

УДК 519.1

О МИНИМИЗАЦИИ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ГРАФА

А.Н.Мелихов, В.М.Курейчик, В.А.Тищенко

При проектировании микромодульной аппаратуры часто приходится определять число пересечений внутрисхемных соединений, производить минимизацию, если полученное число больше допустимого уровня, разбивать схему на планарные подсхемы, а также решать ряд других вопросов.

Алгоритмизация рассмотренных задач позволяет эффективно использовать ЦВМ при проектировании микромодульной и любой другой аппаратуры.

Задача получения минимума функции числа пересечений для произвольной схемы относится к числу комбинаторно-логических задач, точное решение которых возможно только путем перебора всех возможных вариантов расположения схемы, но этот путь не под силу даже быстродействующим ЭВМ. Поэтому разрабатываются эвристические алгоритмы минимизации числа пересечений [1,2]. Отметим, что в частном случае для полных графов существует оценка минимального числа пересечений [3].

В настоящей работе рассматривается метод минимизации числа пересечений в модульных схемах. Алгоритм позволяет минимизировать только пересечения, образованные проводниками, инцидентными разным модулям. Разработанный алгоритм, по нашему мнению, прост, эффективен и легко реализуется на ЦВМ.

Для формализации исходную схему соединения модулей представим неориентированным графом $G=(X, U)$, где X - множество вершин, причем каждая вершина этого множества соответствует определенному модулю, а U - множество ребер графа, соответствующее связям схемы. Пусть граф имеет гамильтонов цикл и расположен таким образом, что ребра этого цикла делят плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Очевидно, что исследование графа с гамильтоновым циклом не сужает постановку задачи, так как отсутствие цикла после применения алгоритма минимизации числа пересечений позволит только уменьшить это число за счет проведения некоторых ребер графа в месте, где отсутствуют ребра цикла.

Основная идея алгоритма минимизации числа пересечений внутрисхемных соединений заключается в следующем. По исходной схеме строится мультиграф, затем он располагается заданным образом и по нему записывается видоизмененная матрица смежности R . По матрице R находятся "отклонения" для каждого ребра графа G , а затем строится матрица отклонений ребер N . Потом из N выбирается ребро, для которого "отклонение" на данном шаге имеет максимальное положительное значение. Далее это ребро выносится во внешнюю область гамильтонова или псевдогамильтонова цикла. Указанный процесс продолжается до тех пор, пока все элементы матрицы N не станут отрицательными или равными нулю. В конце работы алгоритма производится обратный переход от графа к топологии схемы.

Известно [2,5], что минимизация максимального числа пересечений на каждом шаге алгоритма позволяет получать верхнюю оценку для минимального числа пересечений ребер графа.

Для полных графов минимальное число пересечений, согласно [3], не превосходит

$$\rho(G) \leq \begin{cases} 1/64 n(n-2)^2(n-4), & \text{при } n \text{ четном,} \\ 1/64 (n-1)^2(n-3)^2, & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Алгоритм минимизации, представленный в работе, позволяет получать ρ для полных графов, а для неполных графов - значения меньше $\rho(G)$.

Рассмотрим более подробно процесс построения матрицы N и этапы алгоритма минимизации общего числа пересечений ребер графа.

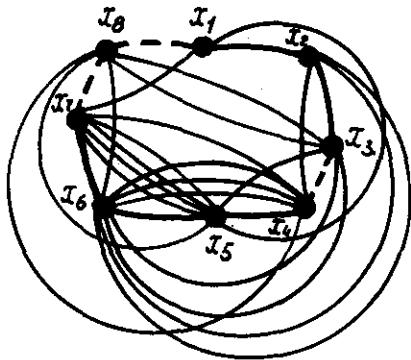


Рис. 1.

Для ребра u_{3p} , мультичисло которого равно двум, найдем значение отклонения Δ_{3p} . Построим сначала видоизмененные матрицы смежности R_i и \bar{R}_i для внутренней и внешней областей графа G [4].

$$R_i = \begin{matrix} 1 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & - \\ 2 & & 0 & X & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & & 0 & - & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 4 & & & 0 & X & 3 & 1 & 0 & \\ 5 & & & & 0 & X & 4 & 0 & \\ 6 & & & & & 0 & X & 1 & \\ 7 & & & & & & 0 & - & \\ 8 & & & & & & & 0 & \end{matrix}, \quad \bar{R}_i = \begin{matrix} 1 & 0 & X & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - \\ 2 & & 0 & X & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & & 0 & - & 0 & 2 & 0 & 2 & \\ 4 & & & 0 & X & 0 & 0 & 1 & \\ 5 & & & & 0 & X & 0 & 1 & \\ 6 & & & & & 0 & X & 0 & \\ 7 & & & & & & 0 & - & \\ 8 & & & & & & & 0 & \end{matrix}$$

Далее по алгоритму, описанному в [4], легко определить число пересечений ребра u_{3p} , когда оно внутри псевдогамильтонова цикла, подсчитав сумму элементов в выделенной подматрице пересечений R_i и умножив ее на мультичисло ребра u_{3p} . Аналогично число пересечений ребра u_{3p} при помещении его во внешнюю область определяется из подматрицы пересечений, выделенной в \bar{R}_i . Итак, запишем число пересечений для ребра u_{3p} , когда оно во внутренней области

$$P_{3p}^o = \varphi_{3p} \sum \varphi_{pq}^o = 2(1+1) = 4, \quad (I)$$

Под отклонением ребра u_{ij} графа G будем понимать разность между числом пересечений этого ребра со всеми остальными ребрами графа, когда оно расположено во внутренней области, и числом пересечений этого же ребра, проведенного во внешней области гамильтонова или псевдогамильтонова цикла.

Пусть, например, дан граф G , изображенный на рис.1.

и когда ребро u_{3p} во внешней области

$$\bar{P}_{3p} = \varphi_{3p} \sum \bar{\varphi}_{pq} = 2(1+2) = 6, \quad (2)$$

где $\varphi_{pq} = \kappa$, κ - число ребер между вершинами x_p и x_q ($\kappa = 0, 1, \dots$), $\sum \varphi_{pq}^o$ ($\sum \bar{\varphi}_{pq}$) - сумма элементов в подматрице пересечений, выделенных в матрице смежности R_i (\bar{R}_i) *).

Отклонение ребра u_{3p} определится теперь как

$$\Delta_{3p} = P_{3p}^o - \bar{P}_{3p} = -2. \quad (3)$$

Это означает, что при переносе ребра u_{3p} из внутренней области во внешнюю общее число пересечений графа увеличивается на 2.

Матрица отклонений N получается путем замены элементов матрицы смежности R графа G на соответствующие значения отклонения ребер.

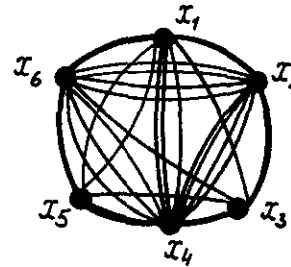


Рис. 2

Заметим, что на первом шаге выполнения алгоритма все элементы матрицы \bar{R}_i равны нулю, а матрица R_i совпадает с матрицей смежности R_i графа G_i , так как все ребра по условию проводятся во внутренней области. Следовательно, на первом шаге $\Delta_{ij} = P_{ij}^o$ и матрица N строится путем замены элементов матрицы R на соответствующие им значения пересечений ребер.

Рассмотрим на примере минимизацию числа пересечений в графе G_2 , изображенном на рис.2. При таком расположении графа число пересечений $P = 68$. Матрица смежности графа имеет вид

$$R_2 = \begin{matrix} 1 & 0 & X & 1 & 3 & 2 & X \\ 2 & & 0 & X & 4 & 2 & 4 \\ 3 & & & 0 & X & 1 & 1 \\ 4 & & & & 0 & X & 3 \\ 5 & & & & & 0 & X \\ 6 & & & & & & 0 \end{matrix}$$

* Подробное описание методики подсчета числа пересечений ребер графа приведено в работе [4].

Определив для каждого ребра графа значение отклонения, как показано выше, построим матрицу отклонений ребер

$$N_2^0 = \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & X & 10 & 24 & 16 & X \\ 2 & & 0 & X & 12 & 16 & 24 \\ 3 & & & 0 & X & 10 & 11 \\ 4 & & & & 0 & X & 15 \\ 5 & & & & & 8 & X \\ 6 & & & & & & 0 \end{array}$$

По матрице N_2^0 определяется элемент с максимальным положительным отклонением: если таких элементов несколько, то выбирается любой из них, и ребро (несколько ребер) графа G_2 , соответствующее определенному отклонению, выносится во внешнюю область гамильтонова цикла. В нашем случае таким ребром является u_{39} . После этого матрицы смежности для внутренней и внешней областей графа примут вид

$$R_2^0 = \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & X & 1 & 3 & 2 & X \\ 2 & & 0 & X & 4 & 2 & 0 \\ 3 & & & 0 & X & 1 & 1 \\ 4 & & & & 0 & X & 3 \\ 5 & & & & & 0 & X \\ 6 & & & & & & 0 \end{array}, \quad \bar{R}_2^0 = \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & X \\ 2 & & 0 & X & 0 & 0 & 4 \\ 3 & & & 0 & X & 0 & 0 \\ 4 & & & & 0 & X & 0 \\ 5 & & & & & 0 & X \\ 6 & & & & & & 0 \end{array}$$

а матрица отклонений ребер после первого шага запишется

$$N_2^1 = \begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & X & 2 & 0 & 0 & X \\ 2 & & 0 & X & 12 & 16 & - \\ 3 & & & 0 & X & 10 & 11 \\ 4 & & & & 0 & X & 15 \\ 5 & & & & & 0 & X \\ 6 & & & & & & 0 \end{array}$$

Прочерк в матрице N_2^1 соответствует вынесенному ребру u_{26} . Заметим, что в матрице N_2^1 по сравнению с N_2^0 изменились значения элементов, соответствующих ребрам, пересекающимся с ребром u_{26} . На втором шаге аналогичная процедура выполняется

для ребра u_{25} , имеющего максимальное отклонение.

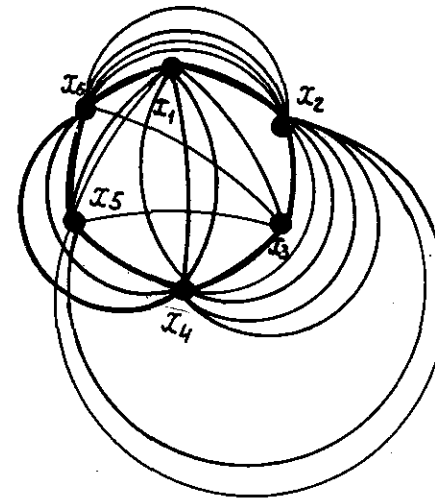


Рис.3

После этого алгоритм выполняется для ребер u_{24} и u_{26} и на этом процесс минимизации заканчивается. Для окончательного варианта расположение графа ребра $u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}$ располагаются во внутренней области, а ребра u_{24}, u_{25}, u_{26} и u_{27} — во внешней области гамильтонова цикла.

Число пересечений ребер графа уменьшилось с 68 до 12. Граф G_2 после выполнения алгоритма показан на рис.3.

Отметим, что при минимизации числа пересечений нет необходимости строить на каждом шаге матрицы R_2^i и \bar{R}_2^i и подсчитывать отклонение ребер, как показано выше для наглядности метода.

Для этого достаточно использовать только матрицу смежности R_2^i и матрицу отклонений ребер, полученную на первом шаге алгоритма. Начиная со второго шага, новые значения матрицы N_2^i определяются в виде

$$\Delta_{pq}^i = \Delta_{pq}^{i-1} - 2\varphi_{pq} \varphi_{ij}^i, \quad (4)$$

где Δ_{pq} — значение отклонения ребра u_{pq} графа G на предыдущем шаге,

φ_{pq} — элемент матрицы R_2^i , соответствующий ребру u_{pq} ,

φ_{ij}^i — элемент матрицы R_2^i , соответствующий вынесенному ребру u_{ij} на данном шаге выполнения алгоритма.

Покажем справедливость выражения (4). Для этого рассмотрим (3), то есть

$$\Delta_{pq} = \bar{p}_{pq} - \bar{p}_{pq} = \varphi_{pq} \sum \bar{\varphi}_{ke} - \varphi_{pq} \sum \bar{\varphi}_{ke}.$$

Предположим теперь, что ребро u_{ij} выносится во внешнюю область (для удобства считаем, что элемент φ_{ij} , соответствующий ребру u_{ij} , входит в подматрицу пересечения $\hat{R}(\bar{x})$ для φ_{pq}). При этом значение $\sum \varphi_{ke}$ уменьшится на φ_{ij} , а $\sum \bar{\varphi}_{ke}$ увеличится на φ_{ij} . Следовательно, новое значение отклонения для ребра u_{pq} после выноса ребра u_{ij} запишется

$$\Delta'_{pq} = \varphi_{pq} [\sum \varphi_{ke} - \varphi_{ij}] - \varphi_{pq} [\sum \bar{\varphi}_{ke} + \varphi_{ij}] = \\ = \varphi_{pq} (\sum \varphi_{ke} - \sum \bar{\varphi}_{ke}) - \varphi_{pq} (\varphi_{ij} + \varphi_{ij}) = \Delta_{pq} - 2 \varphi_{pq} \varphi_{ij},$$

что и требовалось показать.

Вернемся к матрицам R_2 и N'_2 . Выносим, как и прежде, ребро u_{25} в другую область и, выделив в матрице R_2 подматрицу пересечений для ребра u_{25} [4], находим новые значения отклонения ребер по формуле (4).

$$\Delta'_{13} = \Delta_{13} - 2 \varphi_{13} \varphi_{25} = 2 - (2 - 1) \cdot 2 = -2,$$

$$\Delta'_{14} = \Delta_{14} - 2 \varphi_{14} \varphi_{25} = -12,$$

$$\Delta'_{36} = 7, \quad \Delta'_{46} = 3.$$

Значения $\Delta'_{35} = \Delta_{35}$, $\Delta'_{15} = \Delta_{15}$ и $\Delta'_{24} = \Delta_{24}$, так как элементы матрицы R_2 , соответствующие ребрам u_{35} , u_{15} , u_{24} , не входят в подматрицу пересечения для ребра u_{25} , другими словами, ребра u_{35} , u_{15} и u_{24} не пересекаются с ребром u_{25} .

Сформулируем теперь алгоритм для минимизации числа пересечений соединений микросхем.

1. Переходим от схемы к графу, располагая все ребра графа внутри гамильтонова или псевдогамильтонова цикла. Переходим к п.2.

2. Записываем матрицу смежности R_2 и, используя выражение (1), определяем число пересечений P_{ij} для любого ребра u_{ij} графа G_2 . Переходим к п.3.

3. По формуле (3) определяем отклонение для каждого ребра графа G и записываем матрицу отклонений ребер N'_2 . Переходим к п.4.

4. В матрице N'_2 выбирается элемент, имеющий максимальное положительное значение. Если таких элементов несколько, то бе-

рется любой или тот, который соответствует ребру с наименьшим мультичислом. Переход к п.5. В том случае, если в матрице N'_2 все элементы отрицательны или равны нулю, переход к п.7.

5. Ребро мультиграфа, соответствующее выделенному элементу, переносится во внешнюю область гамильтонова или псевдогамильтонова цикла. Переход к п.6.

6. Определяются новые значения отклонений ребер по формуле (4), и строится матрица отклонений для данного шага алгоритма. Переход к п.4.

7. Производится переход от графа к топологии схемы с введением узловых точек в тех местах, где соединения, инцидентные одному и тому же выводу, пересекаются с другими соединениями схемы, что позволяет уменьшить число пересечений. Конец работы алгоритма.

Заметим, что перед переходом от графа к топологии схемы можно выделить ребра, вносящие пересечения, а оставшуюся плоскую часть графа расположить с помощью метода стереографической проекции или другим способом. [5] в заданных точках платы с последующим внесением выделенных ребер.

Разработанный алгоритм минимизации числа пересечений соединений микросхем предполагается использовать в малой системе автоматизации проектирования топологии схем ЦВМ, так как в нашем случае машина выполняет рутинные операции, связанные с подсчетом числа пересечений и определением значений отклонений, а вопросы перехода от схемы к графу и от графа к топологии схемы выполняет конструктор, используя свой инженерный опыт.

Составлена программа минимизации числа пересечений ребер графа, записанная на языке ЛЯПАС для ЦВМ "Минск-22", которая после трансляции занимает 1127(8) машинных команд. Объем памяти машины позволяет работать с графиками, содержащими до 120 вершин.

В общем случае время решения задачи $t \approx \kappa_1 n^2 - \kappa_2 n + \kappa_3 z$, где n - число вершин графа, z - число ребер, κ - коэффициент.

При минимизации числа пересечений в полном графе с $n=10$ потребовалось 40 секунд машинного времени, $P_{min} = 60$. Для полного графа с 40 вершинами время решения - 3 минуты, $P_{min} = 32490$. Для неполного графа с $n=40$, $z=300$ потребовалось 1,5 минуты.

Л и т е р а т у р а

1. СТАРОСТИНА А.Н. Алгоритмы минимизации числа пересечений,—"Вычислительная техника для управления производством", "Машиностроение", 1969.

2. БАТАЛОВ Б.В., КАЗЕНОВ Г.Г., КУРМАЕВ Ф.А., ШЕМЕЛИНИН В.М. Алгоритмы взаимного размещения компонентов полупроводниковых интегральных схем с минимальным числом пересечений внутрисхемных соединений,—"Микроэлектроника", "Сов.радио", 1969, вып.3.

3. SAATY THOMAS L. Two theorems on the minimum number of intersections for complete graphs. J. Combin. Theory, 1967, 2, N 4.

4. МЕЛИХОВ А.Н., КУРЕЙЧИК В.М., СЕЛЯНКИН В.В., ТИЩЕНКО В. А. О числе пересечений ребер произвольного графа,—"Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып.41.

5. WING O. On drawing a planar graph. IEEE Trans. Circuit Theory, 1966, CT-13, N 1.

Поступила в редакцию
10.УИ.1971 г.