ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971 год Выпуск 43

УДК 530.10:681.142.181.4

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ n - МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ КООРДИНАТ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ БЕЙТМЕНА

В.Л. Дятлов

В данной работе развивается метод решения линейных дифференциально-разностных уравнений с четными центральными разностями для n - мерного пространства целочисленных координат с помощью функций Бейтмена [1] . Основное внимание уделяется анализу случаев кратных и нулевых корней; излагается способ построения решения граничной задачи для ограниченной области. Метод распространяется на уравнения, содержащие степени первых центральных разностей. Выбрана форма представления функций Бейтмена, удобная для перехода от операторного изображения к оригиналу.

Рассматриваемые вопросы возникают при решении линейных задач, описываемых дифференциально-разностными уравнениями (типа Пуассона, бигармоническими, системами уравнений типа Гельмгольца), встречающихся в физике твердого тела (кристаллическая решетка), в автоматике и вычислительной технике (интегральные схемы, вычислительные среды, коммутационные матрицы и т.п.).

Дифференциально-разностное уравнение, на основе которого можно решать указанные выше задачи с помощью функций Бейтмена, имеет вид:

$$(a_q\Delta_n^q + a_{q-1}\Delta_n^{q-1} + \dots + a_1\Delta_n + a_0)\,u(x-y) = -E_y\,\delta(x-y), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$ - целочисленные координаты текущей точки и точки отсчета, соответственно; u - искомая функция;

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i ,$$

где Δ_i - такой разностный оператор, что

$$\Delta_i u(x-y) = u(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_i+1-y_i, \dots, x_n-y_n) + u(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_i-1-y_i, \dots, x_n-y_n) - 2u(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_i-y_i, \dots, x_n-y_n);$$

$$\delta(x-y) \triangleq \delta(x_1-y_1, x_2-y_2, \dots, x_i-y_i, \dots, x_n-y_n) -$$

индекс Кронекера ($\delta = 1$ при $x=y$ и $\delta = 0$ при $x \neq y$); $a(p)$ или $a(i\omega)$, $E_y(p)$ или $E_y(i\omega)$ - преобразование Лапласа или Фурье соответственно операторов дифференцирования по времени и внешнего воздействия в точке y . Степень оператора Δ_n означает число повторных действий этого оператора; $2q$ -порядок уравнения (1).

На основе решения уравнения (1), используя принцип суперпозиции, можно построить решения уравнения с правой частью вида

$$\sum_{(k)} E_{y_k}\,\delta(x-y_k) ,$$

где сумма берется по точкам y_k , в которых действуют внешние источники E_{y_k} .

1. Решение уравнения (1) для неограниченной области изменения x может быть получено с помощью функций Бейтмена вида:

$$Б(s, n, 0; x-y) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi}\, e^{-2n\xi} \prod_{i=1}^{n} I_{x_i-y_i}(2\xi)\, d\xi , \qquad (2)$$

(где $I_{x_i - y_i}$ (2ξ) – функции Бесселя мнимого аргумента), благодаря свойству этих функций:

$$\Delta_n Б(s, n, 0; x-y) = sБ(s, n, 0; x-y) - \delta(x-y). \tag{3}$$

Необходимым условием сходимости входящего в функцию Бейтмена интеграла является $Re\, s \geqslant 0$. Выражение вида:

$$u(x-y) = E_y\, a_q^{-1} \sum_{i=1}^{q} \frac{Б(s_i, n, 0; x-y)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{q} (s_i - s_j)}, \tag{4}$$

где s_i – корни алгебраического уравнения:

$$a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0, \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению (I). В (4) коэффициенты при функциях Бейтмена подобраны так, чтобы исключить члены, содержащие $\Delta_n^q \delta(x-y)$, ..., $\Delta_n \delta(x-y)$.

Решение уравнения (I) при кратных корнях можно получить из (4) предельными переходами. Например, при двух кратных корнях $s_1 = s_2$ нужно положить $s_1 = s_2 + h$ и устремить h к нулю. Тогда для корня s_t кратности ℓ в формуле (4) появятся функции вида:

$$Б(s_t, n, \ell; x-y) = \int_0^\infty \xi^\ell e^{-s_t \xi} e^{-2n\xi} \prod_{i=1}^{n} I_{x_i - y_i}(2\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

а для нулевого корня кратности e соответствующие функции вида:

$$Б(0, n, e; x-y) = \lim_{s \to +0} \int_0^\infty \xi^\ell e^{-s\xi} e^{-2n\xi} \prod_{i=1}^{n} I_{x_i - y_i}(2\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Из рассмотрения асимптотического разложения функций Бесселя мнимого аргумента [2]:

$$I_{\Delta x_i}(2\xi) = \frac{e^{2\xi}}{2\sqrt{\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2\xi}\left[\Delta x_i^2 - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2^4\xi^2}\left[\Delta x_i^2 - \frac{1}{4}\right]\left[\Delta x_i^2 - \frac{3^2}{4}\right] - \frac{1}{2^6\xi^3}\left[\Delta x_i^2 - \frac{1}{4}\right]\left[\Delta x_i^2 - \frac{3^2}{4}\right] \times \left[\Delta x_i^2 - \frac{5^2}{4}\right] + \ldots \right\}, \quad \xi \to \infty, \ \Delta x_i = x_i - y_i, \tag{8}$$

следует, что интегралы, входящие в функции $Б(0, n, \ell, x-y)$, сходятся только при

$$\ell - \frac{n}{2} < -1. \tag{9}$$

Очевидно, что какое-либо сокращение m первых членов разложения i-ой бесселевой функции в (7) обеспечит сходимость интеграла уже при:

$$\ell - \frac{n}{2} - m < -1. \tag{10}$$

Такое сокращение можно получить, если правую часть (I) взять в виде:

$$-E_i \left[\sum_{j=1}^{g-1} e_{ij}\, \delta(x_1 - y_1, \ldots, x_i - y_{ij}, \ldots, x_n - y_n) + \delta(x_1 - y_1, \ldots, x_i - y_{ig}, \ldots, x_n - y_n) \right]; \ (e_{ig} = 1) \tag{11}$$

и определенным образом подобрать число и значения величин e_{ij} и y_{ij}, (j = 1,2,...,g). При правой части (I) вида (II) часть решения (I) для ℓ – кратного нулевого корня с точностью до коэффициента будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{g-1} e_{ij}\, Б(0, n, e; \ldots, x_i - y_{ij}, \ldots) + Б(0, n, e; \ldots, x_i - y_{ig}, \ldots).$$

Таким образом, задача подбора величин e_{ij} и y_{ij} состоит в том, чтобы в выражении:

$$\sum_{j=1}^{g-1} e_{ij}\, I_{x_i - y_{ij}}(2\xi) + I_{x_i - y_{ig}}(2\xi)$$

независимо от величины x_i были сокращены m первых членов разложения всех i-ых бесселевых функций. Условие сокращения m первых членов будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{g-1} \bar{y}_{ij}^{\,t}\, e_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0; \end{cases} \quad t = 0, 1, \ldots 2(m-1), \tag{12}$$

где $\bar{y}_{ij} = y_{ij} - y_i^{(0)}$; $y_i^{(0)}$ – произвольное смещение по оси i; $\bar{y}_{i0} = 0$ (e_{i0} = I в точке $y_i^{(0)}$).

Если считать e_{ij} неизвестными при заданных $\bar{y}_{ij}$, то при $2m-1=q-1$ определитель системы (I2) есть определитель Вандермонда, который, как известно [3], отличен от нуля при $\bar{y}_{ij}$, отличных друг от друга, то есть при указанных условиях все значения e_{ij} могут быть определены как функции $\bar{y}_{ij}$.

Так как в функции Бейтмена входит произведение функций Бесселя, то применение описанных операций по другим координатам ослабит условие сходимости соответственно числу сокращаемых членов разложений. Однако от повторного применения таких операций по одной и той же оси условие сходимости не изменится.

2. Решения граничных задач для ограниченной области могут быть построены на основе выражения (4) для неограниченной области изменений переменных (аналогично методу решения граничных задач в теории потенциала [4]).

Предположим, например, что на данной (точечной) границе C имеется N точек с заданными значениями $u_c(x_z)$, z = I, 2,..., N. Требуется найти значения $u(x)$ внутри (вне) области D, ограниченной поверхностью C. Полагая, что в каждой точке границы C имеется неизвестный источник E_z, из (4) для всего пространства получим:

$$u(x) = \sum_{z=1}^{N} E_z \alpha_q^{-1} \sum_{i=1}^{q} \frac{Б(s_i, n, 0; x - y_z)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{q} (s_i - s_j)}, \qquad (I3)$$

где y_z – точки на границе C.

При $x = x_t$ (t = I,2,..., N) на границе C получим:

$$u(x_t) = u_c(x_t) = \sum_{z=1}^{N} E_z \alpha_q^{-1} \sum_{i=1}^{q} \frac{Б(s_i, n, 0; x_t - y_z)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{q} (s_i - s_j)}. \qquad (I4)$$

Таким образом, все значения E_z для (I3) могут быть определены из системы N уравнений (I4), если определитель этой системы не равен нулю. Для получения ограниченных решений краевой задачи при нулевых корнях границу C необходимо представить группами точек, согласно (I0), (II), (I2).

3. Изложенный метод решения дифференциально- – разностных уравнений со степенями вторых конечных разностей можно распространить также на уравнения, содержащие степени первых центральных разностей:

$$\nabla_n = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \quad , \text{ где } \nabla_i \text{— такие операторы, что}$$

$$\nabla_i u = u(x_1, x_2, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) - u(x_1, x_2, \ldots, x_i - 1, \ldots, x_n).$$

Для этих уравнений в качестве компонент решения можно использовать следующие функции Бейтмена:

$$Б^*(s, n, 0; x) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \prod_{i=1}^{n} J_{x_i}(2\xi) d\xi\,, \qquad (I5)$$

благодаря их свойству:

$$\nabla_n Б^*(s, n, 0; x) = -s Б^*(s, n, 0; x) + \delta(x).$$

В формуле (I5) $J_{x_i}(2\xi)$ – бесселева функция первого рода. Следует заметить, что для построения функций Бейтмена пригодны также функции Макдональда, Неймана, Ганкеля, Ангера, Вебера, полиномы Неймана [2], так как их рекуррентные формулы типа:

$$A_{v+1}(z) \pm A_{v-1}(z) = \pm 2 \frac{dA_v(z)}{dz},$$

где $A_v(z)$ – любая из перечисленных функций, позволяют получать операторную алгебраизацию уравнений типа (I).

4. Выбранная форма функций Бейтмена удобна при переходах от операторных изображений к оригиналам. Действительно, согласно (4), изображения компонент решения уравнения (I) имеют вид:

$$F(p) \cdot \int_0^\infty e^{-S(p)\xi} e^{-2n\xi} \prod_{i=1}^{n} I_{\Delta x_i}(2\xi) d\xi\,, \qquad (I6)$$

и если известен оригинал функции

$$F(p) e^{-S(p)\xi} \doteq f(t, \xi),$$

то оригинал изображения (I6) будет иметь вид:

$$\int_0^\infty f(t,\xi)\, e^{-2n\xi} \prod_{i=1}^{n} I_{\Delta x_i}(2\xi)\, d\xi . \qquad (I7)$$

Таким образом, в данном случае изображение усложняется только из-за экспоненты $e^{-S(p)\xi}$. Изображение вида $F(p)e^{-S(p)\xi}$ используется в формулировке теоремы Эфроса, и для частных случаев этого изображения имеется большое число справочных данных [5].

5. Приложение. Изложенный выше метод может быть также применен для решения линейных дифференциально-разностных уравнений, содержащих смешанные разности и разности отличных друг от друга размерностей. В качестве примера рассматривается отыскание решения следующего уравнения:

$$\kappa(\Delta_p + \Delta_q)u - \Delta_p \Delta_q u = -\delta(p,q), \qquad (I8)$$

где p, q – целочисленные координаты;

$$\Delta_p u = u(p+1,q) + u(p-1,q) - 2u(p,q);$$

$\delta(p,q)$ – индекс Кронекера.

Для получения решения (I8) используется следующее интегральное выражение:

$$u = X_{p,q}[f] \equiv \int_0^\infty I_p(2\xi_p)\, d\xi_p \int_0^\infty f(\xi_p,\xi_q)\, I_q(2\xi_q)\, d\xi_q , \qquad (I9)$$

где $f(\xi_p,\xi_q)$ – неизвестная функция.

Используя рекуррентные формулы для бесселевых функций и интегрирование по частям, можно установить следующие свойства функций $X_{p,q}[f]$:

$$\Delta_p X_{p,q}[f] = -2X_{p,q}[f] - X_{p,q}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_p}\right] - \delta(p)\int_0^\infty I_q(2\xi_q) f(0,\xi_q)\, d\xi_q ; \qquad (20)$$

$$(\Delta_p + \Delta_q)X_{p,q}[f] = -4X_{p,q}[f] - X_{p,q}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_p} + \frac{\partial f}{\partial \xi_q}\right] - \delta(p)\int_0^\infty I_q(2\xi_q) f(0,\xi_q)\, d\xi_q - \delta(q)\int_0^\infty I_p(2\xi_p) f(\xi_p,0)\, d\xi_p ; \qquad (2I)$$

$$\Delta_p \Delta_q X_{p,q}[f] = 4X_{p,q}[f] + 2X_{p,q}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_p} + \frac{\partial f}{\partial \xi_q}\right] + X_{p,q}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_p \partial \xi_q}\right] + \delta(p)\int_0^\infty I_q(2\xi_q)\left[2f(0,\xi_q) + \frac{\partial f(0,\xi_q)}{\partial \xi_q}\right] d\xi_q + \delta(q)\int_0^\infty I_p(2\xi_p)\left[2f(\xi_p,0) + \frac{\partial f(\xi_p,0)}{\partial \xi_p}\right] d\xi_p + \delta(p,q) f(0,0). \qquad (22)$$

В (20) выражение вида $X_{p,q}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_p}\right]$ означает, что в интеграле (I9) функция f заменяется функцией $\frac{\partial f}{\partial \xi_p}$ и так для

$$X_{p,q}\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_p} + \frac{\partial f}{\partial \xi_q}\right], \quad X_{p,q}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_p \partial \xi_q}\right]$$

в (2I) и (22).

Из (2I), (22) и (I8), приравнивая нулю члены при $\delta(p)$, $\delta(q)$, $\delta(p,q)$, можно получить те условия, которым должна удовлетворять функция f, чтобы (I9) было решением уравнения (I8):

$$(4\kappa + 4)f + (\kappa + 2)\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_p} + \frac{\partial f}{\partial \xi_q}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = 0 ; \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f(0,\xi_q)}{\partial \xi_q} + (\kappa+2) f(0,\xi_q) = 0 , \\ &\frac{\partial f(\xi_p,0)}{\partial \xi_p} + (\kappa+2) f(\xi_p,0) = 0 , \qquad f(0,0) = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Уравнение (23) с условиями (24) при помощи подстановки:

$$f(\xi_p,\xi_q) = exp\left[-(\kappa+2)(\xi_p+\xi_q)\right] \varphi(\xi_p,\xi_q), \qquad (25)$$

сводится к краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_p \partial \xi_q} - \kappa^2 \varphi = 0 ; \quad \varphi(\xi_p,0) = 1, \quad \varphi(0,\xi_q) = 1 ,$$

существование и единственность решения которой доказана [4]. Это решение приводится, например, в [6]:

$$\varphi(\xi_p,\xi_q) = I_0\left(2\kappa\sqrt{\xi_p \xi_q}\right). \qquad (26)$$

Общность рассмотренного метода позволяет утверждать, что отыскание решений линейных дифференциально-разностных уравнений общего вида сводится к рассмотрению соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных.

Литература

1. ДЯТЛОВ В.Л. Распространение возбуждений от точечного источника в трехмерных периодических решетках.-Данный сборник, стр. 142-145.

2. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. "Таблицы интегралов сумм,рядов и произведений", ГИФ-МЛ, М., 1962, стр. 952, 8,339 № 4;стр. 965-1005, 8.451 № 5; 8.471, № 2; 8.486, № 2, № 11; 8,582,№ 1, № 2.

3. КОРН Г., КОРН Т. "Справочник по математике", "Наука", ГРФ-МЛ, М., 1970, стр. 44.

4. СОБОЛЕВ С.Л. "Уравнения математической физики","Наука", ГРФ-МЛ, М., 1966, стр. 208-228, стр. 63-77.

5. ДИТКИН В.А., ПРУДНИКОВ А.П. "Интегральные преобразования и операционное исчисление", ГИФ-МЛ, М., 1961, стр. 42 и 124-125.

6. КУРАНТ Рихард. "Уравнения с частными производными", "Мир", М., 1964, гл. У, стр. 455.

Поступила в редакцию
16.02.1971 г.