ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1971 г. вып. 44

УДК 621.391.

ЯЗЫК ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЛОСКИХ РУКОПИСНЫХ ЧЕРНО-БЕЛЫХ ФИГУР

А.С. Нудельман

В предлагаемой работе даны : формальное определение фигуры (идеальной) – § I, полуформальное определение языка и его употребления – § 2, построение языка для описания рукописных фигур – § 3.

В целях удобства ориентировки в тексте здесь применена сквозная нумерация предложений арабскими цифрами, причем

i – 0 обозначает определение,

j – П обозначает предложение, для которого существует доказательство.

§ I. Фигура

1–0 Лист $(\vec{P})$ есть односвязная и ограниченная часть плоскости с выделенным направлением $(\vec{F})$.

Здесь под плоскостью понимается двумерный континуум точек.

2 В дальнейшем без существенного ограничения общности все определения и рассуждения будут относиться к некоторому листу $\vec{P}$, на котором зафиксированы точка 0 и, если нет специальных оговорок, – система координат D, (см.36–0), так что каждой точке t листа ставится в соответствие пара действительных чисел: $(x^1(t), y^1(t))$ или просто $(x(t), y(t))$.

3–0 Если F – фигура на листе $\vec{P}$, то F есть подмножество множества всех точек листа $\vec{P}$ (обратное, строго говоря, неверно).

4-0 Фигура F есть т о ч к а (T), если и только если существует пара действительных чисел (a, b) такая, что $t \in F \Longleftrightarrow (x(t)=a) \,\&\, (y(t)=b)$.

5-0 Фигура F является т о ч е ч н о й (F_T), если и только если

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \quad , \text{ где}$$

n - натуральное число и

$$T_i \cap T_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j \; .$$

6-0 Фигура F есть л и н и я $(\mathcal{L})$, если и только если существуют две непрерывных, составленных из конечного числа многочленов функции $f_x(\rho)$ и $f_y(\rho)$, определенных на отрезке $[0, a]$, $a > 0$, таких, что

$$t \in F \Longleftrightarrow \exists! \rho \, [(\rho \in [0,a]) \,\&\, (x(t)=f_x(\rho)) \,\&\, (y(t)=f_y(\rho))] ;$$

точки t_1 : $x(t_1) = f_x(0)$, $y(t_1) = f_y(0)$ и

t_2 : $x(t_2) = f_x(a)$, $y(t_2) = f_y(a)$

будем называть концевыми.

7-0 Фигура F является л и н е й ч а т о й (F_l), если и только если

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i \quad , \text{ где}$$

n - натуральное число и пересечение двух различных линий либо пусто, либо содержит только точки, являющиеся концевыми для этих линий.

8-0 Линейчатая фигура есть к о н т у р (K), если и только если (см. 7-0)

$$n = 2 \quad \text{и}$$

пересечение линий содержит точно две точки.

9-0 Линейчатая фигура F_l является к о н т у р н о й (F_k), если и только если

$$F_l = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \quad , \text{ где}$$

n - натуральное число и

$$K_i \cap K_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j \; .$$

10-0 (иллюстрация дана на рис. I).

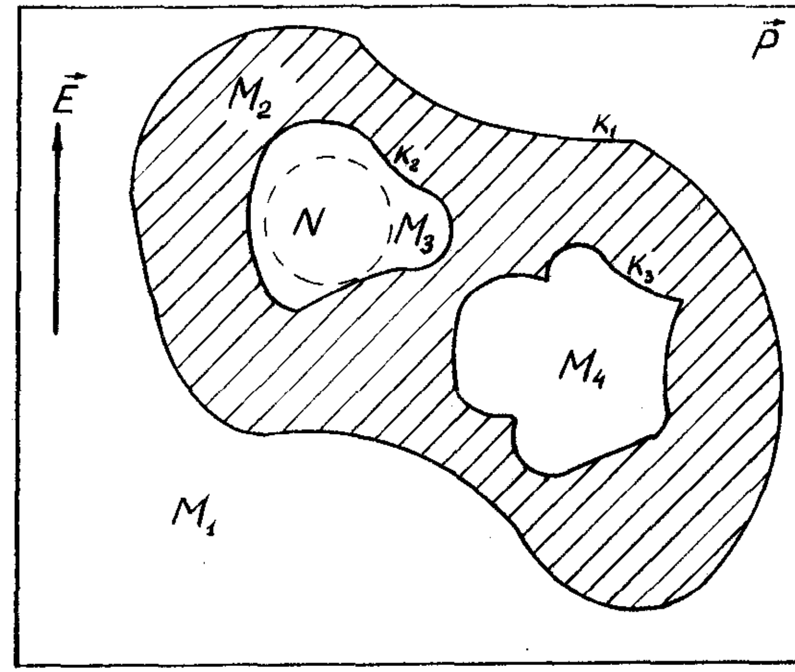

Рис.I.

Здесь представлена контурная фигура F_k, состоящая из трех контуров: k_1, k_2 и k_3. Области от F_k — M_1, M_2 (заштрихована), M_3, M_4. Множество точек N не является областью от F_k. Область M_2 строго зависит от F_k.

Пусть $F_к$ – контурная фигура. Будем говорить, что M есть о б л а с т ь от $F_к$, если и только если

а) $M \subseteq (P - F_к)$,

б) M – односвязно и

в) для любого N такого, что а) и б) неверно, что $M \subset N$.

II-О (иллюстрация дана на рис. I)
Пусть M – область от $F_к$ и

$$F_к = \bigcup_{i=1}^{n} K_i .$$

Считаем, что M с т р о г о з а в и с и т от $F_к$, если и только если M не является областью от $F_к^{i} = (F_к - K_i)$ ни при каком i (из I,2,..., n).

I2-П Пусть $F_к$ – контурная фигура и

$$F_к = \bigcup_{i=1}^{n} K_i .$$

Тогда при $n = 1$ существуют точно две области от $F_к$, строго зависящие от $F_к$,
при $n > 1$, если существует область от $F_к$, строго зависящая от $F_к$, то она единственна.

I3-О Фигура F есть у ч а с т о к (Q), если и только если

$$F = F_к \cup M \quad , где$$

$F_к$ – контурная фигура и
M – область от $F_к$, строго зависящая от $F_к$.

I4-О Фигура F является п л о с к о с т н о й $(F_п)$, если и только если

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i \quad , где$$

n – натуральное число и

$Q_i \cap Q_j = \emptyset$ (или $F_т^{ij}$) при $i \neq j$.

I5-О Фигура F является н о р м а л ь н о й, если и только если

$$F = (F_п - ((F_л^{п} - F_т^{лп}) + F_т^{п})) + (F_л - F_т^{л}) + F_т \quad , где$$

знак "–" ("+") есть знак теоретико-множественной разности (суммы) и

I $F_л^{п} \subset F_п$ 2 $F_т^{п} \subset F_п$

3 $F_т^{лп} \subset F_л^{п}$ 4 $F_т^{л} \subset F_л$

5 $F_л^{п} \cap F_т^{п} = \emptyset$ 6 $F_л \cap F_п = \emptyset$ (или $F_т^{пл}$)

7 $F_т \cap F_п = \emptyset$ 8 $F_т \cap F_л = \emptyset$

9 $\forall t[(t \in F_т^{пл} \,\&\, t \in F) \Rightarrow t \notin F_т^{л} \,\&\, t \notin F_т \,\&\, (t \in F_л^{п} \Rightarrow t \in F_т^{лп})]$.

Множество фигур правой части равенства будем называть п р е д с т а в л е н и е м нормальной фигуры F : $W(F)$.

I6 В дальнейшем под фигурой будем всегда понимать нормальную фигуру.

I7-О Точку t фигуры F назовем в н у т р е н н е й, если и только если существует натуральное число N такое, что круг с центром в t радиуса $\frac{1}{N}$ содержит только точки, принадлежащие F.

I8-О Точку t фигуры F назовем и з о л и р о в а н н о й, если и только если существует натуральное число N такое, что круг с центром в t радиуса $\frac{1}{N}$ содержит только одну точку, принадлежащую F.

I9-П Любая фигура F имеет представление $W(F)$ и притом единственное.

20-П Пусть M – множество точек листа $\vec{P}$.
Обозначим:

З(М) – замыкание M в P,

В(М) – множество всех внутренних точек M,

И(М) – множество всех изолированных точек M.

Тогда для любой фигуры F элементы $W(F)$ определяются следующими соотношениями:

I $F_п = З(В(З(F)))$

2 $F_т = И(З(F))$

3 $F_л = З(З(F) - (F_п + F_т))$

4 $F_т^{л} = F_л - F$

5 $F_т^{п} = И(F_п - F)$

6 $F_л^{п} = З(F_п - F) - F_т^{п}$

7 $F_т^{лп} = F_л^{п} - ((F_п - F) - F_т^{п})$.

§ 2. Язык

21-0 Язык ($Я$) есть упорядоченная четверка:

$$Я = \langle T, P, A, R \rangle \quad \text{, где}$$

I) T - предметная область языка $Я$.

Любая фигура F рассматривается как однозначно организованная структура элементов, из которых состоит данная фигура. Пусть $T(F)$ - множество элементов структуры, с которой отождествляется фигура F; тогда область T определяется:

$$(x \in T) \Longleftrightarrow \exists F\,(x \in T(F)).$$

На языке $Я$ можно "говорить" о предметах из T и только о них.

2) P - класс предикатов языка $Я$.

Любой элемент из P есть n -местный предикат, определенный в T. Класс P показывает, что можно "сказать" на языке $Я$ о предметах из T.

3) A - класс элементов алфавита языка $Я$.

В класс А входят:

а) символы для обозначения переменных, причем каждой переменной однозначно поставлена в соответствие область ее изменения - некоторое подмножество T;

б) символы для обозначения элементов класса P, причем каждый элемент P обозначается одним символом, и символы, обозначающие различные предикаты из P, различны;

в) логические символы (возможно, часть из них):

$$\neg, \vee, \&, \Rightarrow, \Longleftrightarrow, \forall, \exists, \exists!;$$

г) вспомогательные символы (скобки и т.п.).

4. R - класс правил построения языка $Я$.

Правила из R предназначены для образования последовательностей из элементов A, причем правила из R таковы, что любая последовательность символов из A, построенная в соответствии с этими правилами, осмысленна на любом множестве $T(F)$

22-0 Предложение на языке $Я$ $(П)$ есть конечная последовательность символов из A, построенная в соответствии с правилами из R, где $A, R \in Я$.

23-0 Предложение П языка $Я$ и с т и н н о н а ф и г у р е F, если и только если П истинно на $T(F)$, где $T \in Я$.

24-0 О б л а с т ь предложения П $(F(П))$ есть множество всех фигур, на которых П истинно.

25 Каждая фигура обозначает некоторый объект, не являющийся фигурой.

26-0 Класс представимости объекта B $(F(B))$ е с т ь множество всех фигур, которые обозначают B.

27-0 Будем говорить, что объект B и м е е т о п и с а н и е на языке $Я$, если и только если существует предложение П на языке $Я$ такое, что

$$F(П) = F(B).$$

28-0 Ц е л ь (C) есть класс объектов $\{B_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ такой, что для любых двух объектов B_j и B_k из C

$$(B_j \neq B_k) \Longleftrightarrow [F(B_j) \cap F(B_k) = \phi].$$

29-0 Язык $Я$ д о с т а т о ч е н для цели C, если и только если любой объект из C имеет описание на языке $Я$.

30-0 Пусть язык $Я = \langle T, P, A, R \rangle$.

Будем говорить, что язык $Я$ является п о д ъ я з ы к о м языка $Я$, если и только если

$$Я' = \langle T', P', A', R' \rangle \quad \text{, где}$$

I. $T' \subseteq T$;

2. предикат из P' есть предикат из P_1, $P_1 \subseteq P$, ограниченный областью T', причем любой предикат из P_1 с непустым смыслом в T' принадлежит P';

3. символ из A' есть символ из A со смыслом, определенным для T' и P' и являющимся непустым, причем любой символ из A с непустым смыслом для T' и P' принадлежит A';

4. правило из R' есть правило из R со смыслом, определенным для A' и являющимся непустым, причем любое правило из R с непустым смыслом для A' принадлежит R'.

Если $[(T' \subset T) \vee (P_1 \subset P)]$, то язык $Я'$ будем называть собственным подъязыком языка $Я$.

3I-0 Язык $Я$ минимален для цели C, если и только если любой собственный подъязык языка $Я$ недостаточен для C.

§ 3. Язык $Я_h$

Построению языка $Я_h$ предпошлем неформальные рассуждения о той цели (C_h), для достижения которой предназначен этот язык (см. 32÷35).

32 Предположим существование:

I. класса всех допустимых рукописных преобразований фигур - Ψ_h;

2. цели C_k такой, что :

а) для любого объекта B из C_k класс $F(B)$ замкнут относительно Ψ_k, и никакое собственное подмножество $F(B)$ не замкнуто относительно Ψ_k ;

б) любая фигура принадлежит классу представимости некоторого объекта из C_k.

33. Если фигуру F (некоторое множество точек листа $\vec{P}$) представить в виде функции $F(x, y)$(см.2), выделяющей это множество точек:

$$F(x,y)=\begin{cases} 1, \text{ при } & t(x, y) \in F \\ 0, \text{ при } & t(x, y) \notin F \end{cases},$$

то можно считать, что класс Ψ_k содержит преобразования, переводящие фигуру $F(x, y)$ в фигуру $F(x', y')$, если

$$x' = k_1 x + k_2$$

$$y' = k_3 y + k_4 \quad , \text{ где}$$

1. $k_1 \div k_4$ – действительные числа,
2. $k_1 = k_3 \neq 0$.

34. Ψ_k содержит целый ряд интуитивно понимаемых преобразований таких, например, как поворот фигуры или части фигуры в некоторых пределах, топологические преобразования с определенными ограничениями, некоторые нетопологические преобразования, которые выражают разнообразие почерков, и т.п.

35. Любой язык $Я$, построенный для цели C_k, содержит в себе определение класса $\Psi_k(Я)$, являющегося формальным уточнением класса Ψ_k.

Таким определением может служить следующее: преобразование, переводящее фигуру F_1 в фигуру F_2, принадлежит $\Psi_k(Я)$, если и только если любое предложение языка $Я$, истинное (ложное) для F_1, является истинным (ложным) для F_2.

36-0 Пусть лист $\vec{P}$ имеет выделенное направление $\vec{E}$ (см. 1-0).

Обозначим через $D_i(x^i O y^i)$, $i = 0, 1, \ldots, 7$ декартову систему координат на листе $\vec{P}$ такую, что

1. в системе D_1 направление оси Oy' совпадает с направлением $\vec{E}$;

2. система D_i есть система D_1, повернутая вокруг центра 0 по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{4}\cdot(i-1)$;
3. для любой точки t листа $\vec{P}$: $x^1(t) = y^3(t)$.

37-П если фигура F является линией в системе D_1 (см. 6-0), то F есть линия в любой системе D_i;

38-0 (иллюстрация дана на рис. 2).

Фигура F является о т р е з к о м (N), если и только если

1. F есть линия,
2. для любой системы D_i,

если существуют точки t_1 и t_2 такие, что $t_1, t_2 \in F$ и $y(t_1) = y(t_2)$, то любая точка $t : x(t) \in [x(t_1), x(t_2)]$ и $y(t) = y(t_1)$ принадлежит фигуре F.

39-0 Концевые точки линии (см. 6-0), являющейся отрезком, назовем концевыми точками отрезка, а точки отрезка (линии), не являющиеся концевыми, – внутренними точками отрезка (линии).

40-0 Будем говорить, что линия $\mathcal{L}$ о х в а т ы в а е т линию $\mathcal{L}'$, если и только если

1. $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$;
2. Концевые точки $\mathcal{L}'$ являются внутренними в $\mathcal{L}$.

41-0 Отрезок N является о с о б ы м, если и только если существует такая система среди D_i, что

$$\forall t_1, t_2 [(t_1, t_2 \in N) \Rightarrow (y(t_1) = y(t_2))].$$

42-0 Назовем п р е д с т а в л е н и е м линейчатой фигуры F_1 $(W_1(F_1))$ множество отрезков такое, что

1. $N \in W_1(F_1) \Longrightarrow N \subseteq F_1$;
2. ни одна концевая точка линии из $\bigcup\limits^{n_{min}} \mathcal{L}_i = F_1$ (см. 7-0) не является внутренней точкой отрезка из $W_1(F_1)$
3. Любой особый отрезок N, который может входить в $W_1(F_1)$ в силу пп. 1 и 2, принадлежит $W_1(F_1)$, если и только если не существует отрезка N' такого, что
   а) N' может входить в $W_1(F_1)$ в силу пп.1 и 2;
   б) N' охватывает N.
4. Пересечение двух различных отрезков из $W_1(F_1)$ либо пусто, либо содержит только концевые точки этих отрезков.

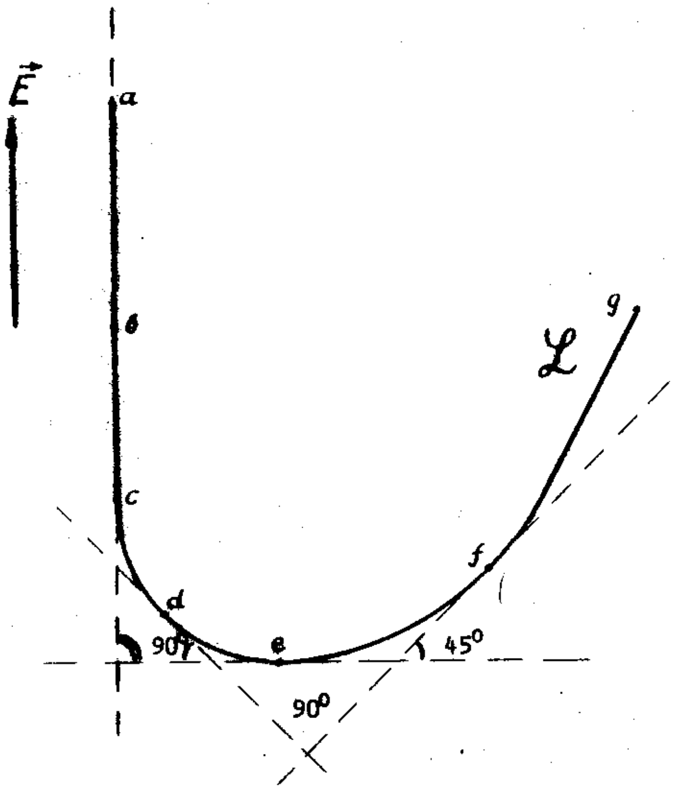

Рис.2.

На линии $\mathcal{L}$ можно выделить отрезки: (ab), (ac), (ad), (cd), (de), (ef), (fg), но отрезками не будут (ae), (df), (eg).

5. Если объединение двух отрезков из $W_л\ (F_л)$ является отрезком, то он не может принадлежать $W_л\ (F_л)$ в силу п.2 или в силу п.3.
6. Объединение всех отрезков из $W_л\ (F_л)$ равно фигуре $F_л$.

43–П Для любой фигуры $F_л$ существует единственное и конечное представление $W_л\ (F_л)$.

44–П Для любой плоскостной фигуры $F_п$ существуют единственная линейчатая фигура $F_л$ и единственное множество областей $\{M_i\}$ такие, что:

I. Для любой области M из $\{M_i\}$ существует такая контурная фигура $F_к$, что:

а) $F_к \subseteq F_л$;

б) M есть область от $F_к$, строго зависящая от $F_к$.

2. $F_п = F_л + \bigcup M_i$.

45–0 Назовем п р е д с т а в л е н и е м плоскостной фигуры $F_п\ (W_п\ (F_п))$ множество, равное объединению $W_л\ (F_л)$ и $\{M_i\}$, где $F_л$ и $\{M_i\}$ определены в 44–П.

46–П Для любой фигуры $F_п$ существует единственное и конечное представление $W_п\ (F_п)$.

47–0 Назовем п р е д с т а в л е н и е м точечной фигуры $F_т\ (W_т\ (F_т))$ множество точек таков, что

$$t \in W_т\ (F_т) \Longleftrightarrow t \in F_т .$$

48–П Для любой фигуры $F_т$ существует единственное и конечное представление $W_т\ (F_т)$.

49–0 Для любой фигуры F множеству $T_h\ (F)$(см.2I-0) принадлежат (и только они):

I. фигура F ;
2. представление $W\ (F)$ и все его элементы;
3. любые представления $W_п\ (F_п),\ W_л(F_л),\ W_т(F_т)$ и все их элементы, если и только если
$$F_п,\ F_л,\ F_т \in W\ (F);$$
4. все контурные фигуры $F_к$ такие, что существует область M из $W_п\ (F_п)$, являющаяся областью от $F_к$ и строго зависящая от $F_к$ при
$$F_п \in W\ (F).$$

50–0 T_h – предметная область языка $Я_h$

$$x \in T_h \Longleftrightarrow \exists F\ (x \in T_h\ (F)).$$

51-0 Предикат $P_1(z_1, z_2)[z_1 = z_2]$ - предикат равенства в теоретико-множественном смысле (или в смысле равенства точек).

52-0 Предикат $P_2(z_1, z_2)[z_1 \in z_2]$ - предикат принадлежности в теоретико-множественном смысле.

53-0 Обозначим через $\angle[t_1, t_2]$ угол, на который необходимо повернуть направление оси Ox системы D_1 против часовой стрелки до совпадения с направлением, идущим от точки t_2 к точке t_1.

Предикат $P_3(t_1, t_2)$ [t_1 правее t_2] :

$$P_3(t_1, t_2) \Leftrightarrow -67,5^0 \le \angle[t_1, t_2] < 67,5^0.$$

Предикат $P_4(t_1, t_2)$ [t_1 выше t_2] :

$$P_4(t_1, t_2) \Leftrightarrow 22,5^0 \le \angle[t_1, t_2] < 157,5^0.$$

54-0 Обозначим через $r(t_1, t_2)$ декартово расстояние между точками t_1 и t_2.

Предикат $P_5(t_1, t_2, t_3, t_4)$ [$r(t_1, t_2)$ меньше $r(t_3, t_4)$] :

$$P_5(t_1, t_2, t_3, t_4) \Leftrightarrow r(t_1, t_2) < \frac{3}{4} r(t_3, t_4).$$

55-0 Пусть отрезок N имеет концевые точки t_1 и t_2.

1. Отрезок N будем называть горизонтальным, если и только если $P_3(t_1, t_2)$ или $P_3(t_2, t_1)$.
2. Отрезок N будем называть вертикальным, если и только если $P_4(t_1, t_2)$ или $P_4(t_2, t_1)$.

56-0 Предикат $P_6(t, N)$ [t правее N] определен только для пар: < точка, вертикальный отрезок >

$$P_6(t,N) \Leftrightarrow \exists t'\{(t' \in N) \& [y(t') = y(t)] \& [x(t') < x(t)]\}.$$

57-0 Предикат $P_7(t, N)$ [t выше N] определен только для пар: < точка, горизонтальный отрезок >

$$P_7(t,N) \Leftrightarrow \exists t'\{(t' \in N) \& [x(t') = x(t)] \& [y(t') < y(t)]\}.$$

58-0 Предикат $P_8(M, F_k)$ [M от F_k] определен только для пар: < область, контурная фигура >

$P_8(M, F_k)$ истинно тогда и только тогда, когда M является областью от F_k, строго зависящей от F_k.

59-0 Предикат $P_9(M, K)$ [M внутри K] определен только для пар: < область, контур >

$P_9(M, K)$ истинно тогда и только тогда, когда

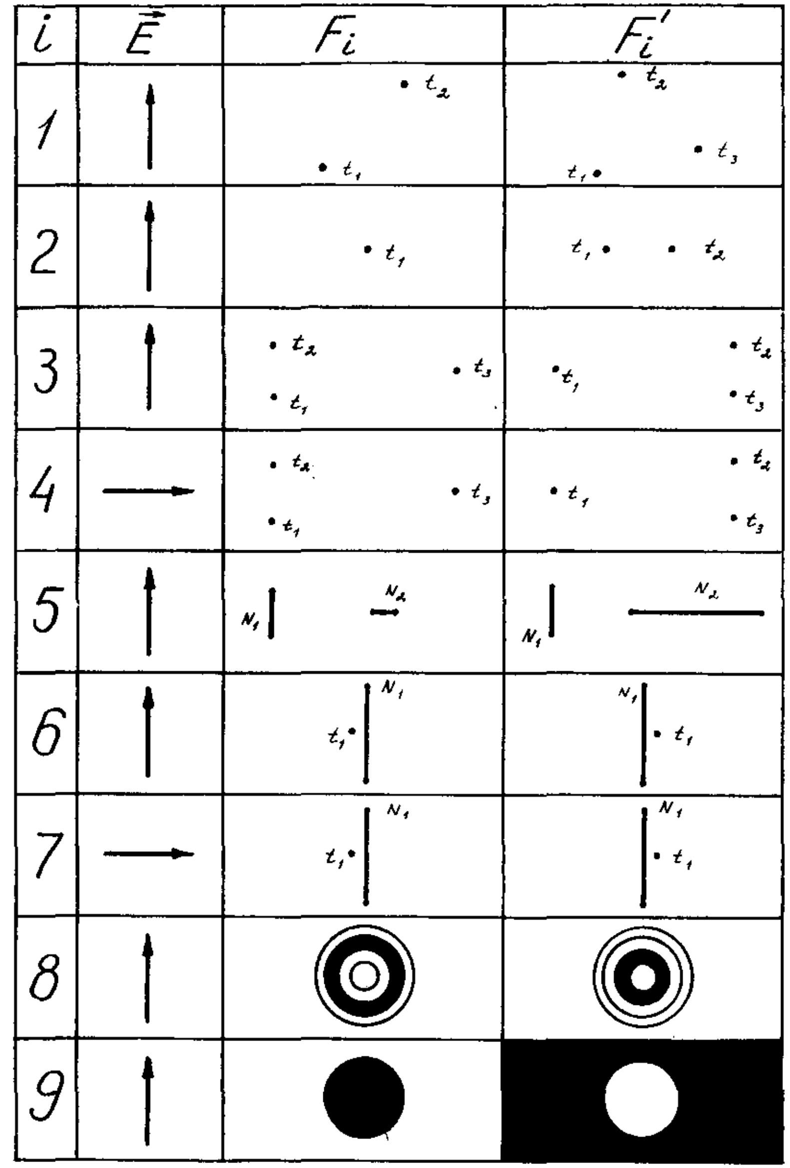

Рис.3.

M является внутренней областью от K.

60-0 P_k – класс предикатов языка $Я_k$:

$P_k = \{ P_i \}$, где $i = 1,2,\ldots, 9$.

61-0 A_k – класс элементов алфавита языка $Я_k$.

В класс A_k входят:

а) символы для обозначения переменных – ранее введенные обозначения для видов элементов T_k (например, F, $W_1(F_1)$, N и т.п.);

б) символы для обозначения элементов P_k :

$P_1, P_2, \ldots, P_9$;

в) все логические символы (см. 2I-0);

г) вспомогательные символы ;

62-0 R_k – класс правил построения языка $Я_k$.

Определим R_k через определение $П_k$ – предложения языка $Я_k$.

Последовательность символов из $A_k(П)$ является предложением языка $Я_k$, если и только если существует фигура F такая, что :

I. существует взаимно-однозначное соответствие между $T_k(F)$ и $T_k(П)$, где $T_k(П)$ – множество всех различных переменных из $П$.

2. $П$ осмысленна на множестве $T_k(F)$.

63-П Если объекты B_i и B_i' , обозначаемые фигурами F_i и F_i' соответственно, при $i = 1,2,\ldots, 9$ (см.рис.3) различны в C_k , то язык $Я_k$ минимален для цели C_k.

Литература

I. Автоматический анализ сложных изображений. Сб.переводов под ред. Э.М.Бравермана, "Мир", I969.

2. Бонгард М.М. Проблема узнавания. Изд-во "Наука", I967.

3. Завалишин Н.В., Мучник И.Б, Лингвистический (структурный) подход к проблеме распознавания образов (обзор). Автоматика и телемеханика, № 8, I969.

4. Файн В.С. Опознавание изображений. Основы непрерывно-групповой теории и её приложения. "Наука", I970.

5. Grimsdale at al. A System for the Automatik Recognition of Patterns. Proc. IRE, v.106 (B), N 26, 1959.

Поступила в редакцию
I7.2.I97I г.