УДК 681.2.088

О ПОЛИГОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО

В.И.Береговой, В.А.Львов

Вопрос кусочно-линейной (полигональной) аппроксимации функций рассматривался ранее многими авторами, как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Отметим, как наиболее характерные, в теоретическом плане – работы академика С.Н.Бернштейна [I]; в прикладном – работы Е.Я.Ремеза [2]. В отличие от предыдущих работ, рассмотрим здесь эту же задачу с учетом ошибок измерений как аргумента, так и значений функции.

Предположим, что исследованию подлежит непрерывная функция одной переменной $f(x)$. Пусть в результате измерений получена таблица

$$f^T(x) = \begin{bmatrix} x_1 ; y_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_i ; y_i \\ \vdots \quad \vdots \\ x_N ; y_N \end{bmatrix},$$

где значения величин x_i и y_i определены с некоторой погрешностью δ_i и ε_i соответственно, причем, ошибки по x и y независимы.

Пусть множество значений x упорядочено, т.е.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

и помимо этого выполняются условия

$$x_i + \delta_i < x_{i+1} - \delta_{i+1} , \quad i = \overline{0, N-1} \qquad (I)$$

Задача заключается в нахождении непрерывной кусочно-линейной функции $\varphi(x)$, аппроксимирующей $f^T(x)$ с точностью до ошибок ε_i, δ_i. Такая аппроксимация находит широкое практическое применение.

Для первого звена функции $\mathcal{Y}(x)$, проходящего вблизи точек $(x_i\ ;\ y_i)$, $i = \overline{0;k}$, имеет место система неравенств

$$\left.\begin{array}{l} |a\tilde{x}_i + b - y_i| \leq \varepsilon_i \\ |x_i - \tilde{x}_i| \leq \delta_i \\ 0 \leq i \leq k \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Эта система нелинейна при $\delta_i \neq 0$.

Пусть все $\tilde{x}_i$ зафиксированы произвольным образом в области, определяемой неравенствами

$$\left.\begin{array}{l} |x_i - \tilde{x}_i| \leq \delta_i \\ 0 \leq i \leq k \end{array}\right\}$$

При этом система неравенств (2) становится линейной и к ней может быть применен численный способ последовательных исключений Фурье [2], суть которого заключается в следующем. В системе (2) переходим от модульной формы к обычной и "обособляем" величину b :

$$\left.\begin{array}{l} b \geq -\varepsilon_i - a\tilde{x}_i + y_i \\ 0 \leq i \leq k \end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} b \leq \varepsilon_i - a\tilde{x}_i + y_i \\ 0 \leq i \leq k \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Сравнивая каждое из неравенств (4) с каждым из неравенств (3), на основании транзитивности неравенств получим

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_i = a\tilde{x}_i + y_i \geq -\varepsilon_j + y_j - a\tilde{x}_j \\ 0 \leq i \leq k \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Тривиальные неравенства $0 \leq \varepsilon_i + \varepsilon_j$, получающиеся при $i = j$,таким образом будут исключены. Очевидно, что из совместимости системы (5) следует совместность системы (3)-(4).

Учитывая условие (I), мы можем преобразовать систему (5) к виду:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{-\varepsilon_i - \varepsilon_j + (y_j - y_i)}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_i} \leq a \leq \dfrac{\varepsilon_i + \varepsilon_j + (y_j - y_i)}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_i} \\ 0 \leq i < j \leq k \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Для $\delta_i = 0$, $i = \overline{0,k}$ достаточно исследовать на совместность линейную систему (6) и этим закончить анализ. Для $\delta \neq 0$ анализ необходимо продолжить. Рассмотрим три случая:

I. Все левые границы неравенств (6) неположительны, а все правые неотрицательны. Система совместна, имеется решение

$$a = 0$$

2. Существует неравенство, у которого левая граница положительна и неравенство, у которого правая граница отрицательна. Система (6) несовместна.

Анализ первых двух случаев может быть проведен независимо для всех значений $\tilde{x}_i$.

3. Существуют неравенства, у которых левые границы положительны, в то время как у остальных эти границы меньше или равны нулю.

Без ограничения общности положим, что в неравенствах с положительными нижними границами индексы изменяются в пределах $j = \overline{0,n}$, $i = \overline{0,m}$ и $i < j$. Тогда такие неравенства после преобразований могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \geq \dfrac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j + (y_j - y_i)} \\ 0 \leq i \leq k;\ 0 \leq j \leq k;\ i < j \end{array}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{\tilde{x}_{j'} - \tilde{x}_{i'}}{-\varepsilon_{j'} - \varepsilon_{i'} + (y_{j'} - y_{i'})} \\ 0 \leq j' \leq n;\ 0 \leq i \leq m;\ i' < j' \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Сравниваем каждое из неравенств (7) с каждым из неравенств (8) и добавляем неравенства, ограничивающие изменения x :

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j + (y_j - y_i)} \leq \dfrac{\tilde{x}_{j'} - \tilde{x}_{i'}}{-\varepsilon_{i'} - \varepsilon_{j'} + (y_{j'} - y_{i'})} \\ 0 \leq i < j \leq k;\ 0 \leq i' \leq m;\ 0 \leq j' \leq n;\ i' < j'; \\ (i \neq i') \wedge (j \neq j') \\ |\tilde{x}_\ell - x_\ell| \leq \delta_\ell;\ 0 \leq \ell \leq k \end{array}\right\}$$

Полученная система является линейной и её совместность может быть исследована известными методами [3]. Произведя обратный переход от этой системы к системе (2), мы можем установить её совместность.

4. Для случая отрицательных правых частей рассуждения могут быть проведены аналогично предыдущему.

Последующие звенья $Y(x)$ находятся таким же образом, как и первое. "Вершины" ломаной могут быть заданы, либо найдены из условия пересечения соседних звеньев. Число неравенств в системе (2) выбирается так, чтобы она была совместна, а при добавлении ещё одной пары неравенств – несовместна.

Описанный метод можно рекомендовать для практического использования, если число неравенств в системе (2) невелико (< 20). Полученная кусочно-линейная функция $f(x)$ может быть использована для построения полинома произвольной степени, аппроксимирующего $f(x)$ по методам, изложенным в [2].

Литература

I. БЕРНШТЕЙН С.Н. Собрание сочинений. Т.I. (Статьи I,I2). Изд-во АН СССР, 1952.

2. РЕМЕЗ Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Изд-во АН УССР, Киев, 1957.

3. ЧЕРНИКОВ С.Н. Линейные неравенства. М., "Наука", 1968.