ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

1971 г. вып. 44

УДК 621.391:518.5.

МИНИМИЗАЦИЯ ТАБЛИЦ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ю.В. Мерекин

Объектом исследования настоящей работы являются таблицы действительных чисел. Для заданных условий различения двух чисел одного столбца ставится и решается задача минимизации таблицы. В результате минимизации из исходной таблицы путем удаления некоторых столбцов получаются все неизбыточные таблицы, обладающие введенной мерой различения для любой пары строк. Трудоемкость предложенного алгоритма существенно отличается от полного перебора.

Минимизация таблиц действительных чисел оказывается полезной при решении задач оптимального контроля и диагноза.

Рассмотрим конечную таблицу действительных чисел $T(m,n)$, содержащую m строк и n столбцов. Столбцы с номерами 1,2, ..., n назовем основными, столбец $n+1$ -типизирующим, n - размерностью таблицы. Строку назовем полной, если известно значение всех основных координат, в противном случае - частичной. Для всех строк значение координаты $n+1$ известно.

Для таблицы $T(m,n)$ зафиксируем: положительное δ - т и п и з и р у ю щ е е число, поставленное в соответствие $n+1$ столбцу; положительные ε_t $(t=1,2,\dots n)$ - р а з л и ч а ю щ и е числа, поставленные в соответствие столбцам 1,2, ..., n; функцию $\Delta=f(\beta_i,\beta_j)$, где Δ - целое положительное, β_i, β_j - значения $n+1$-й координаты i-й и j-й строк $(i,j=1,2,\dots m;\ i\neq j)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любой таблицы $T_1(m,n-k)$, полученной из таблицы $T(m,n)$ удалением k столбцов, величины δ, ε_t

и их прежние соответствия столбцам, а также функция $\Delta=f(\beta_i,\beta_j)$ остаются неизменными.

Две строки $y_i, y_j \in T_1(m,n-k)$, $k=0,1,\dots,n-1$,

$$y_i=(\alpha_{i,1};\alpha_{i,2};\dots;\alpha_{i,n-k};\beta_i),\ y_j=(\alpha_{j,1};\alpha_{j,2};\dots;\alpha_{j,n-k};\beta_j) \quad (1)$$

назовем о д н о т и п н ы м и, если $|\beta_i-\beta_j|<\delta$, и р а з н о т и п н ы м и, если $|\beta_i-\beta_j|\geq\delta$.

Две строки $y_i, y_j \in T_1(m,n-k)$ (1) назовем ε - р а з л и ч и м ы м и по координате t, $t=1,2,\dots,n-k$, если $|\alpha_{i,t}-\alpha_{j,t}|>\varepsilon_t$.

ЗАМЕЧАНИЕ. ε - различение частичных строк определяется только по координатам, значение которых известно.

Две строки $y_i, y_j \in T(m,n-k)$ (1) назовем Δ - р а з л и ч и м ы м и, если они ε -различимы не менее, чем по Δ координатам одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Таблицу $T_1(m,n-k)$, $k=0,1,\dots,n-1$ назовем п р а в и л ь н о й, если любые две разнотипные строки Δ - различимы. В противном случае таблица - неправильная.

Правильность таблицы $T_1(m,n-k)$ зависит от набора различающих чисел $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-k})$, типизирующего числа δ и функции $\Delta=f(\beta_i,\beta_j)$.

Пусть таблица $T(m,n)$ - правильная. Понизим её размерность, удалив k столбцов. В результате получим таблицу $T_1(m,n-k)$. Если она правильная, то будем говорить, что она с л е д у е т з а $T(m,n)$. Обозначение: $T(m,n) \Rightarrow T_1(m,n-k)$ или $T_1(m,n-k) \Leftarrow T(m,n)$. Очевидно, если $T(m,n) \Rightarrow T_1(m,n-k) \Rightarrow T_2(m,n-k-s)$, то $T(m,n) \Rightarrow T_2(m,n-k-s)$.

Таблицу $T_1(m,n-k) \Leftarrow T(m,n)$ назовём т у п и к о в о й для $T(m,n)$, если не существует правильной $T_2(m,n-k-1) \Leftarrow T_1(m,n-k)$. Тупиковую таблицу минимальной размерности будем называть м и н и м а л ь н о й.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ. Задана правильная таблица $T(m,n)$ с набором различающих чисел $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$, типизирующим числом δ и функцией $\Delta=f(\beta_i,\beta_j)$. Требуется построить для $T(m,n)$ все тупиковые таблицы.

В настоящей работе предлагается решение задачи минимизации, существенно отличное от полного перебора.

Столбцам таблицы $T(m,n)$ с номерами I,2,..., n поставим во взаимооднозначное соответствие двоичные аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Определим операцию W над двумя строками $y_i, y_j \in T(m,n)$. Для данной пары строк вычислим значение функции $\Delta = f(\beta_i, \beta_j)$. В строках y_i и y_j выделим ε-различимые координаты. Из двоичных аргументов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\nu}$, соответствующих выделенным координатам, построим конъюнктивную нормальную форму (КНФ) – результат операции W над y_i и y_j:

$$W^{\Delta}(y_i, y_j) = C_1 \& C_2 \& \dots \& C_\ell ,$$

где все конъюнктивные члены различны и имеют ранг $\nu - \Delta + 1$, ℓ – число сочетаний из ν по $\Delta - 1$.

Если строки y_i и y_j Δ- неразличимы $(\nu < \Delta)$, то положим

$$W^{\Delta}(y_i, y_j) \equiv 0. \qquad (2)$$

Применим операцию W к множеству S всех пар разнотипных строк $y_i, y_j \in T(m,n)$. Логическую функцию, задаваемую конъюнкцией всех результатов действия операции W на множестве S, назовем минимизирующей для таблицы $T(m,n)$ и обозначим через $MT(m,n)$

$$MT(m,n) = \underset{S}{\&}\, W^{\Delta}(y_i, y_j) = C_1 \& C_2 \& \dots \& C_R . \qquad (3)$$

Минимизирующая функция принадлежит классу монотонных функций.

ПРИМЕР I. Пусть $T(m,n) = T(4,4)$:

	I	2	3	4	5
I	-0,52	+2,2I	+0,0I	-	+I,20
2	-	-	-	+I6I	+I,50
3	-0,0I	-	-0,I3	-2I2	+2,85
4	+0,03	+I,I5	-0,I2	-68	+3,I4

ε = (0,50; I,00; 0,05; I00), δ = I,05,

$$\Delta = f(\beta_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } & |\beta_i - \beta_j| < 1{,}75, \\ 2, \text{ если } & |\beta_i - \beta_j| \geq 1{,}75. \end{cases}$$

Для построения минимизирующей функции необходимо применить операцию W к следующим парам строк:

$$W^1(y_1, y_2) = (x_1 \vee x_3),$$
$$W^2(y_1, y_4) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3),$$
$$W^1(y_2, y_3) = x_4,$$
$$W^1(y_2, y_4) = x_4.$$

Тогда $MT(4,4) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)\, x_4 .$

ЛЕММА I. Минимизирующая функция $MT_1(m, n-k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ тождественно не равна нулю для правильной и только для правильной таблицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть таблица $T_1(m, n-k)$ – правильная. Из определений правильной таблицы и операции W следует, что для любой пары разнотипных строк $y_i, y_j \in T_1(m, n-k)$ результат операции $W^{\Delta}(y_i, y_j) \not\equiv 0$. Следовательно, $MT_1(m, n-k)$ вида (3) тождественно не равна нулю.

Если таблица $T_1(m, n-k)$ неправильная, то существует пара разнотипных Δ- неразличимых строк, для которых по определению (2) $W^{\Delta}(y_i, y_j) \equiv 0$ и, следовательно, $MT_1(m, n-k) \equiv 0$.

ЛЕММА 2. Если таблица $T_1(m, n-1)$ получена из таблицы $T(m,n)$ удалением t-го столбца, то

$$MT_1(m, n-1) = MT(m,n)\big|_{x_t = 0} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства представляет интерес случай $T_1(m, n-1) \Leftarrow T(m,n)$. В противном случае лемма очевидна.

Пусть $y_i, y_j \in T(m,n)$ – пара разнотипных строк, ε-различимых по ν координатам, в том числе и по координате t и $\Delta \neq 1$. Тогда после удаления t-го столбца таблицы $T(m,n)$ соответствующая пара $y_i', y_j' \in T_1(m, n-1)$ ε-различима по $\nu - 1$ координатам.

Применим к выбранным парам операцию W и результат запинем в виде :

$$W^{\Delta}(y_i, y_j) = (C_1' \vee x_t) \& (C_2' \vee x_t) \& \ldots \& (C_\ell' \vee x_t) \& C_{\ell+1} \& \ldots \& C_{\ell_1}, \quad (4)$$

$$W^{\Delta}(y_i', y_j') = C_1' \& C_2' \& \ldots \& C_\ell'. \quad (5)$$

Из определения операции W следует, что конъюнктивные члены $C_{\ell+1}, \ldots, C_{\ell_1}$ (4) ранга $\nu - \Delta + 1$ не зависят от аргумента x_t, а ранг конъюнктивных членов $C_1', C_2', \ldots, C_\ell'$ (5) равен $\nu - \Delta$.

В выражении (4) положим $x_t = 0$:

$$W^{\Delta}(y_i, y_j)\big|_{x_t = 0} = C_1' \& C_2' \& \ldots \& C_\ell' \& C_{\ell+1} \& \ldots \& C_{\ell_1}. \quad (6)$$

В выражении (6) для любого $C_a \in \{C_{\ell+1}, C_{\ell+2}, \ldots, C_{\ell_1}\}$ существует $C_\ell \in \{C_1', C_2', \ldots, C_\ell'\}$ такой, что $C_a = C_\ell \vee x_t$. Следовательно,

$$W^{\Delta}(y_i', y_j') = W^{\Delta}(y_i, y_j)\big|_{x_t = 0}. \quad (7)$$

В случае, когда пара строк $y_i, y_j \in T(m,n)$ ε- неразличима по координате t или $\Delta = 1$, равенство (7) очевидно.

Для таблиц, связанных соотношением $T_1(m, n-1) \leftarrow T(m,n)$, пары строк, участвующие в построении $MT_1(m, n-1)$ и $MT(m,n)$, остаются неизменными. Тогда из определения минимизирующей функции и доказанного равенства (7) следует справедливость леммы.

СЛЕДСТВИЕ I. Если таблица $T_1(m, n-k)$ получена из таблицы $T(m,n)$ удалением столбцов $t_1, t_2, \ldots t_k$, то

$$MT_1(m, n-k) = MT(m,n)\big|_{x_{t_1} = x_{t_2} = \ldots = x_{t_k} = 0}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если таблица $T_1(m, n-k)$ получена из таблицы $T(m,n)$ удалением столбцов $t_1, t_2, \ldots, t_k$, то $MT_1(m, n-k)$ не зависит от аргументов $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots x_{t_k}$.

ЛЕММА 2а (обратная). Если в $MT(m,n)$ положить $x_t = 0$, то $MT(m,n)\big|_{x_t = 0}$ – минимизирующая функция для таблицы $T_1(m, n-1)$, полученной из $T(m,n)$ удалением t-го столбца.

Доказательство леммы 2а аналогично доказательству леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ. Если в $MT(m,n)$ положить $x_{t_1} = x_{t_2} = \ldots = x_{t_k} = 0$, то $MT(m,n)\big|_{x_{t_1} = x_{t_2} = \ldots = x_{t_k} = 0}$ – минимизирующая функция для таблицы $T_1(m, n-k)$, полученной из $T(m,n)$ удалением столбцов $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

ЛЕММА 3. Тупиковая таблица $T_1(m, n-k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ размерности $n-k$ имеет минимизирующую функцию вида

$$MT_1(m, n-k) = x_1 x_2 \ldots x_{n-k}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению тупиковая таблица – правильная. Согласно лемме I, её минимизирующая функция $MT_1(m, n-k) \neq 0$.

Минимизирующая функция монотонная может быть задана в виде сокращенной ДНФ:

$$MT(m, n-k) = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_\mu, \quad (9)$$

где $P_j = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{\nu_j}}$, $j = 1, 2, \ldots, \mu$; $\nu_j \leq n-k$.

Предположим, что в ДНФ (9) содержится член P_j ранга $\nu_j < n-k$. В выражении (9) положим равными нулю значения всех аргументов, отсутствующих в P_j. В результате согласно лемме 2а получим $MT_2(m, \nu_j)$ для таблицы $T_2(m, \nu_j)$. $MT_2(m, \nu_j)$ отлична от нуля и, следовательно, $T_2(m, \nu_j) \leftarrow T_1(m, n-k)$. Но $T_1(m, n-k)$ – тупиковая и не имеет следующих за ней таблиц. Полученное противоречие показывает, что минимизирующая функция вида (9) содержит члены только ранга $n-k$. Из $n-k$ аргументов можно построить один и только один дизъюнктивный член, а именно вида (8).

ТЕОРЕМА. ДНФ минимизирующей функции

$$MT(m,n) = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k, \quad (10)$$

не содержащая поглощаемых членов и аргументов под знаком отрицания, имеет длину L, равную количеству существующих для $T(m,n)$ тупиковых таблиц. Каждый дизъюнктивный член P_i, $i=1,2,\dots,L$, есть минимизирующая функция для одной из тупиковых таблиц.

Доказательство. Пусть для заданной таблицы $T(m,n)$ построена $MT(m,n)$ в виде КНФ (3). В результате раскрытия скобок и удаления поглощенных членов построена ДНФ минимизирующей функции (10).

Покажем, что для произвольной тупиковой таблицы $T_1(m,n-k) \Leftarrow T(m,n)$ среди дизъюнктивных членов P_j, $j=1,2,\dots,L$, (10) найдется такой, что $MT_1(m,n-k)=P_j$. Для этого в $MT(m,n)$ положим равными нулю все k аргументов, соответствующих удаленным столбцам:

$$MT(m,n)\big|_{x_{i_1}=x_{i_2}=\dots=x_{i_k}=0}. \qquad (11)$$

Согласно следствию леммы 2а выражение (11) – минимизирующая функция для таблицы $T_1(m,n-k)$. $T_1(m,n-k)$ – тупиковая и согласно лемме 3:

$$MT(m,n)\big|_{x_{i_1}=x_{i_2}=\dots x_{i_k}=0}=P_j. \qquad (12)$$

Докажем, что ДНФ (10) не содержит дизъюнктивных членов, которые не являются минимизирующими функциями для тупиковых таблиц $T_1(m,n-k)\Leftarrow T(m,n)$. Предположим, что в выражении (10) имеется член

$$P_j=x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{n-k}}, \qquad (13)$$

а таблица $T_1(m,n-k)$, полученная из таблицы $T(m,n)$ удалением k столбцов, не тупиковая. Возможны два случая: 1° $T_1(m,n-k)$ – неправильная; 2° $T_1(m,n-k)\Leftarrow T(m,n)$.

Если $T_1(m,n-k)$ – неправильная, то согласно лемме 1 $MT_1(m,n-k)=0$. Но это не так, потому что, по предположению, $MT_1(m,n-k)$ содержит член (13), который со-

гласно следствию 1 леммы 2 должен входить в $MT_1(m,n-k)$.

Если $T_1(m,n-k)\Leftarrow T(m,n)$, то $MT_1(m,n-k)=MT(m,n)\big|_{x_{i_1}=\dots x_{i_k}=0}$ содержит только член (13), так как любая элементарная конъюнкция из элементов $x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_{n-k}}$ ранга меньше, чем $n-k$ поглощает P_j (13).

Дополнительное приравнивание нулю одного из аргументов $x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_{n-k}}$ приводит к $MT_2(m,n-k-1)=0$. Следовательно, таблица $T_1(m,n-k)$ – тупиковая.

Полученные противоречия доказывают теорему.

Доказанная теорема решает поставленную выше задачу минимизации.

Для оценки эффективности предложенного алгоритма по сравнению с полным перебором необходимо иметь оценку для преобразования КНФ минимизирующей функции в ДНФ.

Легко показать, что любая монотонная функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ может быть минимизирующей для некоторой таблицы $T(m,n)$. Тогда число элементарных операций при раскрытии скобок КНФ оценивается сверху величиной порядка $C_n^{[n/2]}$. Рассмотрим один алгоритм построения ДНФ монотонной функции для заданной КНФ, приводящий к оценке 2^n. Однако данный алгоритм оказывается весьма полезным при решении задач на ЭВМ.

Для представления монотонной функции на множестве E_n вершин n-мерного единичного куба используем результаты работы [1].

Произведем упорядочение элементов множества E_n. Если для двух различных точек из E_n $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$ и $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ справедливо неравенство $\alpha_i\le\gamma_i$, $i=1,2,\dots,n$, то будем говорить, что точка γ следует за точкой α. Это отношение обозначим символом $\alpha\to\gamma$. Точки α и γ назовём сравнимыми, если выполняется одно из соотношений: $\alpha\to\gamma$ или $\gamma\to\alpha$. В противном случае точки несравнимые.

Каждой из точек $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ множества E_n поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $P=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}$ таким образом, чтобы в данную конъюнкцию входили только те аргументы из $x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\dots,x_{\alpha_n}$, индексы которых равны единице. В результате между вершинами куба и множеством элементарных конъюнкций $1, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n, \ldots, x_1x_2\ldots x_n$ будет установлено взаимнооднозначное соответствие. При выполнении условия $\alpha \to \gamma$, $\alpha, \gamma \in E_n$ элементарная конъюнкция, поставленная в соответствие точке α, поглощает элементарную конъюнкцию, поставленную в соответствие точке γ.

Для представления на E_n монотонной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданной в ДНФ с аргументами без знака отрицания, пометим те вершины куба, которые поставлены в соответствие элементарным конъюнкциям, входящим в данную ДНФ. Среди помеченных вершин могут оказаться сравнимые (если заданная ДНФ содержала поглощаемые члены). Те из них, которые "следуют за", необходимо освободить от меток. Оставшееся множество помеченных точек есть представление монотонной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на E_n, которое назовем представлением через крайние точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит классу M', если

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \varphi(x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

где $x_1 \leq x_1'$, $x_2 \leq x_2'$, ..., $x_n \leq x_n'$.

Из определения 2 вытекает следующее утверждение. Для любой монотонной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ среди функций класса M' всегда найдется функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что $f \vee \varphi = 1$ и $f \,\&\, \varphi = 0$.

Любая функция класса M' может быть задана ДНФ, где все аргументы под знаком отрицания.

Аналогично представлению монотонной функции на n-мерном единичном кубе на том же кубе можно представить и функции класса M'. При этом знак "$\to$" для любой пары сравнимых точек α и γ из E_n определяется в обратном направлении.

Алгоритм раскрытия скобок монотонной функции, заданной КНФ с аргументами без знака отрицания, следующий:

1. Из исходной функции f получим функцию $\varphi = \bar{f}$.
2. На E_n через крайние точки построим функцию φ.
3. Ортогональное с φ дополнение до единицы есть функция f. Результатом раскрытия скобок будет дизъюнкция всех крайних точек данного дополнения.

ПРИМЕР 2.

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)(x_3 \vee x_4).$$
$$\varphi = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$
$$f = x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4.$$

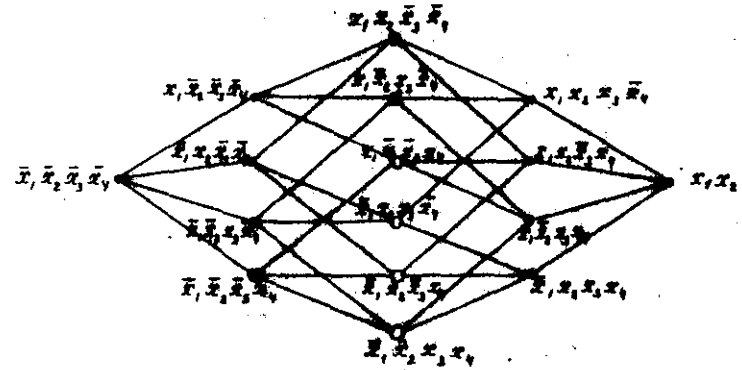

Рис. 1.

Для построения оценок определим элементарные операции, за которые примем сравнение двух разнотипных строк на Δ-различимость (при полном переборе), и операцию W (при построении минимизирующей функции). Для $\Delta = 1$ данные операции имеют один порядок сложности, а их число при обработке одной таблицы равно Q, не превышающее число сочетаний из m по 2. При раскрытии скобок КНФ за элементарную операцию примем просмотр одной вершины E_n с целью поиска крайних точек. Тогда количество операций при полном переборе и в предложенном алгоритме (для $\Delta = 1$) оцениваются соответственно

$$N_n \sim 2^n Q,$$
$$N_{\text{н}} \sim 2^n + Q.$$

В заключение отметим, что для частного случая (таблица $T(m,n)$ - нуль-единичная; $0 < \varepsilon_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots n)$; $\rho_l = l$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ - целые числа; $0 < \delta < 1$; $\Delta = 1$) рассматриваемая задача вырождается в классическую задачу поиска тупиковых тестов.

Литература

1. Коробков В.К., Резник Т.Л. О некоторых алгоритмах вычисления монотонных функций алгебры логики. ДАН СССР, 147, 5, 1962, стр. 1022-1025.

Поступила в редакцию 19.2.1971 г.