ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971г. вып.44

УДК 621.391.

РЕКУРСИВНЫЙ МОДУЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ

Б.М. Курилов

Рассмотрим класс функций $f(x)$, заданных на конечном интервале $[x_0, x_1]$, для которых ряд Фурье имеет конечное число членов

$$f(x) = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} C_n e^{jn\omega_0 x}, \tag{1}$$

где

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-j\omega_0 n x}\, dx,$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T = x_1 - x_0.$$

Покажем, что в этом случае исходная функция $f(x)$ однозначно представляется рядом

$$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\,\frac{\sin\left(\omega_c + \frac{\omega_0}{2}\right)(x - x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x - x_m)},$$

коэффициенты которого есть отсчеты значений функции, равномерно расположенные на интервале T с шагом $\frac{T}{2(n_{max}+1)}$.

Действительно, если выбрать N равноотстоящих точек на протяжении периода T так, что

$x_m = m\Delta x$, $\Delta x = \frac{T}{N}$, m – целое, где $N \geq 2(n_{max}+1)$ – числа степеней свободы функции $f(x)$, то коэффициенты Фурье для этой функции можно вычислить точно методом конечных сумм [I] .

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\, e^{-jn\omega_0 x_m} . \qquad (2)$$

Подставляя это выражение в (I) и меняя порядок суммирования , получим

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} e^{jn\omega_0(x-m\Delta x)} .$$

Но в силу тождества Лагранжа

$$\sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} e^{jn\omega_0(x-m\Delta x)} = \frac{\sin\left(n_{max}+\frac{1}{2}\right)\omega_0(x-m\Delta x)}{\sin\frac{\omega_0(x-\Delta x m)}{2}} ,$$

тогда

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\,\frac{\sin\left(n_{max}+\frac{1}{2}\right)\omega_0(x-m\Delta x)}{\sin\frac{\omega_0(x-m\Delta x)}{2}} ,$$

или, вводя обозначение $\omega_c = \omega_0 n_{max}$, получим

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\,\frac{\sin\left(\omega_c+\frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)} . \qquad (3)$$

Следовательно, функция $f(x)$,заданная на конечном интервале и отвечающая условию (I), может быть представлена рядом (3) , коэффициенты которого есть отсчеты значений функции, равномерно расположенные на периоде с интервалом $\frac{T}{2(n_{max}+1)}$.

Справедливо и обратное утверждение: функция $f(x)$,пред - ставленная рядом (3), имеет дискретный спектр не выше чем ω_c .

Действительно, применяя к ряду (3) тождество Лагранжа и учитывая (2), получим конечный ряд Фурье с верхней частотой ω_c.

В том случае, когда функция $f(x)$ бесконечна по оси x и такова, что ω_0 достаточно мало по сравнению с ω_c (то есть n_{max} достаточно велико), ряд (3) переходит в широко известный ряд Котельникова [2] или для периодической функции-в ряд,

представленный в работе [3] .

Докажем следующее утверждение : функция $f(x)$,удовлетворяющая условию (I), может быть представлена как

$$f(x)=A_0+\Psi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+\varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x ,$$

где A_0 – постоянная составляющая, а $\Psi(x)$ и $\varphi(x)$ – некоторые функции, имеющие дискретный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-\omega_0}{2}$.

Ряд Фурье для функции, удовлетворяющей (I), можно записать в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n_{max}}\left(a_n\cos\omega_0 nx+b_n\sin\omega_0 nx\right) ,$$

а коэффициенты ряда вычислить точно методом конечных сумм по выражениям

$$a_n=\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\cos\omega_0 n x_m ,$$

$$b_n=\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\sin\omega_0 n x_m . \qquad (4)$$

Подставляя эти выражения в ряд Фурье и меняя порядок суммирования, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\sum_{n=1}^{n_{max}}\left(\cos n\omega_0 x_m\cdot\cos n\omega_0 x + \sin n\omega_0 x_m\cdot\sin n\omega_0 x\right)$$

или после тригонометрических преобразований

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\sum_{n=1}^{n_{max}}\cos n\omega_0(x-x_m) =$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n_{max}}\cos n\omega_0(x-x_m)-\frac{1}{2}\right] .$$

Воспользовавшись снова тождеством Лагранжа, получим

$$f(x)=\frac{a}{2}+\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\left(\frac{\sin\left(n_{max}+\frac{1}{2}\right)\omega_0(x-x_m)}{2\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m)\, \frac{\sin\left(\omega_c + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m) - \sin\left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)}.$$

Если теперь заменить разность синусов произведением и произ - вести упрощения, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + 2\sum_{m=1}^{N} \cos\left(\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x - \frac{\omega_c+\omega_0}{2}x_m\right)\cdot f(x_m) \times \tag{5}$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{N\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)};$$

преобразуя второе слагаемое в аргументе косинуса, запишем

$$\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x_m = \frac{\omega_c+\omega_0}{\omega_c+\omega_0}\cdot\frac{\pi}{2}m = \frac{\pi}{2}m.$$

Тогда (5) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + 2\sum_{m=1}^{N} \cos\left(\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x - \frac{\pi}{2}m\right)\cdot f(x_m) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{N\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)}$$

или

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left[\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\cos\left(\frac{\pi}{2}m\right) f(x_m)\, \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)}\right] \times$$

$$\times \cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x +$$

$$+\left[\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi}{2}m\right) f(x_m)\, \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)}\right] \times$$

$$\times \sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x.$$

Обозначая выражения, заключенные в квадратные скобки, через $\Psi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно, получим

$$f(x) = A_0 + \Psi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x + \varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x, \tag{6}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{2}{N}\sum_{\ell=1}^{N/2}(-1)^{\ell} f(x_{2\ell})\, \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_{2\ell})}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_{2\ell})}$$

$$m = 2\ell, \quad \ell \text{ – целое,}$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{N}\sum_{\ell=0}^{N/2}(-1)^{\ell} f(x_{2\ell+1})\, \frac{\sin\left(\frac{\omega_c-\omega_0}{2} + \frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_{2\ell+1})}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_{2\ell+1})} \tag{7}$$

$$m = 2\ell+1,$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(x_m).$$

Функции $\Psi(x)$ и $\varphi(x)$ предотавляются рядом, аналогичным ряду (3), и, следовательно, имеют дискретный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-\omega_0}{2}$.

Следует заметить, что если $f(x)$ имеет спектр от ω_1 до ω_c и не содержит постоянной составляющей, то (6) принимает вид известного разложения Котельникова [2]

$$f(x) = \Psi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_1}{2}x + \varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_1}{2}x.$$

Покажем **далее, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (I), может быть представлена как**

$$f(x) = A_0 + A(x)\cos\left[\rho_0 x + \int_0^x \rho(x)\,dx\right],$$

где A_0, ρ_0 – постоянные составляющие, а $A(x)$ и $\rho(x)$ – модулирующие функции, имеющие дискретный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-\omega_0}{2}$.

Рассмотрим центрированную относительно нуля функцию $F(x)$, **определяемую выражением**

$$F(x) = f(x) - A_0$$

или

$$F(x) = \Psi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x + \varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x, \tag{8}$$

и проведем для неё преобразование Гильберта [4]

$$G(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y)}{y-x}\,dy. \qquad (9)$$

Здесь $G(x)$ есть функция, сопряженная по Гильберту с функцией $F(x)$ и восстанавливающая её с помощью двойственного соотношения

$$F(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(y)}{y-x}\,dy,$$

а интегралы рассматриваются в смысле главного значения по Коши.

Подставляя в (9) значение $F(x)$ в виде ряда Фурье и интегрируя, получим

$$G(x)=\sum_{n=1}^{n_{max}}(a_n\sin\omega_0 nx-b_n\cos\omega_0 nx).$$

Тогда, учитывая (4), можно записать

$$G(x)=\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}f(x_m)\sum_{n=1}^{n_{max}}(\cos\omega_0 nx_m\cdot\sin\omega_0 nx-$$

$$-\sin n\omega_0 x_m\cdot\cos n\omega_0 x)=$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}f(x_m)\sum_{n=1}^{n_{max}}\sin\omega_0 n(x-x_m).$$

Воспользовавшись тождеством Лагранжа и сделав тригонометрические преобразования, аналогичные (5), получим окончательное выражение для функции $G(x)$:

$$G(x)=\Psi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\varphi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x. \qquad (10)$$

Введем функции $A(x)$ и $\alpha(x)$, определяемые через сопряжение по Гильберту функции следующим образом:

$$A(x)=\sqrt{F^2(x)+G^2(x)}, \qquad (11)$$

$$\alpha(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{G(x)}{F(x)}.$$

Учитывая (8) и (10), запишем

$$A(x)=\mathrm{sqrt}\Big[\Psi^2(x)\cos^2\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+2\,\Psi(x)\varphi(x)\cdot\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\,\times$$

$$\times\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+\varphi^2(x)\sin^2\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+\Psi^2(x)\cdot\sin^2\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-$$

$$-2\,\Psi(x)\cdot\varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\cdot\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+$$

$$+\varphi^2(x)\cdot\cos^2\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\Big]$$

или

$$A(x)=\sqrt{\Psi^2(x)+\varphi^2(x)}. \qquad (12)$$

Для функции $\alpha(x)$ имеем равенство

$$\operatorname{tg}\alpha(x)=\frac{G(x)}{F(x)};$$

$$\frac{\sin\alpha(x)}{\cos\alpha(x)}=\frac{\Psi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\varphi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x}{\Psi(x)\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+\varphi(x)\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x};$$

$$\Psi(x)\Big[\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\cdot\sin\alpha(x)-\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\cdot\cos\alpha(x)\Big]=$$

$$=-\varphi(x)\Big[\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\cdot\sin\alpha(x)+\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\cdot\cos\alpha(x)\Big];$$

$$\Psi(x)\sin\Big[\alpha(x)-\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\Big]=-\varphi(x)\cos\Big[\alpha(x)-\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\Big];$$

$$\Psi(x)\sin\Big[\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\Big]=\varphi(x)\cos\Big[\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\Big];$$

$$\operatorname{tg}\Big[\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\Big]=\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} \qquad (13)$$

или

$$\alpha(x)=\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x)}{\Psi(x)}. \qquad (14)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$\Psi(x)=A(x)\cos\Big[\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\Big], \qquad (15)$$

$$\varphi(x)=A(x)\sin\Big[\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\Big].$$

Подставляя эти выражения в (6), получим

$$f(x)=A_0+A(x)\left[\cos\left(\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\right)\cdot\cos\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x-\alpha(x)\right)\cdot\sin\frac{\omega_c+\omega_0}{2}x\right]$$

или

$$f(x)=A_0+A(x)\cos\left[\alpha(x)\right].$$

Дифференцируя (I4) по x и вводя обозначения

$$\frac{\omega_c+\omega_0}{2}=\rho_0 ,$$
$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]=\rho(x), \qquad (I6)$$

получим окончательно

$$f(x)=A_0+A(x)\cos\left[\rho_0 x+\int_0^x\rho(x)\,dx\right]. \qquad (I7)$$

Известно [5], что сопряженные по Гильберту функции $F(x)$ и $G(x)$ обладают следующим свойством : если одна из этих функций имеет в некоторой точке экстремум, то другая обращается в этой точке в нуль. В этом можно убедиться, разлагая функцию в ряд Тейлора в окрестности экстремальной точки и интегрируя (9) по окрестности этой точки. Тогда из (II) имеем

$$A(x)=\left|F(x)\right|_{x=x_{extr}}.$$

Возводя (II) в квадрат и дифференцируя по x, получим

$$\frac{dA(x)}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=x_{extr}}.$$

Таким образом, функция $A(x)$ в экстремальных точках равна по модулю исходной функции $F(x)$ и имеет с ней в этих точках общую касательную, то есть обладает всеми свойствами огибающей или амплитудно-модулирующей функции.

Функция $\rho(x)$ определена как производная от фазы, имеет размерность частоты и, следовательно, является частотно-модулирующей функцией. С другой стороны, модулирующие функции $A(x)$ и $\rho(x)$ определены через функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ (I2),(I5) и (I6) и на основании теоремы о спектрах [6] имеют дискрет-

ный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-\omega_0}{2}$.

ТЕОРЕМА. **Функция $f(x)$, заданная на конечном интервале и удовлетворяющая условию (I), однозначно представляется матрицами $\|A_{ij}\|$ и $\|\rho_{ij}\|$, элементы которых есть постоянные составляющие в рекурсивном разложении $f(x)$ по её модулирующим функциям.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (I), может быть представлена через постоянные составляющие A_0, ρ_0 и модулирующие функции $A(x)$ и $\rho(x)$, имеющие дискретный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-\omega_0}{2}$

$$f(x)=A_0+A(x)\cos\left[\rho_0 x+\int_0^x\rho(x)\,dx\right].$$

Введем двойную индексацию по i и j и перепишем это выражение в следующем виде:

$$f(x)=A_{11}+A_{11}(x)\cos\left[\rho_{11}x+\int_0^x\rho_{11}(x)\,dx\right]$$

или

$$f(x)\Leftrightarrow\begin{vmatrix}A_{11}, & \rho_{11}\\ A_{11}(x), & \rho_{11}(x)\end{vmatrix}.$$

Модулирующие функции $A_{11}(x)$ и $\rho_{11}(x)$ имеют ограниченный дискретный спектр, отвечают условию (I) и, следовательно, в свою очередь могут быть представлены через свои модулирующие функции и постоянные составляющие

$$A_{11}(x)=A_{21}+A_{21}(x)\cos\left[\rho_{21}x+\int_0^x\rho_{21}(x)\,dx\right],$$
$$\rho_{11}(x)=A_{22}+A_{22}(x)\cos\left[\rho_{22}x+\int_0^x\rho_{22}(x)\,dx\right].$$

Тогда

$$f(x)\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}A_{11}, & & \rho_{11}. & \\ A_{21}, & A_{22}, & \rho_{21}, & \rho_{22}\\ A_{21}(x), & A_{22}(x), & \rho_{21}(x), & \rho_{22}(x)\end{matrix}\right|.$$

Функции $A_{21}(x)$, $A_{22}(x)$, $\rho_{21}(x)$, $\rho_{22}(x)$ также отвечают условию (I) и тоже могут быть представлены через свои модулирующие функции и постоянные составляющие

$$A_{21}(x)=A_{31}+A_{31}(x)\,Cos\left[\rho_{31}x+\int_0^x\rho_{31}(x)dx\right],$$
$$A_{22}(x)=A_{32}+A_{32}(x)\,Cos\left[\rho_{32}x+\int_0^x\rho_{32}(x)dx\right],$$
$$\rho_{21}(x)=A_{33}+A_{33}(x)\,Cos\left[\rho_{33}x+\int_0^x\rho_{33}(x)dx\right],$$
$$\rho_{22}(x)=A_{34}+A_{34}(x)\,Cos\left[\rho_{34}x+\int_0^x\rho_{34}(x)dx\right]$$

или

$$f(x)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} A_{11}, & \rho_{11} \\ A_{21},A_{22}, & \rho_{21},\rho_{22} \\ A_{31},A_{32},A_{33},A_{34}, & \rho_{31},\rho_{32},\rho_{33},\rho_{34} \\ A_{31}(x),A_{32}(x),A_{33}(x),A_{34}(x) & \rho_{31}(x),\rho_{32}(x),\rho_{33}(x),\rho_{34}(x) \end{array}\right|$$

и так далее. В общем виде функции $A_{ij}(x)$ и $\rho_{ij}(x)$ могут быть представлены через свои модулирующие функции и постоянные составляющие с помощью рекурсивного соотношения следующего вида:

$$A_{ij}(x)=A_{i+1,j}+A_{i+1,j}(x)\,Cos\left[\rho_{i+1,j}x+\int_0^x\rho_{i+1,j}(x)dx\right],$$

$$\rho_{ij}(x)=A_{i+1,j+\alpha}+A_{i+1,j+\alpha}(x)\,Cos\left[\rho_{i+1,j+\alpha}x+\int_0^x\rho_{i+1,j+\alpha}(x)dx\right],$$

где $\alpha=2^{i-1}$, а исходная функция $f(x)$ однозначно представляется матрицами

$$f(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} A_{11} \\ A_{21},A_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{\ell 1},A_{\ell 2},\ldots,A_{\ell\alpha} \\ A_{\ell 1}(x),A_{\ell 2}(x),\ldots,A_{\ell\alpha}(x) \end{array}\right|;\left|\begin{array}{l} \rho_{11} \\ \rho_{21},\rho_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho_{\ell 1},\rho_{\ell 2},\ldots,\rho_{\ell\alpha} \\ \rho_{\ell 1}(x),\rho_{\ell 2}(x),\ldots,\rho_{\ell\alpha}(x) \end{array}\right\},$$

элементы которых есть постоянные составляющие, и лишь последняя строка содержит модулирующие функции ℓ-го порядка, имеющие дискретный спектр не выше чем $\frac{\omega_c-(2^\ell-1)\omega_0}{2^\ell}$. Эти функции могут быть представлены в виде ряда

$$A_{\ell j}(x),\rho_{\ell j}(x)=\frac{1}{N_\ell}\sum_{m=1}^{N_\ell}A_{\ell j}(x_m),\rho_{\ell j}(x_m)\frac{\sin\left(\frac{\omega_c-(2^\ell-1)\omega_0}{2^\ell}+\frac{\omega_0}{2}\right)(x-x_m)}{\sin\frac{\omega_0}{2}(x-x_m)},\qquad(18)$$

где $$N_\ell=2\left(\frac{\frac{\omega_c-(2^\ell-1)\omega_0}{2^\ell}}{\omega_0}+1\right).$$

Нетрудно видеть, что при

$$\ell>\ln 2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}+1\right)\qquad(19)$$

величина N_ℓ будет меньше единицы и, следовательно, ряд (18) будет тождественно равен нулю. Подставляя в неравенство (19) $\omega_c=\omega_0 n_{max}$, получим

$$\ell>\ln 2(n_{max}+1)$$

или

$$\ell>\ln N.\qquad(20)$$

Таким образом, при глубине разложения ℓ большей чем $\ln N$, функция $f(x)$ однозначно представляется конечными матрицами

$$f(x)\Longleftrightarrow\|A_{ij}\|,\ \|\rho_{ij}\|,$$

элементы которых есть постоянные составляющие в рекурсивном разложении $f(x)$ по её модулирующим функциям, а все модулирующие функции порядка выше ℓ-го тождественно равны нулю. Этим теорема доказана.

Можно надеяться, что предлагаемый в настоящей работе модуляционный анализ функций окажется эффективным при решении целого ряда прикладных задач, в частности, при анализе речевого сигнала, и даст существенное сокращение описания и затрат на вычисления по сравнению с широко применяемым спектральным анализом или представлением функций в виде дискретных отсчетов.

Литература

1. Л.Бриллюэн. Наука и теория информации. М., ФМ, 1960.
2. Котельников В.А. О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам связи. М., 1933.
3. Турбович И.Т. Разложение периодических функций в ряд, аналогичный ряду Котельникова. Радиотехника, т.22, №8, 1967.
4. Князев П.Н. Интегральные преобразования. Изд. ВШ., Минск, 1969, стр.130.
5. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. ч.I, Изд. "Сов.Радио", М., 1966, стр.166.
6. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М., Л., 1952, стр. 23.

Поступила в редакцию 26.2.1971 г.