delta_7^{(j)}$ отличны от нуля только в случае граничных условий типа I:

$$\delta_1^{(j)} = \{\rho(x_0, y_j), 0, \dots, 0, \rho(x_N, y_j)\}; \quad \delta_2^{(i)} = \{q(x_i, y_0), 0, \dots, 0, q(x_i, y_M)\}$$

$$\delta_7^{(j)} = \{z_{xy_2}(x_0, y_j), 0, \dots, 0, z_{xy_2}(x_N, y_j)\}; \quad \rho = z_x, \quad q = z_y.$$

Далее из (2.15) следует, что $S_{x_2}(x_i, y_2) = \delta \alpha_{30}^{(i2)}$, $S_{y_2}(x_N, y_j) = \delta \alpha_{03}^{(Nj)}$. Подставляя эти выражения в (2.13) и учитывая (2.16), получаем уравнения.

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{\ell=0}^M \nu_{j\ell} \left(\frac{\alpha_{20}^{(i,\ell)} - \alpha_{20}^{(i2)}}{h_i} - \frac{\alpha_{20}^{(i\ell)} - \alpha_{20}^{(i,\ell)}}{h_{i-1}} \right) + 2 \sum_{k=0}^N \omega_{ik} \left(\frac{\alpha_{02}^{(k,j+1)} - \alpha_{02}^{(kj)}}{\ell_j} - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_{02}^{(kj)} - \alpha_{02}^{(k,j-1)}}{\ell_{j-1}} \right) + P_{ij} \alpha_{00}^{(ij)} = P_{ij} \alpha_{ij}^0 - (\omega_1)_{ij} - (\omega_2)_{ij} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M).$$

Здесь в периодическом случае происходит циклическая замена индексов $i = -1$ на N , $j = -1$ на M , а для непериодических функций члены с h_1 , h_N и ℓ_1 , ℓ_M , вообще, должны отсутствовать в силу условий (2.9').

3. Некоторые сведения о клеточных матрицах. Клеточной называется матрица, элементы которой сами являются матрицами. Нам будут интересовать только квадратные матрицы, с помощью которых осуществляется преобразование векторов в данном векторном пространстве.

Операции с клеточными матрицами во многом подобны операциям с обычными матрицами ([12], гл. 2; [13], § 1). Например, если $B = [B_{ik}]$, $A = [A_{ik}]$ и A_{ii} , B_{ii} — матрицы одинаковых порядков, то

$$A+B = [A_{ik} + B_{ik}], \quad AB = \sum_{\nu} A_{i\nu} B_{\nu k}.$$

Принципиальные отличия связаны главным образом с тем, что произведения $A_{i\nu} B_{\nu k}$ в общем случае некоммутативны.

Для клеточных матриц обобщаются понятия матриц специальной структуры. Так, нам придется иметь дело с нижней и верхней квазитреугольными матрицами, с квазидиагональными матрицами D . Последние занимают важное место в исследовании. Их диагональные клетки D_{ii} суть квадратные матрицы. Свойства матриц D аналогичны свойствам диагональных матриц. Например, если клетки D_{ii} — невырожденные матрицы, то D — невырожденная матрица и имеет обратную вида $D^{-1} = [D_{ii}^{-1}]$, тоже квазидиагональную.

Пусть R^m — пространство векторов $t = \{t_{ij}\}$ ($i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, m$). При фиксированном i имеем множество векторов $t_i = \{t_{i0}, t_{i1}, \dots, t_{im}\}$, образующих m_i — мерное под-

пространство R^m пространства R^n . В этом случае R^m есть и р я м а я с у м м а подпространств:

$$R^m = R^{m_0} \oplus R^{m_1} \oplus \dots \oplus R^{m_N}.$$

Клеточная матрица A симметричная, если A_{ii} — симметричные матрицы и $A_{ik} = A_{ki}'$ ($i, k = 0, 1, \dots, N$). Симметричная матрица будет неотрицательной, если её квадратичная форма

$$t'At = \sum_{i=0}^N t_i' \sum_{k=0}^N A_{ik} t_k \geq 0,$$

где t — произвольный вектор — столбец, а t' — вектор — строка. Если знак равенства достигается только при $t=0$, то матрица положительно определенная. Если положить все векторы t_k , кроме одного $t_k = t_i$, нулями, то $t'At = t_i' A_{ii} t_i$. Это означает, что все диагональные клетки A_{ii} неотрицательны (положительно определенные).

Рассматриваем далее случай $m_i = M+1$. Будем применять два способа упорядочения компонент t_{ij} векторов t , иначе говоря, в пространстве R^m будем использовать два различных б а з и с а. В первом способе компоненты располагаются в таком порядке:

$$t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_M, \quad t_j = \{t_{0j}, t_{1j}, \dots, t_{Nj}\}. \quad (2.19)$$

Для второго способа расположение будет

$$\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N, \quad \bar{t}_i = \{t_{i0}, t_{i1}, \dots, t_{iM}\}, \quad (2.20)$$

и вектор \bar{t} с таким порядком компонент обозначается через \bar{t} .

Преобразование вектора \bar{t} в вектор t

$$t = C\bar{t} \quad (2.21)$$

осуществляется клеточной матрицей

$$C = [C_{ji}] \quad (j = 0, 1, \dots, M; \quad i = 0, 1, \dots, N)$$

с $M+1$ и $N+1$ клеточными строками и столбцами соответственно. Её клетки

$$C_{ji} = [C_{kl}^{(ij)}] \quad (k = 0, 1, \dots, N; \quad l = 0, 1, \dots, M),$$

наоборот, содержат $N+1$ строку и $M+1$ столбец. Элемент $C_{ji}^{(kl)}$, а остальные элементы матрицы C_{ji} — нули. Матрица C имеет вид:

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ \hline & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & & \ddots & \\ \hline & & & & & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad (2.22)$$

Очевидно, она является ортогональной.

Вещественная матрица называется ортогональной, если сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице и сумма произведений соответствующих элементов из двух различных столбцов равна нулю ([12], гл.9; [13], § 2). Непосредственно из определения следует, что признаком ортогональности может служить равенство

$$C'C = E,$$

где C' — матрица, транспонированная с C . Оно утверждает, во-первых, что существует обратная матрица $C^{-1} = C'$ и, следовательно,

$$\bar{t} = C't \quad (2.23)$$

Во-вторых, из перестановочности произведения $C^{-1}C = CC^{-1} = E$ следует, что $C' = C^{-1}$ — тоже ортогональная матрица. Наконец, отметим ещё, что определитель $|C| = \pm 1$, ибо $|C'C| = |C|^2 = 1$.

Пусть U — квазидиагональная матрица с одинаковыми диаго-

нальными клетками $U_{ij} = U^0 (j=0, 1, \dots, M)$ размерностью $N+1$. Она преобразует векторы t в векторы τ :

$$\tau = Ut. \quad (2.24)$$

При переходе к новому базису вследствие (2.21) и свойств матрицы C имеем

$$\bar{\tau} = \bar{U}\bar{t}, \quad (2.25)$$

где

$$\bar{U} = C^{-1}UC = C'UC \quad (2.26)$$

— матрица, подобная матрице U . Очевидно, она невырожденная, если такова матрица U . Кроме того, если U неотрицательная (положительно определенная), то и \bar{U} обладает этим свойством [13] (теорема II.12).

Отметим ещё несколько фактов. Умножение U на C равносильно перестановке столбцов матрицы U . Получающаяся матрица повторяет структуру матрицы C , только не нулевые элементы заполняют целый столбец в клетке $(UC)_{ji}$. Умножение C' на UC равносильно перестановке строк матрицы UC . В результате, как нетрудно проверить, получается матрица \bar{U} с квадратными клетками, являющимися диагональными матрицами $U_{ik} E_2^0$, где E_2^0 — единичная матрица размерности $M+1$, а U_{ik} — элементы матрицы U^0 .

Покажем, что матрица \bar{U} перестановочна в произведении с любой квазидиагональной матрицей $D_2 = [D_{2,ij}] (i=0, 1, \dots, N)$ с одинаковыми диагональными клетками $D_{2,ii} = D_2^0$. Действительно, элементы матриц $D_2 \bar{U}$ и $\bar{U} D_2$ суть

$$(D_2 \bar{U})_{ik} = \sum_{\nu=0}^N (D_2)_{i\nu} \bar{U}_{\nu k} = D_2^0 \bar{U}_{ik},$$

$$(\bar{U} D_2)_{ik} = \sum_{\nu=0}^N \bar{U}_{i\nu} (D_2)_{\nu k} = \bar{U}_{ik} D_2^0.$$

Но

$$D_2^0 \bar{U}_{ik} = D_2^0 U_{ik} E_2^0 = U_{ik} E_2^0 D_2^0 = \bar{U}_{ik} D_2^0,$$

и, следовательно, $D_2 \bar{U} = \bar{U} D_2$.

Совершенно аналогично, если V — квазидиагональная матрица с клетками $V_{ii} = V^0 (i=0, 1, \dots, N)$ размерности $M+1$, преобразующая векторы \bar{t} в $\bar{\tau}$, то

$$\tau = \bar{V}\bar{t}, \quad (2.27)$$

где

$$\bar{V} = CVC'. \quad (2.28)$$

Матрица \bar{V} состоит из клеток-диагональных матриц $V_{ij} E_1^0$, где E_1^0 — единичная матрица порядка $N+1$, а V_{ij} — элементы матрицы V^0 .

3. Существование решения задачи. Теперь возвратимся к исследованию систем уравнений (2.17) и (2.18). Каждая из групп неизвестных $Q_{00}^{(ij)}$, $Q_{20}^{(ij)}$ и $Q_{22}^{(ij)}$ образует $(N+1)(M+1)$ — мерное векторное пространство R^m , в котором будем использовать оба из указанных в предыдущем пункте базисов.

В системе уравнений (2.17а) применим представление векторов в первом базисе и расположим уравнения в порядке возрастания номеров $j = 0, 1, \dots, M$. Тогда систему можно записать одним матричным уравнением

$$Q_1 \alpha_{20} = T_1' \alpha_{00} + \bar{b}_1, \quad (2.29)$$

где Q_1 и T_1' — квазидиагональные матрицы с диагональными клетками Q_1^0 и $T_1'^0$ $N+1$ — го порядка, а вектор $\bar{b}_1 = \{b_1^{(0)}, \dots, b_1^{(M)}\}$. Матрица Q_1 , как и Q_1^0 , положительно определенная.

В системе (2.17б) используем представления векторов во втором базисе и расположим уравнения по возрастанию $i = 0, 1, \dots, N$. Система выразится матричным уравнением

$$Q_2 \bar{\alpha}_{02} = T_2' \bar{\alpha}_{20} + \bar{b}_2. \quad (2.30)$$

Матрицы Q_2 и T_1' - квазидиагональные с диагональными клетками Q_2^o и T_2^o $M+1$ - го порядка, а вектор $\bar{c}_2 = \{c_2^{(1)}, \dots, c_2^{(M)}\}$, Q_2^o - положительно определенная матрица.

Обратимся теперь к наиболее сложной из систем (2.18). Если векторы α_{20} и α_{21} выражаются через первый базис и уравнения расположены по возрастанию номеров компонент $\alpha_{20}^{(ij)}$, то коэффициенты при $\alpha_{20}^{(ij)}$ образуют клеточную матрицу. Элементами её являются трехдиагональные матрицы $2U_{j2} T_1^o$, где U_{j2} определяются формулами (2.12), а T_1^o - транспонированная с T_1^o матрица. Матрицу коэффициентов тогда можно представить в виде произведения $2T_2 \bar{V}$.

Если $\bar{\alpha}_{20}$ и $\bar{\alpha}_{22}$ - векторы во втором базисе и уравнения располагаются в порядке возрастания компонент $\alpha_{20}^{(ij)}$ в этом базисе, то матрица коэффициентов при $\alpha_{20}^{(ij)}$ по аналогии с предыдущим будет $2T_2 \bar{U}$. Здесь \bar{U} порождается матрицей $\bar{U}^o = [u_{ik}]$, где u_{ik} определяются формулами (2.12).

Но в системе уравнений мы можем принять только один порядок расположения уравнений. Сохраним его таким, как в первом случае. Тогда вектор $\bar{c} = T_2 \bar{U} \bar{\alpha}_{22}$ следует преобразовать по формуле (2.27). Матрица $T_2 \bar{U}$ переходит в матрицу

$$c T_2 \bar{U} c' = c T_2 c' U = \bar{c} U.$$

В результате получаем уравнение

$$2T_2 \bar{V} \alpha_{20} + 2\bar{U} U \alpha_{22} + P \alpha_{20} = P x^o - (\omega_1 + \omega_2). \quad (2.31)$$

Здесь P - клеточная диагональная матрица с элементами $P_{jj} = \{p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{Nj}\}$ ($j = 0, 1, \dots, M$). Она положительно определена, ибо $p_{ij} > 0$. Вектор ω_1 состоит из векторов $\omega_{1j} = \{(\omega_{1j})_{0j}, \dots, (\omega_{1j})_{Nj}\}$, а вектор ω_2 из $\omega_{2j} = \{(\omega_{2j})_{0j}, \dots, (\omega_{2j})_{Nj}\}$.

Остановимся на квазидиагональных матрицах U и V . Они состоят из клеток U^o , V^o . Покажем, что U^o - положительно определенная матрица. В самом деле, определитель $|U^o|$ есть определитель Грама ([10], I4.2 - 6) скалярных произведений линейно-независимых функций $u_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) в пространстве $\mathcal{L}_2(a, b)$. И сам определитель, и все его главные миноры положительны, а тогда, по критерию Сильвестра ([12], гл.10; [13], § 12), матрица U^o положительно определенная. Аналогично об-

стоит дело и с матрицей V^o . Но тогда матрицы U и V положительно определенные.

Теперь нетрудно доказать существование и единственность решения системы матричных уравнений (2.29) - (2.31). Исключим из этой системы α_{20} и $\bar{\alpha}_{20}$. Для этого в (2.30) предварительно нужно перейти к другому базису, преобразовав матрицы по формуле (2.28).

$$\tilde{Q}_2 \alpha_{22} = \tilde{T}_2' \alpha_{20} + b_2.$$

Отсюда и из (2.27), и (2.29) получаем

$$(P + 2T_2 \tilde{V} \tilde{Q}_2^{-1} T_1' + 2\tilde{T}_2' U (\tilde{Q}_2^{-1} T_2^o)) \alpha_{20} = P x^o - (\omega_1 + \omega_2). \quad (2.32)$$

В этом уравнении \tilde{Q}_2^{-1} - квазидиагональная положительно определенная матрица. Матрица

$$(\tilde{Q}_2^{-1})' = (C Q_2 C')^{-1} = C Q_2^{-1} C' = (\tilde{Q}_2^{-1})$$

и остается, как было отмечено выше для матриц типа \bar{V} , положительно определенной.

Там же было доказано, что произведения $\tilde{V} \tilde{Q}_2^{-1}$ и $U \tilde{Q}_2^{-1}$ коммутативны и в силу положительной определенности матриц являются положительно определенными ([13], теорема II.17). Как известно, произведение TAT^{-1} неотрицательная матрица, если такова матрица A . Но это значит, что матрица системы (2.32) как сумма положительно определенной и неотрицательных матриц, положительно определенная. А тогда система имеет и притом единственное решение. Неизвестные α_{20} , α_{22} и α_{22} находятся из систем (2.17), которые разрешимы в силу положительной определенности матриц Q_1^o и Q_2^o .

Доказана

ТЕОРЕМА 2.2. Существует и притом единственный бикубический многозвенник $z = S(x, y)$, удовлетворяющий условиям (2.9).

Это принципиально решает вопрос о сглаживании двумерного множества экспериментальных данных. Бикубический многозвенник, удовлетворяющий условиям (2.9), будет, согласно теореме 2.1, единственным решением задачи сглаживания.

§ 3. Алгоритм построения сглаживающего
бикубического многозвенника

1. Два пути численного решения задачи. Первый путь уже указан в предыдущем параграфе. Он состоит в решении системы уравнений (2.32) и затем систем (2.17). Последние представляют собой уравнения задачи интерполирования и легко решаются методом прогонки, как показано в [6]. Главная трудность состоит в решении системы (2.32). С одной стороны, её матрица положительно определенная, и это позволяет использовать ряд эффективных итерационных методов решения. Но, с другой стороны, все её клетки и элементы в них отличны от нулевых, что делает работу очень трудоемкой при больших числах N и M .

С этой точки зрения интересен другой путь. Рассмотрим систему, получающуюся из (2.29) - (2.31) в результате исключения вектора α_{oo} . Этот путь аналогичен способу, применявшемуся в задаче сглаживания кубическими многозвенниками [7].

В (2.31) представим вектор α_{o2} во втором базисе и перепишем уравнение в виде:

$$2\tilde{V}'_1 \alpha_{20} + 2UC\tilde{T}'_2 \bar{\alpha}_{o2} + P\alpha_{oo} = Pz^e (\bar{w}_1 + \bar{w}_2). \quad (3.1a)$$

Здесь учтена коммутативность произведений $\tilde{T}'_1 \tilde{V}$ и $\tilde{T}'_2 U$ и равенство $\tilde{T}'_2 UC = UC\tilde{T}'_2$.

Выразим это равенство во втором базисе, сохранив у α_{20} прежнюю нумерацию компонент. Получаем:

$$2VC'\tilde{T}'_1 \alpha_{20} + 2\tilde{U}'_2 \bar{\alpha}_{o2} + \tilde{P}\bar{\alpha}_{oo} = \tilde{P}z^e (\bar{w}_1 + \bar{w}_2). \quad (3.1b)$$

Здесь учтено, что $C'\tilde{V} = VC'$, $C'UC = \tilde{U}$.

Подставим α_{oo} из (3.1a) в (2.29), а $\bar{\alpha}_{oo}$ из (3.1b) в (2.30). Получим два матричных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (Q_1 + 6T'_1 \epsilon T'_1 \tilde{V}) \alpha_{20} + 6T'_1 \epsilon UC\tilde{T}'_2 \bar{\alpha}_{o2} &= \bar{b}_1 + 3T'_1 [z^e \epsilon (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)] \\ 6T'_2 \tilde{E} VC'\alpha_{20} + (Q_2 + 6T'_2 \tilde{E} \tilde{T}'_2 \tilde{U}) \bar{\alpha}_{o2} &= \bar{b}_2 + 3T'_2 [\tilde{x}^e \tilde{E} (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)] \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где

$$\epsilon = P^{-1}, \quad \tilde{E} = \tilde{P}^{-1}.$$

Матрица системы (3.2) схематично изображена на рис.2. Разумеется, она невырожденная в силу доказанной выше теоремы 2.2. Она имеет в большей части нулевые элементы, но, к сожалению, не является в общем случае положительно определенной. Это затрудняет использование итерационных методов, а применение точечных методов сопряжено с недостаточной надежностью результатов из-за накопления ошибок округления.

В следующем параграфе мы излагаем эффективный итерационный метод, пригодный в общем случае для решения системы уравнений (2.32). Его можно использовать и для решения системы (3.2), однако сходимость процесса удается доказать только в предположении малости параметров сглаживания ϵ_{ij} .

2. По переменно-квазигреугольный алгоритм. А.А. Самарским [8] для решения систем линейных уравнений с матрицами более общего типа, чем положительно определенные, был разработан двухшаговый итерационный процесс, названный им попеременно-треугольным алгоритмом. Этот алгоритм можно использовать для решения задачи сглаживания кубическими многозвенниками [7].

В другой работе А.А. Самарского ([9], § 4, п.5) подобного рода алгоритм применяется для решения разностной схемы краевой задачи для системы параболических уравнений второго порядка. Матрица разностных уравнений была положительно определенной. Этот вариант алгоритма можно рассматривать как двухшаговый итерационный процесс для систем с клеточными матрицами. Поэтому его естественно назвать попеременно-квазигреугольным алгоритмом. Ниже мы даем обоснование его применимости для случая клеточных матриц, более общих, чем положительно определенные.

Пусть дана система уравнений

$$At = g \quad (3.3)$$

с клеточной матрицей

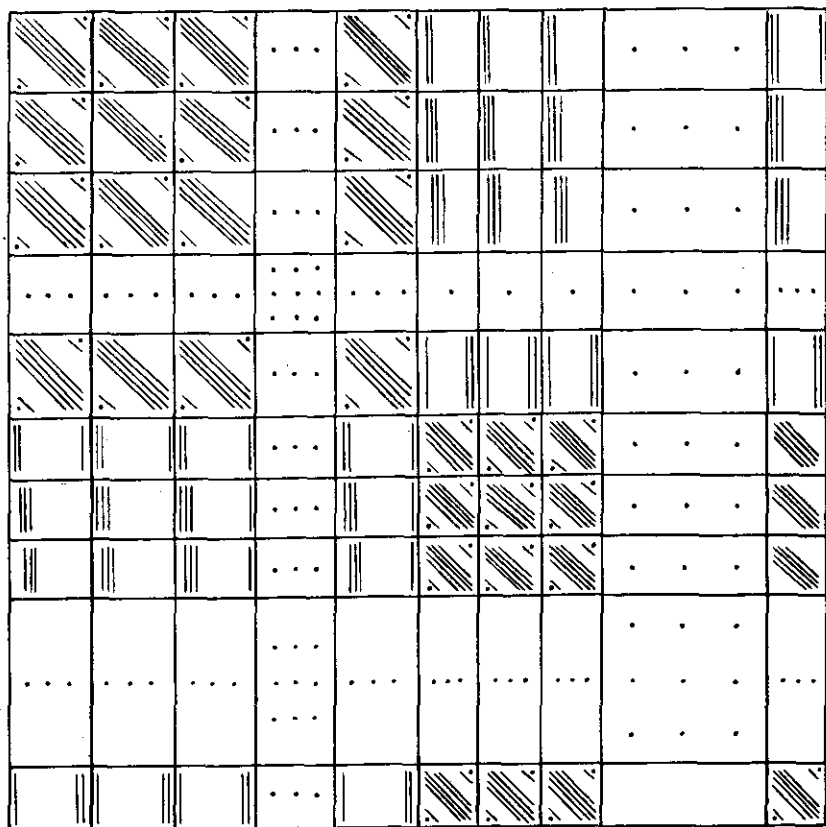


Рис. 2.

$$A = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} & A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

В общем случае диагональные клетки A_{ii} могут иметь разную размерность m_i , размерность матрицы будет $m = m_0 + \dots + m_n$.

Итак, t есть вектор m -мерного пространства R^m , а t_i - векторы его m_i -мерных подпространств R^{m_i} . В R^m введем сферическую норму векторов

$$\|t\| = (t't)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^n \|t_i\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{m_i} t_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

и согласованную с ней норму матриц $\|A\|$. Известно ([12], гл. I4), что такая норма равна

$$\|A\| = \left(\max_{\|t\| \neq 0} \frac{t'A't}{\|t\|^2} \right)^{1/2} = \lambda,$$

где λ есть наибольшее собственное значение положительно определенной матрицы $A'A$.

Подставим матрицу A в виде суммы двух матриц

$$A = A_1 + A_2 \quad (3.4)$$

нижней квазитреугольной A_1 и верхней квазитреугольной A_2 . Отличные от нулевых недиагональные клетки этих матриц, очевидно, просто равны соответствующим клеткам матрицы A . Свобода остается в выборе клеток $(A_1)_{ii}$, $(A_2)_{ii}$, причем $(A_1)_{ii} + (A_2)_{ii} = A_{ii}$.

Предположим, и это главное условие, что A_1 и A_2 таковы, что для любого $t \neq 0$

$$t'A_1 t \geq c_1 \|t\|^2, \quad t'A_2 t \geq c_2 \|t\|^2, \quad c_i > 0. \quad (3.5)$$

Произведения $t^T A_0 t$ ($\theta=1,2$) совпадают по виду с квадратичными формами симметричных матриц, но матрицы A_0 не являются симметричными*).

Представление (3.4) с условиями (3.5) легко осуществляется, если матрица A положительно определенная, т.е. A_{ii} -положительно определенные матрицы и $A_{ik} = A_{ki}$. В этом случае достаточно взять $(A_1)_{ii} = (A_2)_{ii} = \frac{1}{2} A_{ii}$. Действительно,

$$t^T A_1 t = \sum_{i=0}^n t_i^2 \left(\sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} t_k + \frac{1}{2} A_{ii} t_i \right) = \frac{1}{2} t^T A t;$$

$$t^T A_2 t = \sum_{i=0}^n t_i^2 \left(\frac{1}{2} A_{ii} t_i + \sum_{k=i+1}^n A_{ik} t_k \right) = \frac{1}{2} t^T A t.$$

Но, согласно экстремальным свойствам собственных значений симметричных матриц ([12], гл. 10; [13] § 11), $t^T A t \geq \lambda_0 t^T t = \lambda_0 \|t\|^2$, где λ_0 - наименьшее собственное значение матрицы A . Следовательно, условия (3.5) выполняются.

Пусть D - квазидиагональная положительно определенная матрица с диагональными клетками D_{ii} (они тоже положительно определенные матрицы) той же размерности, что и соответствующие A_{ii} ($i=0,1,\dots,n$). Рассмотрим следующую двухшаговую циклическую итерационную схему в матричной записи:

$$(D+A)t^{(2s+1)} = (D-A_2)t^{(2s)} + g, \quad (3.6a)$$

$$(D+A_2)t^{(2s+2)} = (D-A_1)t^{(2s+1)} + g, \quad (3.6b)$$

где $t^{(0)}$ - заданное, а s - число итераций. Эта схема через векторы подпространств R^m представляется так:

$$(D+A_1)_{ii} t_i^{(2s+1)} = - \sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} t_k^{(2s+1)} + (D-A_2)_{ii} t_i^{(2s)} - \sum_{k=i+1}^n A_{ik} t_k^{(2s)} + g_i \quad (i=0,1,\dots,n); \quad (3.7a)$$

* В работе [8] название "положительно определенные" по отношению к матрицам A_0 употребляется в смысле выполнения неравенств (3.5).

$$(D+A_2)_{ii} t_i^{(2s+2)} = - \sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} t_k^{(2s+1)} +$$

$$+ (D-A_1)_{ii} t_i^{(2s+1)} - \sum_{k=i+1}^n A_{ik} t_k^{(2s-2)} + g_i \quad (i=n, n-1, \dots, 0). \quad (3.7b)$$

На первом шаге вычисления ведутся по схеме (3.7a), которая состоит в последовательном решении $n+1$ систем размерностей m_i с матрицами $(D+A_1)_{ii}$. При этом видно, что при вычислениях $(2s+1)$ -го приближения для вектора t_i учитываются вычисленные ранее $(2s+1)$ -е приближения для компонент t_0, \dots, t_{i-1} . На втором шаге по схеме (3.7b) подобные же вычисления осуществляются как бы в противоположном направлении, начиная от вектора t_n .

Каждый шаг представляет, таким образом, итерационный процесс с групповой релаксацией ([13], §40), где группами являются векторы t_i подпространств R^{m_i} . Схема (3.7a) является аналогом одношагового метода Зейделя ([13], § 32), осуществляемого в обычном порядке (алгоритм "вниз"). Заметим только, что номерами итераций будут не s , а $2s, 2s+1, \dots$. При тех же условиях схема (3.7b) будет представлять алгоритм Зейделя "вверх".

Если $D_{ii} = (A_1)_{ii} = (A_2)_{ii} = \frac{1}{2} A_{ii}$, то в (3.7) $(D-A_1)_{ii} = (D-A_2)_{ii} = 0$, и получается аналог алгоритма Некрасова ([13], § 33), проходимого "вниз" и "вверх".

Обозначим векторы

$$q_{1i}^{(2s+1)} = \sum_{k=0}^{i-1} A_{ik} t_k^{(2s+1)}, \quad q_{2i}^{(2s)} = \sum_{k=i+1}^n A_{ik} t_k^{(2s)}.$$

Если при машинных вычислениях помимо векторов t_i запоминать $q_{1i}^{(2s)}$, то для вычисления правых частей уравнений (3.7a) на следующей $(2s+1)$ -й итерации потребуется почти вдвое меньшее число операций. В свою очередь, если при вычислениях $t_i^{(2s+1)}$ запоминать $q_{2i}^{(2s+1)}$, то таким же образом сокращается число операций на вычисление правых частей уравнений (3.7b). В этом смысле двухшаговый попеременно - квазитреугольный алгоритм более экономичен, чем одношаговый (проходимый всегда в одном и том же направлении) метод Зейделя, в частности, алгоритм Некрасова. Конечно, экономия существенна лишь в том случае, если решения

систем уравнений (3.7) требуют производства достаточно небольшого числа операций по сравнению с вычислением правых частей в (3.7). В некоторых случаях уместным окажется построение до начала итерационного процесса обратных матриц $(D+A_{11})^{-1}$ и $(D+A_{22})^{-1}$.

Оценим теперь экономичность алгоритма. Количество операций, которое требуется для вычисления всех компонент вектора τ , будем обозначать символом $Z[\tau]$. Заметим, что вычисление одной компоненты вектора $F\tau$ (F -матрица порядка $p \times q$) при известном τ состоит в нахождении суммы парных произведений, и число операций при этом равно $2q - 1$. Тогда, очевидно, $Z[F(\tau)] = p(2q-1)$.

При вычислении вектора правых частей f_σ ($\sigma = 1, 2$) уравнений (3.7а) и (3.7б) нужно учитывать ещё компоненты вектора q . Тогда в одношаговом процессе на одну итерацию требуется

$$Z[f_\sigma] = m(2m-1) + m = 2m^2. \quad (3.9)$$

При двухшаговом процессе число операций равно

$$Z[f_\sigma] = \sum_{i=0}^n m_i \left[2 \sum_{k=0}^i m_k - 1 \right] + 2m = 2 \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i m_i m_k + m.$$

Так как

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i m_i m_k = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n m_i m_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^n m_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i^2,$$

то

$$Z[f_\sigma] = m^2 + \sum_{i=0}^n m_i^2 + m. \quad (3.10)$$

Сравнение формул (3.9) и (3.10) показывает, что если m_i малы по сравнению с m и главную роль играют члены с m^2 , то при двухшаговом процессе число операций на каждой итерации сокращается почти вдвое.

Докажем сходимость попеременно-квазитреугольного алгоритма. Для этого нужно оценить поведение разности между приближенными

и точным решением $t^* \tau^{(2s)} = t^{(2s)} \tau^*$ при переходе от одной итерации к другой.

Точное решение, очевидно, удовлетворяет системам уравнений (3.6). Поэтому имеем

$$(D+A_1)\tau^{(2s+1)} = (D-A_2)\tau^{(2s)}; \quad (3.11a)$$

$$(D+A_2)\tau^{(2s+2)} = (D-A_1)\tau^{(2s+1)}. \quad (3.11б)$$

Помимо $\|\tau\|$ будем характеризовать векторы τ числами $\|\tau\|_\sigma$ такими, что

$$\|\tau\|_\sigma^2 = \|\mathcal{D}^{1/2}\tau\|^2 + \|\mathcal{D}^{-1/2}A_\sigma\tau\|^2 \quad (\sigma=1,2). \quad (3.12)$$

Матрицы $\mathcal{D}^{1/2}$ и $\mathcal{D}^{-1/2}$ существуют, и они положительно определены, как и матрица \mathcal{D} ([13], теорема II.13). Величина $\|\tau\|_\sigma$ удовлетворяет тогда всем аксиомам нормы вектора.

ЛЕММА 3.1. Справедливы неравенства

$$2\tau'A_\sigma\tau \geq \gamma_\sigma \|\tau\|_\sigma^2, \quad (3.13)$$

где

$$\gamma_\sigma = \frac{2c_\tau}{\|\mathcal{D}^{1/2}\|^2 + \|\mathcal{D}^{-1/2}\|^2 \|A_\sigma\|^2}, \quad (3.14)$$

и

$$\|(\mathcal{D}^{1/2} + \mathcal{D}^{-1/2}A_\sigma)\tau\|^2 \geq (1 + \gamma_\sigma) \|\tau\|_\sigma^2 \quad (3.15)$$

$$\|(\mathcal{D}^{1/2} - \mathcal{D}^{-1/2}A_\sigma)\tau\|^2 \leq (1 - \gamma_\sigma) \|\tau\|_\sigma^2. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.12) и (3.5) вытекает:

$$\|\tau\|_\sigma^2 \leq (\|\mathcal{D}^{1/2}\|^2 + \|\mathcal{D}^{-1/2}A_\sigma\|^2) \|\tau\|^2,$$

$$\|\tau\|_\sigma^2 \leq (\|\mathcal{D}^{1/2}\|^2 + \|\mathcal{D}^{-1/2}A_\sigma\|^2) \frac{\tau'A_\sigma\tau}{c_\tau}.$$

Отсюда непосредственно следует (3.13).

По определению сферической нормы вектора

$$\|D^{1/2}z + D^{1/2}A_0 z\| = \|D^{1/2}z\|^2 + \|D^{1/2}A_0 z\|^2 +$$

$$+ 2(D^{1/2}z)'(D^{1/2}A_0 z) = \|z\|_0^2 + 2z'A_0 z.$$

Здесь учтена симметричность матрицы $D^{1/2}$. Используя теперь неравенство (3.13), получаем (3.15).

Совершенно аналогично

$$\|D^{1/2}z - D^{1/2}A_0 z\|^2 = \|z\|_0^2 - 2z'A_0 z,$$

и в силу (3.13) верно неравенство (3.16). Отсюда, кстати, следует, что $\gamma_0 < 1$. Теперь можно получить оценку скорости сходимости по норме $\|z\|_2$.

ТЕОРЕМА 3.1. Если матрица системы разлагается на сумму нижней и верхней квазитреугольных матриц $A = A_1 + A_2$, удовлетворяющих условиям (3.5), то попеременно-квазитреугольный алгоритм (3.6) сходится со скоростью геометрической прогрессии

$$\|z^{(2s+2)} - z^*\|_2 \leq \omega \|z^{(2s)} - z^*\|_2, \quad 0 < \omega < 1, \quad (3.17)$$

при любой положительно определенной квазидиагональной матрице D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнения (3.11) слева на $D^{1/2}$, получим

$$(D^{1/2} + D^{-1/2}A_1)z^{(2s+1)} = (D^{1/2} - D^{-1/2}A_2)z^{(2s)},$$

$$(D^{1/2} + D^{-1/2}A_2)z^{(2s+2)} = (D^{1/2} - D^{-1/2}A_1)z^{(2s+1)}.$$

Квадраты обычных норм левых и правых частей здесь равны. Применяя к ним оценки (3.15) и (3.16), получаем

$$(1 + \gamma_1) \|z^{(2s+1)}\|_2^2 \leq (1 - \gamma_2) \|z^{(2s)}\|_2^2,$$

$$(1 + \gamma_2) \|z^{(2s+2)}\|_2^2 \leq (1 - \gamma_1) \|z^{(2s+1)}\|_2^2.$$

Исключая отсюда $\|z^{(2s+1)}\|_2$, находим, что

$$\|z^{(2s+2)}\|_2^2 \leq \omega^2 \|z^{(2s)}\|_2^2, \quad (3.18)$$

где

$$\omega^2 = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)} \quad (3.19)$$

Так как $0 < \gamma_0 \leq 1$, то $\omega^2 < 1$ и из (3.18) следует (3.17) и заключение теоремы.

3. Вычислительная схема задачи сглаживания. В п.1 было указано два пути решения задачи сглаживания. На первом из них приходится решать систему (2.32) с положительно определенной матрицей $(N + I)(M + I)$ -го порядка. В этом случае условия теоремы (3.1) выполняются, и попеременно-квазитреугольный алгоритм, как показано в п.2, сходится при любой квазидиагональной матрице D .

Второй путь приводит к решению системы (3.2) с несимметричной матрицей A размерности $2(N + I)(M + I)$, но имеющей большое число нулевых элементов. Матрица A является суммой двух матриц

$$A = Q + 6B, \quad (3.20)$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= T_1' \tilde{E} \tilde{V} T_1, & B_{12} &= T_1' \tilde{E} U C T_2, \\ B_{21} &= T_2' \tilde{E} \tilde{V} C' T_1, & B_{22} &= T_2' \tilde{E} \tilde{U} T_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Здесь Q — квазидиагональная положительно определенная матрица, а B имеет структуру матрицы A (рис.2).

При разложении матрицы на сумму $A = A_1 + A_2$ недиагональные клетки однозначно относятся к A_1 или A_2 , а диагональные будем делить пополам. Очевидно,

$$A_1 = \frac{1}{2}Q + 6B_1, \quad A_2 = \frac{1}{2}Q + 6B_2. \quad (3.23)$$

Матрицы B_{11} и B_{22} представляют собой произведения квазидиа-

гональных матриц с матрицами \tilde{V} и \tilde{U} соответственно. Разложение в этом случае равносильно разложению матриц \tilde{V} и \tilde{U} на нижние и верхние квазигоризонтальные с делением пополам диагональных клеток

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2, \quad \tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2.$$

Тогда

$$B_1 = \begin{bmatrix} T_1' \tilde{E} \tilde{V}_1 T_1 & 0 \\ T_2' \tilde{E} \tilde{V} C T_1 & T_2' \tilde{E} \tilde{U}_1 T_2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} T_1' \tilde{E} \tilde{V}_2 T_1 & T_1' \tilde{E} \tilde{U} C T_2 \\ 0 & T_2' \tilde{E} \tilde{U}_2 T_2 \end{bmatrix}.$$

Выберем

$$D = \frac{1}{2}(Q + 6B^0), \quad (3.25)$$

где B^0 — квазидиагональная матрица из диагональных клеток матрицы B . Это означает, что строится вариант алгоритма, представляющий на каждом шаге аналог метода Нокрасова.

Составим вычислительную схему данной задачи. Прежде подсчитаем элементы матриц B_{11} , B_{22} , B_{12} , B_{21} . Это делается сравнительно просто потому, что не квазидиагональными из матриц в произведениях являются лишь C , \tilde{U} и \tilde{V} . Будем нумеровать клеточные строки в верхней половине матрицы индексом $j = 0, 1, \dots, M$, а в нижней — индексом $i = 0, 1, \dots, N$. Столбцы в левой половине обозначаются индексом $l = 0, 1, \dots, M$, а в правой — $k = 0, 1, \dots, N$. При такой нумерации элементы имеют вид:

$$(B_{11})_{jl} = T_1^0 \left(\sum_{\mu=0}^M E_{j\mu} U_{\mu l} E_1^0 \right) T_1^0 = U_{jl} T_1^0 E_{jj} T_1^0; \quad (3.26a)$$

$$(B_{22})_{ik} = T_2^0 \left(\sum_{\nu=0}^N \tilde{E}_{i\nu} U_{\nu k} E_2^0 \right) T_2^0 = U_{ik} T_2^0 \tilde{E}_{ii} T_2^0; \quad (3.26b)$$

$$(B_{12})_{jk} = T_1^0 \left(\sum_{\mu=0}^M E_{j\mu} U^0 C_{\mu k} \right) T_2^0 = T_1^0 E_{jj} U^0 C_{jk} T_2^0; \quad (3.26в)$$

$$(B_{21})_{il} = T_2^0 \left(\sum_{\nu=0}^N \tilde{E}_{i\nu} V^0 C'_{\nu l} \right) T_1^0 = T_2^0 \tilde{E}_{ii} V^0 C'_{li} T_1^0. \quad (3.26г)$$

Вычислительные схемы будут различными для двух матричных уравнений системы (3.2). Общие формулы первого итерационного шага (3.7a) конкретизируются здесь следующим образом:

$$\begin{aligned} (Q_1^0 + 6U_{jj} T_1^0 E_{jj} T_1^0) (\bar{\alpha}_{20})_j^{(2s+1)} &= -6T_1^0 E_{jj} U^0 \sum_{k=0}^N C_{jk} T_2^0 (\bar{\alpha}_{0s})_k^{(2s)} - \\ &- 6T_1^0 E_{jj} T_1^0 \left[\sum_{l=0}^{j-1} U_{jl} (\bar{\alpha}_{20})_l^{(2s+1)} + \sum_{l=j+1}^M U_{jl} (\bar{\alpha}_{20})_l^{(2s)} \right] + \\ &+ b_1^{(j)} + 3T_1^0 [z_j^0 - E_{jj} (\bar{w}_{1j} + \bar{w}_{2j})] \quad (j=0, 1, \dots, M); \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} (Q_2^0 + 6U_{ii} T_2^0 \tilde{E}_{ii} T_2^0) (\bar{\alpha}_{0s})_i^{(2s+1)} &= -6T_2^0 \tilde{E}_{ii} V^0 \sum_{k=0}^N C'_{ki} T_1^0 (\bar{\alpha}_{20})_k^{(2s)} - \\ &- 6T_2^0 \tilde{E}_{ii} T_2^0 \left[\sum_{k=0}^{i-1} U_{ik} (\bar{\alpha}_{0s})_k^{(2s+1)} + \sum_{k=i+1}^N U_{ik} (\bar{\alpha}_{0s})_k^{(2s)} \right] + \\ &+ b_2^{(i)} + 3T_2^0 [z_i^0 - \tilde{E}_{ii} (\bar{w}_{1i} + \bar{w}_{2i})] \quad (i=0, 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.28)$$

В качестве исходного приближения ($s = 0$) берутся нулевые значения неизвестных.

Второй шаг, т.е. определение $(2s + 2)$ -й итерации, осуществляется по таким же формулам, только слева индексы $2s + 1$ и справа $2s$ нужно заменить на $2s + 2$, и вычисления проводятся в обратном направлении снизу вверх.

На каждом шаге приходится решать последовательность задач с пятидиагональными матрицами, которые отличаются от матриц в задачах построения сглаживающих кубических многозвеньев [7] несущественными скалярными множителями U_{ij} и U_{ji} . Каждое скалярное уравнение в (3.27) с номером j ($N + 1$) + i удобно предварительно разделить на $h_{i-1} + h_i$, а в (3.28) уравнения с номерами i ($M + 1$) + j — на $l_{j-1} + l_j$.

В [7] было подсчитано, что для решения подобной задачи с матрицей $(N + 1)$ -го порядка методом прогонки требуется выполнить $47(N + 1)$ арифметических операций. Здесь размерность матриц в (3.27) $N + 1$; а в (3.28) $M + 1$. Общее число операций для решения задач на одной итерации, как нетрудно подсчитать, будет $94(N + 1)(M + 1)$.

Определим количество операций при вычислении правых частей

на первом итерационном шаге, если запоминаются агрегаты с компонентами векторов на предыдущей итерации. В этом случае в схеме (3.27) нужно вычислять суммы парных произведений с квазиподдиагональной матрицей от матрицы $T_1' \bar{E} \bar{V} T_1$ и компонент двух известных векторов. Используя описанный в п. 2 прием, находим, что число операций равно $(N+1)(5M^2+6M+2)$.

В схеме (3.28) вычисляются суммы парных произведений с квазиподдиагональной матрицей матрицы $T_2' \bar{E} \bar{U} T_2$, с матрицей $T_2' \bar{E} \bar{V} C' T_2$ и компонентами двух известных векторов. Число операций равно $(N+1)(M+1)(5N+6M+7)$. Всего, таким образом, потребуется $(N+1)(M+1)(5N+11M+8) + (N+1)$ операций. На втором шаге число операций определяется таким же соотношением с переменными ролей N и M .

Уже при $N=M=6$ эти количества больше, чем число операций, требующееся для решения систем методом прогонки, и, следовательно, применение двухшагового итерационного процесса уменьшает число операций по сравнению с одношаговым на одну треть.

С увеличением N и M этот эффект возрастает, сокращая число операций почти наполовину.

4. Условие сходимости итерационного процесса. По теореме 3.1 попеременно-квазитреугольный алгоритм сходится, если выполняются условия (3.5). Для A_σ ($\sigma=1,2$) в виде (3.22) это эквивалентно неравенствам

$$\frac{1}{2} \frac{t' Q t}{\|t\|^2} + \sigma \frac{t' B_\sigma t}{\|t\|^2} > 0 \quad (\sigma=1,2). \quad (3.29)$$

Так как матрица Q положительно определенная, то при малых ε_{ij} роль матриц B_σ мала и условия выполняются. При $\varepsilon_{ij} = 0$ приходим просто к задаче интерполирования [6].

Сделаем далее априорную оценку сверху для

$$\varepsilon_* = \max_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.30)$$

при которой условия (3.29) справедливы. Рассмотрим матрицы $B_\sigma + B_\sigma'$:

$$B_1 + B_1' = \begin{bmatrix} T_1' (\bar{E} \bar{V}_1 + \bar{V}_1' \bar{E}) T_1, & T_1' C V \bar{E} T_1, \\ T_1' \bar{E} V C' T_1, & T_1' (\bar{E} \bar{U}_1 + \bar{U}_1' \bar{E}) T_1, \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$B_2 + B_2' = \begin{bmatrix} T_2' (\bar{E} \bar{V}_2 + \bar{V}_2' \bar{E}) T_2, & T_2' \bar{E} U C T_2, \\ T_2' C' U \bar{E} T_2, & T_2' (\bar{E} \bar{U}_2 + \bar{U}_2' \bar{E}) T_2. \end{bmatrix}$$

Эти матрицы симметричны, и их квадратичные формы принимают значения

$$t' (B_\sigma + B_\sigma') t = 2 t' B_\sigma t = 2 t' B_\sigma' t.$$

Поэтому условия (3.29) будут выполняться, если справедливы неравенства:

$$\frac{t' Q t}{\|t\|^2} > \sigma \frac{|t' (B_\sigma + B_\sigma') t|}{\|t\|^2} \quad (\sigma=1,2). \quad (3.32)$$

Для положительно определенной матрицы Q $t' Q t \geq \lambda_0^{(Q)} \|t\|^2$, где $\lambda_0^{(Q)}$ - её наименьшее собственное значение. Для симметричной матрицы $B_\sigma + B_\sigma'$

$$|t' (B_\sigma + B_\sigma') t| \leq \lambda_*^{(B_\sigma + B_\sigma')} \|t\|^2,$$

где $\lambda_*^{(B_\sigma + B_\sigma')}$ - наибольшее по модулю собственное значение этой матрицы. Тогда условия (3.32) сводятся к неравенствам

$$\lambda_0^{(Q)} > \sigma |\lambda_*^{(B_\sigma + B_\sigma')}| \quad (\sigma=1,2). \quad (3.33)$$

Оценки собственных значений можно получить из теоремы Гершгорина ([12], гл. XIV; [13], § 13).

Согласно этой теореме, все собственные значения матрицы Q лежат в объединении отрезков вещественной оси с центрами в $Q_{\nu\nu}$ и радиусами $\sum_{\mu \neq \nu} |Q_{\nu\mu}|$. Так как $\lambda_0^{(Q)} = \min(\lambda_0^{(Q_1)}, \lambda_0^{(Q_2)})$, а по теореме

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0^{(Q_1)} &\geq \min_i (h_{i-1} + h_i) \geq 2h, \quad h = \min_i h_i; \\ \lambda_0^{(Q_2)} &\geq \min_j (l_{j-1} + l_j) \geq 2l, \quad l = \min_j l_j; \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

то

$$\lambda_0^{(Q)} \geq 2 \min(h, \ell). \quad (3.35)$$

Далее,

$$|\lambda_*^{(B_\sigma + B_\sigma')}| \leq \|B_\sigma + B_\sigma'\|_I \quad (\sigma=1,2), \quad (3.36)$$

где $\|B_\sigma + B_\sigma'\|_I$ — максимальная из сумм модулей элементов строк. Это кубическая норма матрицы.

Очевидно, условия (3.33) будут выполняться, если

$$\min(h, \ell) \geq 3 \|B_\sigma + B_\sigma'\|_I \quad (\sigma=1,2). \quad (3.37)$$

Кубическая норма клеточной матрицы есть максимум норм клеточных строк. Из (3.31) следует, что

$$\|B_j + B_j'\|_I = \max \left\{ \|T_j'(E\tilde{V}_j + \tilde{V}_j'E)T_j\|_I + \|T_j'CV\tilde{T}_j\|_I; \|T_j'\tilde{E}VC'T_j\|_I + \|T_j'(\tilde{E}\tilde{U}_j + \tilde{U}_j'\tilde{E})T_j\|_I \right\}. \quad (3.38)$$

Норма произведения не больше произведения норм. Учитывая ещё, что $\|T_\nu\|_I = \|T_\nu'\|_I$ ($\nu=1,2$), а $\|C\| = \|C'\| = 1$, получаем

$$\|B_j + B_j'\|_I \leq \max \left\{ \|T_j\|_I (\|T_j'\|_I \|E\tilde{V}_j + \tilde{V}_j'E\|_I + \|T_j'\|_I \|V\tilde{T}_j\|_I); \|T_j\|_I (\|T_j'\|_I \|\tilde{E}V\|_I + \|T_j'\|_I \|\tilde{E}\tilde{U}_j + \tilde{U}_j'\tilde{E}\|_I) \right\}.$$

Непосредственное вычисление даёт

$$\|E\tilde{V}_j + \tilde{V}_j'E\|_I = \max_j \sum_{i=0}^M \|v_{ji} \epsilon_{ij}\|_I \leq \|V^0\|_I \max_j \|\epsilon_{ij}\|_I.$$

Так как ϵ — диагональная матрица и её норма равна ϵ_* (3.30), то

$$\|E\tilde{V}_j + \tilde{V}_j'E\|_I \leq \epsilon_* \|V^0\|_I.$$

Аналогично

$$\|\tilde{E}\tilde{U}_j + \tilde{U}_j'\tilde{E}\|_I \leq \epsilon_* \|U^0\|_I.$$

Учитывая эти два неравенства, находим

$$\|B_j + B_j'\|_I \leq \epsilon_* (\|T_j\|_I + \|T_j'\|_I) \max(\|T_j\|_I, \|T_j'\|_I) \max(\|U^0\|_I, \|V^0\|_I).$$

Точно такая же оценка получается для $\|B_2 + B_2'\|_I$.

Так как $\|T_\nu\|_I = \|T_\nu'\|_I$, то

$$\left. \begin{aligned} \|T_1\|_I &= 2 \max_i \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) = \frac{4}{h}, \\ \|T_2\|_I &= 2 \max_j \left(\frac{1}{\ell_{j-1}} + \frac{1}{\ell_j} \right) = \frac{4}{\ell}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Окончательно получаем оценку

$$\|B_\sigma + B_\sigma'\|_I \leq 16 \epsilon_* \frac{h+\ell}{h\ell} \frac{\max(\|U^0\|_I, \|V^0\|_I)}{\min(h, \ell)} \quad (\sigma=1,2) \quad (3.40)$$

Теперь неравенства (3.37) будут выполняться, если

$$\epsilon_* \leq \frac{1}{48} \frac{h\ell}{h+\ell} \frac{\min(h^2, \ell^2)}{\max(\|U^0\|_I, \|V^0\|_I)}. \quad (3.41)$$

Остается оценить сверху $\|U^0\|_I$ и $\|V^0\|_I$. Эта задача оказывается весьма сложной. Удовлетворительные оценки удалось получить только для неперидических базисных многозвенников типов I, II' и смешанного типа. С этой целью использовалось свойство базисных многозвенников, установленное в работе [5], и состоящее в том, что значения $|u_k'(x_i)|$ убывает при $i < k-1$ и $i > k+1$ быстрее, чем члены геометрической прогрессии со знаменателем 1/2. Хотя в [5] это свойство сформулировано для многозвенников типа I', но оно справедливо и для других неперидических базисных многозвенников.

Предполагая, что

$$\frac{h}{\ell} \leq K < \infty, \quad H = \max h_i, \quad (3.42)$$

можно показать, что элементы матрицы U^0 , т.е. u_{ik} , при $k < i-1$ и $k > i+1$ убывает быстрее членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/4. Используя это свойство, нетрудно найти, что

$$\|U^0\| < \frac{16}{3} [\varphi(1) + K]^2 \varphi^2(K) H, \quad (3.43)$$

где

$$\varphi(k) = \frac{\sqrt{3}(k+1)}{\sqrt{k(3k+2)}}, \quad \varphi(k) = \frac{(k+1)^2}{(4k+3)}.$$

Если наложить другое ограничение на шаг, а именно:

$$\frac{1}{\rho} < \frac{h_{i-1}}{h_i} < \rho, \quad 1 \leq \rho < 2 \quad (i=1, \dots, N-1), \quad (3.44)$$

то оценка получается в виде:

$$\|U^*\| < \frac{16}{3} \left[\varphi(\rho) + \frac{\rho}{2-\rho} \right]^2 \psi^2(\rho) H. \quad (3.45)$$

При $K = \rho = 1$ оценки (3.43) и (3.45) совпадают и приводят к $\|U^*\| \leq 12H$. Они остаются справедливыми и для $\|V^*\|$, если только \mathcal{L}_j ($j = 0, 1, \dots, M-1$) удовлетворяют ограничениям типа (3.42) или (3.44).

В практически интересных задачах, в частности, при проектировании форм деталей и агрегатов $\epsilon_x \sim O(H^2/L^3)(L = \max \mathcal{L}_j)$. Формула (3.41) при полученных оценках дает $\epsilon_x \sim O(H^2/K_x^4 H + \epsilon^2/K_y^4 L)$, или $\epsilon_x \sim O(H^2/K_x^6 + L^2/K_y^6)$, где K_x и K_y — это число K для множеств Δ_x и Δ_y . Тем самым при сравнительно небольших K_x и K_y получаем удовлетворительный результат.

Оценки типа (3.43) и (3.45) дают завышенное значение $\|U^*\|$ и $\|V^*\|$ примерно на порядок. Опыт показал, что в них укладываются и нормы периодического случая. Если оценка (3.41) оказывается неудовлетворительной, то, учитывая грубость оценок (3.43) и (3.45), можно уточнить значения $\|U^*\|$ и $\|V^*\|$, прибегнув к их непосредственному вычислению. Для этого нужно решить $N+M+2$ интерполяционных задач, чтобы получить коэффициенты многозвенников $u_x(x)$ ($x = 0, 1, \dots, N$) и $u_y(y)$ ($y = 0, 1, \dots, M$). Если $\alpha_\lambda^{(i)}$ и $\beta_\lambda^{(i)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) — коэффициенты многозвенников $u_x(x)$ и $u_y(y)$ соответственно, то

$$\begin{aligned} u_{xv} &= \int_{\alpha_{N-1}}^{\beta} u_x(x) u_y(y) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_x(x) u_y(y) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\alpha_0 \beta_0 h + \frac{1}{2} (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) h^2 + \frac{1}{3} (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0) h^3 + \right. \\ &+ \frac{1}{4} (\alpha_0 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_0) h^4 + \frac{1}{5} (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_1) h^5 + \\ &\left. + \frac{1}{6} \alpha_2 \beta_3 h^6 \right]_i. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Тогда

$$\|U^*\| = \max_x \sum_{v=0}^{M-1} |u_{xv}|. \quad (3.47)$$

Аналогично вычисляется $\|V^*\|$.

§ 4. Реализация алгоритма на однородной вычислительной системе

Рассматривается возможный способ распараллеливания алгоритма и его реализации на однородной вычислительной системе, состоящей из Z машин, в том смысле, как эти понятия введены в [14]. Машин будем обозначать так: $m-1, m-2, \dots, m-Z$.

На прямоугольной сетке узлов Δ_x, Δ_y заданы значения x_{ij}^0 , а в граничных узлах для непериодических функций ещё условия типа I или типа II. Каждому значению x_{ij}^0 придается вес ρ_{ij} .

Разобьем множество индексов $i = 0, 1, \dots, N$ на $Z-1$ связанных частей так, чтобы в разных частях их число отличалось не более чем на единицу. Это, очевидно, всегда можно сделать, и такое распределение будем называть равномерным. Подобную процедуру проведем и для множества индексов $j = 0, 1, \dots, M$.

Этап I. В каждую ЭВМ заносим массивы x -ов и y -ов полностью. Значения x_{ij}^0 и граничные условия, как и в задаче интерполирования ([6], § 3), располагаем в виде таблицы i и в такую же таблицу собираем веса ρ_{ij} , или $\epsilon_{ij} = \rho_{ij}^1$. Распределение индексов j на группы разбивает на такие же группы строки таблиц. Строки с номерами $j = 0, 1, \dots, j_i$ помещаем в память $m-1$, следующую группу в $m-2$ и т.д. до $m-(Z-1)$. При этом граничные строки $j = -1$ и $j = M+1$, если они имеются, заносятся в $m-1$ и $m-(Z-1)$, m — остается пока свободной.

Далее нужно сформировать матрицу A системы (3.2) и вектор правых частей. Клеточные строки в верхней половине матрицы нумеруются индексами j , а в нижней — индексами i . Разбиение индексов на группы делит на группы и клеточные строки, что показано на рис. 3 горизонтальными пунктирными линиями для случая $Z = 4$. Условимся, что ЭВМ будут собирать и хранить результаты расчетов в своих полосках. Таких полосок две: одна в верхней половине матрицы, другая, симметрично расположенная, в нижней. Это означает, что группы индексов i распределены по машинам в обратном порядке: $i = 0, 1, \dots, i_i$ отнесена к $m-(Z-1)$, вторая группа к $m-(Z-2)$ и т.д. Для равномерной загрузки машин участвовать в расчетах каждой полоски будут все

I	II			I	
II		III			II
III			IV		III
III	III			IV	
II		II			III
I			I		II

Рис.3.

Хранить в памяти ЭВМ все элементы матрицы A в данном случае нецелесообразно. Достаточно вычислить и запомнить некоторые матрицы - клетки, из которых легко находятся все элементы клеточной матрицы непосредственно в итерационном процессе.

Дальнейшие рассуждения проводятся для примера $Z = 4$, обладающего всеми особенностями общего случая.

Э т а п 2. а) Вычисляются элементы матриц Q_1^o и T_1^o и запоминаются во всех машинах.

б) Вычисляются элементы матриц Q_2^o и T_2^o и тоже запоминаются во всех машинах.

Э т а п 3. Рассчитываются элементы матриц U^o и V^o . Сначала ЭВМ $m-I$, $m-II$ и $m-III$ решают интерполяционные задачи построения базисных многозвенников $u_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) и $v_j(y)$ ($j = 0, 1, \dots, M$) для своих индексов i и j и запоминают коэффициенты полиномов. Далее по формулам типа (3.46) вычисляются скалярные произведения u_{ik} и v_{jl} . Так как матрицы U^o и V^o симметричные, то достаточно найти элементы их верхних или нижних треугольных матриц.

Вычисления организуются по схеме, изображенной на рис. 4.

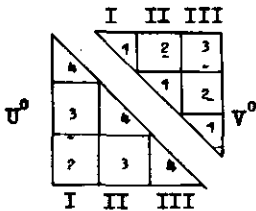


Рис.4.

ЭВМ, включая и $m-Z$. По группам индексов j и i клеточные столбцы матрицы A разделены на вертикальные колонки, тоже обозначенные на рис.3 пунктирными линиями.

Поручим каждой ЭВМ производить расчеты в зонах в виде "квадратов" и "углков", которые выделены на рис. 3 сплошными линиями с указанием номера машины.

Каждая ЭВМ рассчитывает по одной вертикальной полоске верхней треугольной матрицы V^o и нижней треугольной U^o . Цифрами обозначены номера тактов. На первом такте ЭВМ подсчитывают скалярные произведения u_{je} из базисных функций, хранящихся в их памяти. Этим самым заполняются треугольники, отмеченные цифрами I. Затем происходит обмен информацией между ЭВМ: $m-I$ засылает

информацию о своих базисных многозвенниках $u_j(y)$ в $m-II$, $m-III$ и $m-III$ пересылает в $m-I$ информацию о многозвенниках $u_i(x)$. Следующим тактом можно вычислить элементы матриц V^o и U^o в "квадратах", обозначенных цифрами 2. Затем снова производится обмен информацией между ЭВМ и заполняются две диагонали из "квадратов", отмеченные цифрами 3. Продолжая процесс, на последнем такте (4) заполним диагональ из треугольников матрицы U^o .

Этап заканчивается обменом информацией между машинами с тем, чтобы каждая ЭВМ, включая $m-IV$, имела матрицы U^o и V^o полностью.

Э т а п 4. а) Вычисляются произведения $6T_1^o \epsilon_{ij} T_1^o$, пропорциональные элементам матрицы $6B_1$, причем каждая ЭВМ рассчитывает их для клеток, лежащих в её областях (рис.3). Результаты запоминаются в тех ЭВМ, где они получены.

Имея эти произведения, непосредственно в итерационном процессе будем вычислять клетки матрицы $6B_1$ по формулам (3.26а), а затем получать клетки матрицы A (3.2): недиагональные в виде $6(B_1)_{je}$, диагональные $Q_1^o + 6(B_1)_{jj}$. Это потребует для недиагональных клеток, помимо $9(N+1)$ операций по вычислению сумм парных произведений, выполнения ещё $N+1$ операций умножения на v_{je} , а всего будет $10(N+1)$ операций. На формирование диагональных клеток понадобится затратить $5(N+1)$ операций умножения на v_{jj} и $3(N+1)$ операций сложения, а всего $8(N+1)$ операций. $m-I$ на данной части этапа не работает.

б) Вычисляются произведения $6T_1^o \epsilon_{ij} U^o$ для матрицы $6B_2$, причем каждая ЭВМ рассчитывает их для своей области и запоминает. Здесь не работает $m-IV$.

В итерационном процессе через эти произведения по формулам (3.26г) будем вычислять клетки матрицы $6B_2$. Умножение произведения $6T_1^o \epsilon_{ij} U^o$ справа на C_{jk} есть логическая операция выделения столбца первого множителя. Умножение затем на T_2^o справа требует выполнения $3(N+1)$ операций для каждой клетки. Они добавляются к $5(N+1)$ операциям по вычислению сумм парных произведений. Всего, таким образом, придется выполнять $8(N+1)$ арифметических операций и одну логическую операцию выделения столбца.

Далее следует обмен информацией между ЭВМ с тем, чтобы таблицы величин α_{ij}^0 и $\rho_{ij}(\epsilon_{ij})$ были записаны в них по столбцам (группам индексов i).

Э т а п 5. Этот этап подобен четвертому.

а) Рассчитываются и запоминаются произведения $6T_2^0 \bar{\epsilon}_{ii} T_2^0$ для матрицы $6B_{22}$. Её элементы определяются по формулам (3.26б), а элементы матрицы A_i как $Q_i + 6(B_{22})_{ii}$ или $6(B_{22})_{ix}$. В итерационном процессе на диагональную клетку будет затрачиваться $8(M + 1)$ операций, а на недиагональную $10(M + 1)$ операций.

б) Вычисляются и запоминаются произведения $6T_2^0 \bar{\epsilon}_{ii} V^0$ для матрицы $6B_{22}$. Её элементы определяются по формулам (3.26в). В итерационном процессе на каждую клетку придется затратить $8(M + 1)$ операций.

Теперь в памяти ЭВМ из элементов матриц U^0 и V^0 достаточно оставить только те, индексы которых соответствуют номерам клеток в матрицах B_{11} и B_{22} , попадающих в область данной ЭВМ.

Э т а п 6. По исходным данным α_{ij}^0 и граничным условиям при $x=0$, $x=b$, используя формулы (2.14) и уже известные матрицы $\bar{\epsilon}_{ii}$ и T_2^0 , рассчитываем векторы правых частей второй группы уравнений системы (3.2):

$$6_2^{(i)} + 3T_2^0 [\bar{\alpha}_i^0 - \bar{\epsilon}_{ii} (\bar{w}_{1i} + \bar{w}_{2i})] \quad (i=0, 1, \dots, N).$$

Каждая ЭВМ вычисляет и запоминает те из них, которые принадлежат уравнениям, входящим в её горизонтальную полосу (рис. 3). $m - IV$ на данном этапе не работает.

Далее следует обмен информацией между машинами, и α_{ij}^0 , ρ_{ij} снова записываются по группам индексов j .

Э т а п 7. Как на этапе 6, вычисляются и запоминаются в соответствующих ЭВМ правые части первой группы уравнений системы (3.2).

$$6_1^{(j)} + 3T_1^0 [\alpha_j^0 - \epsilon_{jj} (w_{1j} + w_{2j})] \quad (j=0, 1, \dots, M).$$

Только теперь можно приступить к выполнению итерационного процесса. Начинаем его шагом "сверху вниз", считая начальное приближение нулевым. Машины уже подготовлены к выполнению первой итерации по формулам (3.27). Схема вычислений иллюстрирует-

ся на рис. 5.

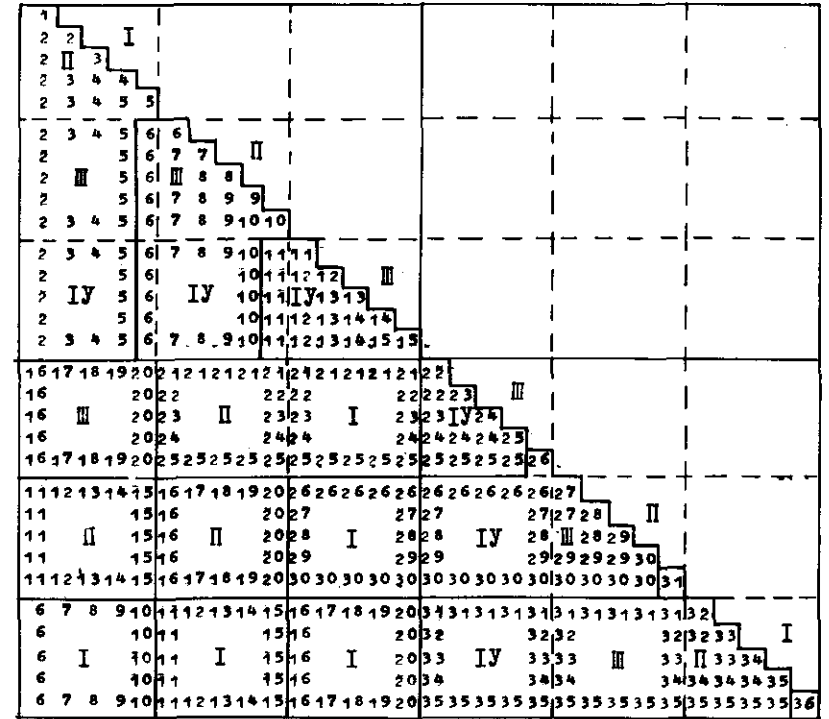


Рис. 5.

Э т а п 8. а) Работу начинает машина $m - I$. В неё вызывается программа сглаживания кубическими многозвеньниками, а из $m - II$ матрица $6T_1^0 \epsilon_{00} T_1^0$ и число v_{00} . На первом такте (1) $m - I$ формирует матрицу $Q_1^0 + 6v_{00} T_1^0 \epsilon_{00} T_1^0$ первой диагональной клетки и с ней решает задачу сглаживания для линии $y = y_0$. Этим находится первое приближение вектора $\alpha_{20}^{(0)}$. За-

тем машины обмениваются информацией. Из $m - I$ во все ЭВМ передается вектор $\alpha_{20}^{(i)}$, а из $m - II$ в $m - I$ матрица $6T_2^{\circ} \tilde{E}_n T_2^{\circ}$ и число u_n .

На втором такте (2) $m - I$ формирует вторую диагональную матрицу, а $m - II$ вычисляет суммы парных произведений в первой клетке второй строки. Затем результаты из $m - II$ пересылаются в $m - I$, которая вычитает их из правых частей уравнений и запоминает разности. $m - I$ до конца такта решает задачу сглаживания и находит первое приближение вектора $\alpha_{20}^{(i)}$. $m - II$ за это время, а остальные ЭВМ в течение всего такта 2 вычисляют суммы парных произведений в первом клеточном столбце, перемещаясь сверху вниз.

Затем во все машины из $m - I$ пересылается рассчитанный вектор $\alpha_{20}^{(i)}$, и на такте 3 проводятся такие же вычисления, как и на такте 2. Полученные суммы парных произведений складываются в каждой ЭВМ с найденными на такте 2. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет вычислен последний вектор $\alpha_{20}^{(j)}$ с индексом j , принадлежащим $m - I$. В примере он находится на такте 5. Этот вектор записывается во все машины, кроме $m - II$. Отметим, что $m - I$ должна хранить некоторое время первое приближение векторов $\alpha_{20}^{(j)}$ своей группы индексов.

Перед очередной серией, начинающейся тактом 6, $m - I$ передает программу сглаживания кубическими многозвенниками в $m - II$, и между $m - II$ и $m - III$ налаживается такое же взаимодействие, как ранее между $m - I$ и $m - II$. $m - I$ ведет теперь расчет сумм парных произведений в пересечении её левой нижней области с первой вертикальной колонкой. Наряду с вычислениями после очередного такта она должна получать и запоминать первое приближение вектора $\alpha_{20}^{(j)}$ с индексами j из второй группы, которая отнесена к $m - II$.

Когда эта группа будет вычислена (в примере на 10-ом такте), то $m - II$ передаёт свои обязанности $m - III$, а сама переходит на расчет сумм парных произведений в своей левой нижней области. Предварительно она получает информацию о первой группе векторов $\alpha_{20}^{(j)}$ из $m - I$, с которой снимаются обязанности по их хранению в дальнейшем.

На очередных сериях (по 5 тактов) приближение для вектора $\alpha_{20}^{(j)}$, полученное в какой-либо ЭВМ, передается во все машины с

большими номерами и в $m - I$. Последняя использует их на следующей серии тактов, затем пересылает в $m - II$, а оттуда они попадают в $m - III$. В нашем примере придется выполнить три таких серии. За это время будет вычислено первое приближение всего вектора $\alpha_{20} = \{\alpha_{20}^{(1)}, \dots, \alpha_{20}^{(n)}\}$. Если снова провести сравнение с решением задачи интерполирования, то оказывается рассчитанной табл. 2.

б) Далее следует серия тактов по вычислению сумм парных произведений в диагональных "квадратах" B_2 . Окончательные суммы вычитаются в каждой ЭВМ из правых частей уравнений. Заметим, что в машине $m - III$ в последний раз в итерационном процессе используется первое приближение первой группы векторов $\alpha_{20}^{(j)}$, и в дальнейшем их можно не хранить. На этой серии тактов простаивает $m - IV$.

в) Следующие серии тактов в какой-то степени симметричны с выполненными в части а) данного этапа. Вместо расчетов в клеточных столбцах производятся вычисления в клеточных строках. Между двумя машинами, ведущими расчеты в диагональной части матрицы, организуется взаимодействие, тоже подобное уже описанному в части а).

Вычисления начинаются с первой клеточной строки нижней половины матрицы (2I-й такт). Из машины $m - III$ матрица $6T_2^{\circ} \tilde{E}_{oo} V^{\circ}$ пересылается в $m - I$ и $m - II$. Последние формируют свои элементы - клетки матрицы $6B_2$, и сразу производят расчеты сумм парных произведений. В то же время из $m - IV$ в $m - III$ передается матрица $6T_2^{\circ} \tilde{E}_{oo} T_2^{\circ}$ и число u_{oo} , и в $m - III$ формируется матрица $Q_2 + 6u_{oo} T_2^{\circ} \tilde{E}_{oo} T_2^{\circ}$. Закачивается такт сложением сумм парных произведений клеточной строки, имеющихся в разных машинах. Это можно сделать различными способами, но так, чтобы результат получался всегда в ЭВМ, которая решает задачу сглаживания для данной клеточной строки.

На следующих тактах машины $m - I$ и $m - II$ повторяют свою работу в других клеточных строках. $m - III$ в начале второго такта этой серии вычитает полученные на первом такте суммы из правых частей уравнений, решает задачу сглаживания для сечения $x = x_0$ и находит первое приближение вектора $\bar{\alpha}_{20}^{(i)}$. Затем эти результаты передаются в $m - IV$, где запоминаются, а в обратном направлении пересылается матрица $6T_2^{\circ} \tilde{E}_{oo} T_2^{\circ}$ и число u_n .

Далее $m - III$ формирует вторую диагональную матрицу, а $m - IV$ вычисляет суммы парных произведений с вектором $\bar{\alpha}_{o_2}^{(l)}$. Начиная с третьего такта (23) этой серии, во время решения задачи сглаживания в $m - III$ машина $m - IV$ вычисляет суммы парных произведений в очередной строке с уже найденными векторами $\bar{\alpha}_{o_2}^{(l)}$. Заканчиваются такты снова сложением сумм парных произведений, полученных в разных ЭВМ.

Опишем первый, переходный, такт (26) второй серии. Из $m - II$ в $m - I$ передается матрица $6T_2^o \bar{\epsilon}_{i_2}^o V^o$ с соответствующим индексом i ($i = 6$), а из $m - III$ в $m - II$ и $m - IV$ матрица $6T_2^o \bar{\epsilon}_{i_2}^o T_2^o$. Затем машины $m - I$, $m - III$ и $m - IV$ делают такую же работу, как и на предыдущем такте, а $m - II$ формирует следующую диагональную матрицу. Такт заканчивается сложением сумм парных произведений, имеющихся в машинах $m - I$, $m - III$ и $m - IV$, и передачей из $m - III$ в $m - II$ программы сглаживания.

На последующих тактах серии между $m - II$ и $m - III$ организуется такое же взаимодействие, как ранее между $m - III$ и $m - IV$. Выполнив три подобных серии, найдем первое приближение векторов $\alpha_{o_2}^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$). На вычисление последнего вектора $\bar{\alpha}_{o_2}^{(N)}$ затрачивается ещё один такт (36), который выполняет только $m - I$. Как и в задаче интерполирования, получена табл. 3, размещенная в машинах системы по группам столбцов.

Таким образом, первый шаг итерационного процесса выполнен.

Э т а п 9. На первом этапе осуществляется обратный шаг итерационного процесса. Все машины после завершения первого шага имеют ту же информацию, что и перед его началом. Только вместо правых частей уравнений теперь ЭВМ хранят разность между ними и суммами парных произведений для нижней квазиподдиагональной матрицы с первым приближением векторов α_{o_2} и $\bar{\alpha}_{o_2}$, что и требуется для выполнения обратного шага. Выполнять первый такт не нужно, ибо его роль сыграл последний, особый такт на этапе 8. В остальном процессе вычислений аналогичен этапу 8 и не требует специального рассмотрения.

Этапы 8 и 9 чередуются и продолжают до тех пор, пока не будет достигнута достаточная степень приближения решения. Так как матрица A системы уравнений весьма общая, то придется пользоваться также общим критерием точности — величиной в е к -

т о р а н е в я з к и [13] (§ 29):

$$z^* = q - At^{(2s+2)},$$

где $t = \{\alpha_{20}, \bar{\alpha}_{o_2}\}$. Его вычисление требует запоминания всего очередного $(2s + 2)$ -го приближения векторов α_{20} и $\bar{\alpha}_{o_2}$, а по количеству операций равносильно одному итерационному шагу. Поэтому проверять его следует лишь после того, как требуемая точность с большой вероятностью будет достигнута. Определенное представление об этом можно получить, если сравнивать два последовательных приближения $2s + 2$ и $2s + 1$, т.е. $t^{(2s+2)} - t^{(2s+1)}$. Учитывая равенство $A = A_1 + A_2$ и формулу (3.66), найдем

$$z^* = (D - A_1)(t^{(2s+2)} - t^{(2s+1)}).$$

В нашем случае $A_1 - D$ — это квазиподдиагональная матрица. Поэтому z^* можно получить, используя уже изложенный на этапе 8 алгоритм вычисления сумм парных произведений для квазиподдиагональной матрицы.

Э т а п 10. Решая системы уравнений (2.17в) (в каждой ЭВМ для своих индексов j), находим неизвестные $\alpha_{22}^{(ij)}$, составляющие табл. 4. Машина $m - IV$ на этом этапе не работает.

Э т а п 11. Отыскиваются неизвестные $\alpha_{oo}^{(ij)} = z_{ij}^*$, т.е. новые сглаженные значения в узлах сетки $\Delta_x \Delta_y$. Для этого используется матричное уравнение в виде:

$$P_{jj} \alpha_{20}^{(j)} = P_{jj} z_j^o - (w_{1j} + w_{2j}) - 2T_1^o \sum_{l=0}^M v_{jl} \alpha_{20}^{(l)} - 2U^o \sum_{k=0}^M C_{jk} T_2^o \bar{\alpha}_{o_2}^{(k)} \quad (j = 0, 1, \dots, M). \quad (4.1)$$

Вычисление векторов $\alpha_{oo}^{(ij)}$ проще всего осуществить тремя шагами, на первом из которых определяются

$$P_{jj} z_j^o - (w_{1j} + w_{2j}) - 2T_1^o v_{jj} \alpha_{20}^{(j)}.$$

На втором шаге находятся суммы парных произведений

$$2T_1^o \sum_{l=0}^{j-1} v_{jl} \alpha_{20}^{(l)}$$

Это делается с использованием схемы алгоритма этапа 8(а), и ре-

результаты вычитаются из полученных на первом шаге. Наконец, третьим шагом вычисляются

$$2T_1 \sum_{l=j+1}^M v_{jl} a_{20}^{(l)} + 2U \sum_{k=0}^N c_{jk} T_2 \bar{\alpha}_{02}^{(k)}.$$

При этом используется схема алгоритма этапа 9; результаты вычитаются из предыдущих. Перед выполнением третьего шага придется организовать обмен информацией между ЭВМ с тем, чтобы каждая из них имела матрицу U^0 полностью.

В заключение данного этапа по величинам $p_{ij} a_{00}^{(ij)}$ находятся $a_{00}^{(ij)}$. Тем самым получена новая табл. I. Расчеты остальных коэффициентов по известным $a_{\lambda\mu}^{(ij)}$ ($\lambda, \mu = 0, 2$) описаны в задаче интерполирования бикубическими многозвенниками ([6], §3, этапы 5 и 6).

Так заканчивается решение задачи сглаживания.

Рассмотрим вопрос об эффективности использования машин в вычислительной системе при реализации алгоритма, если задачи сглаживания вдоль сечений решаются методом прогонки. Поскольку подготовительные и заключительные вычисления занимают малую часть времени и могут быть выполнены на одной машине, то существенна только эффективность при выполнении итерационного процесса (этапы 8, 9).

На этапе 8(а) ЭВМ, ведущие вычисления сумм парных произведений в верхней половине матрицы, выполняют для каждой клетки $10(N+1)$ операций и $N+1$ операцию сложения с предыдущими результатами. При равномерном распределении индексов между $Z-1$ машинами таких клеток на такте нужно рассчитать $[M/(Z-1)]$ или $[M/(Z-1)]+1$, где символ $[]$ означает округление до меньшего целого числа. Следовательно, каждая ЭВМ выполняет не менее $11(N+1)[M/(Z-1)]$ операций. Когда машины постепенно переходят в нижнюю половину матрицы, то там они выполняют не менее $9(N+1)[N/(Z-1)]$ операций.

ЭВМ, решающая задачи сглаживания, сначала формирует матрицу, $8(N+1)$ операций, а затем ожидает соседнюю ЭВМ, которой нужно выполнить $11(N+1)$ операций. Вычитание этих результатов из правых частей уравнений занимает $N+1$ операцию, а решение задачи сглаживания $47(N+1)$ операций. Всего, таким образом, на одном такте требуется время для выполнения

$59(N+1)$ операций.

Если мы не хотим, чтобы были простои у основной массы машин, то, очевидно, должно быть

$$11(N+1) \left[\frac{M}{Z-1} \right] \geq 59(N+1),$$

$$9(M+1) \left[\frac{N}{Z-1} \right] \approx 11(N+1) \left[\frac{M}{Z-1} \right],$$

откуда

$$\left[\frac{M}{Z-1} \right] \geq 6, \quad \left[\frac{N}{Z-1} \right] \approx \left[\frac{M}{Z-1} \right]. \quad (4.2)$$

В такой ситуации неэффективно будут загружены только машина, решающая задачи сглаживания, и взаимодействующая с ней, которая рассчитывает суммы парных произведений в более коротких столбцах, чем основная масса ЭВМ.

При реализации этапа 8(б) все машины выполняют одинаковый объем работ, а одна из них простаивает.

Для этапа 8(в) снова получаются выводы (4.2). Неэффективно используются машины во второй части тактов при сложении результатов, имеющих в разных ЭВМ. Однако нетрудно подсчитать, что потери времени здесь, даже при использовании большого числа машин $Z \sim 50$, не превосходят 10% всего времени, затрачиваемого на такте.

Потери времени на синхронизацию машин в системе [14] после выполнения очередного такта и кое-где внутри него в данной задаче не велики. Если воспользоваться оценками, сделанными для сумм парных произведений в [15], то можно показать, что потери составляют около 1%.

Описанный алгоритм предполагает, что числа N и M достаточно близкие. Если они сильно различаются, то для эффективной работы системы подобную схему вычислений придется применять отдельно для левой верхней и правой нижней частей матрицы A , а парные произведения в левой нижней и правой верхней её частях находить особыми сериями тактов.

Предлагаемая схема вычислений удобна в случае, если ЭВМ системы обладает достаточно большой оперативной памятью порядка $(N+M)NM/(Z-1)$ или быстрым обращением к внешней па-

мости. В противном случае может оказаться выгодным часть информации, необходимой для расчета элементов-клеток матрицы M , не запоминать, а вычислять в процессе выполнения итераций.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. BIRKHOFF, H.L. GARABEDIAN. Smooth surface interpolation. - J.Math.Phys., 1960, vol.39, N 4, 258-268.
2. J.H. AHLBERG, E.N. NILSON, J.L. WALSH. Extremal orthogonality and convergence properties of multi-dimensional splines. - J.Math.Anal. Appl., 1965, vol.12, N 1, 27-48.
3. J.H. AHLBERG, E.N. NILSON, J.L. WALSH. The theory of splines and their applications. New York-London, Acad.press 1967.
4. I.J. SCHOENBERG. Spline functions and the problem of graduation. - Proc.Nat.Acad.Sci. U.S., 1964, vol.52, N 4, 947-950.
5. G. BIRKHOFF., C.de BOOR. Error bounds for spline interpolation. - J.Math.Mech., 1964, vol.13, N 5, 827-835.
6. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Интерполирование бикубическими многозвенниками. Вычислительные системы, Новосибирск, 1970, вып.38, стр. 74-101.
7. Ю.С. ЗАВЬЯЛОВ. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания. - Данный сборник, стр.90-108
8. А.А. САМАРСКИЙ. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. - Ж. вычислит. математики и матем. физики, 1964, т.4, № 3, стр. 580-585.
9. А.А. САМАРСКИЙ. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа. - Ж. вычислит. математики и матем. физики, 1963, т.3, № 2, стр. 266-298.
10. 1. КОРН, Т.КОРН. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., "Наука", 1968.
11. С.Г. МИХЛИН. Курс математической физики. М., "Наука", 1968.
12. Ф.Р. ГАНТМАХЕР. Теория матриц, М., "Наука", 1966.
13. Д.К. ФАДДЕЕВ, В.Н. ФАДДЕЕВА. Вычислительные методы линейной алгебры. М.- Л., Физматгиз, 1963.
14. Э.В. ЗВРЕЙНОВ, Ю.Г. КОСАРЕВ. Однородные вычислительные системы высокой производительности, Новосибирск, "Наука" СО, 1966.
15. Ю.Г. КОСАРЕВ, С.В. НАРАЕВ. О потерях времени на синхронизацию в однородных вычислительных системах. - Вычислительные системы, Новосибирск, "Наука" СО, 1967, № 24, стр. 21-40.

Поступила в редакцию
6.X.1970 года