УДК 681. 31

# О РАЗМЕЩЕНИИ Д.Н.Ф. БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА МИНИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

С.М. Ачасова

Задачи синтеза переключательных схем привели к установлению двух понятий наиболее простой дизъюнктивной нормальной формы д.н.ф. булевых функций:

1. Минимальной д.н.ф., т.е. д.н.ф., реализующей данную булеву функцию $f$ и содержащей наименьшее число букв по сравнению с другими д.н.ф., реализующими $f$ ;

2. Кратчайшей д.н.ф., т.е. д.н.ф., реализующей данную булеву функцию $f$ и содержащей наименьшее число элементарных конъюнкций по сравнению с другими д.н.ф., реализующими $f$ .

Синтез булевых функций в однородных структурах и вычислительных средах [1,2,3,4] потребовал введения еще одного понятия простейшей д.н.ф., а именно д.н.ф., реализующей данную булеву функцию $f$ и размещающейся на наименьшей площади однородной структуры или среды по сравнению с другими д.н.ф., реализующими $f$ .

Имеются в виду методы синтеза булевых функций, с помощью которых д.н.ф. размещается в прямоугольном поле среды, где каждому столбцу (строке) соответствует переменная или ее отрицание, а строке (столбцу) – элементарная конъюнкция. Таким образом, размер прямоугольника среды $R$ определяется количеством конъюнкций $M$, составляющих д.н.ф., и числом различных переменных $N$, входящих в д.н.ф. ( $x$ и $\bar{x}$ различны), $R=M\cdot N$.

Цель работы состоит в том, чтобы показать, что площадь прямоугольного поля среды, на котором размещена д.н.ф., будет минимальной, если д.н.ф. состоит из простых импликант и является кратчайшей.

Докажем следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА. Любая тупиковая дизъюнктивная нормальная форма булевой функции (существенно зависящей от своих переменных) содержит такое же количество букв ( $x$ и $\bar{x}$ различны), что и сокращенная д.н.ф. этой же функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$, сокращенная д.н.ф. которой содержит $m=n+k$ различных букв, $n$ переменных $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n$ ( $\tilde{x}_i=x_i$ либо $\tilde{x}_i=\bar{x}_i$ ) и отрицания $k$ переменных $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_k$. Лемма утверждает, что не найдется такой тупиковой д.н.ф. функции $f$, в которую бы не входила переменная $x_j$ или $\bar{x}_j\ (j=1,\dots,k)$. Для доказательства все конъюнкции в сокращенной д.н.ф. $C$ разбиваются на 3 группы. Первая группа – конъюнкции, в каждую из которых входит $x_j$, вторая группа – конъюнкции, содержащие $\bar{x}_j$, и третья группа состоит из конъюнкций, не содержащих ни $x_j$, ни $\bar{x}_j$. Таким образом, сокращенная д.н.ф. записывается в виде:

$$C = x_j A \vee \bar{x}_j B \vee D,$$

где $A$, $B$ и $D$ – элементарные конъюнкции, не содержащие $j$-ю переменную. Буква $\tilde{x}_j$ не входит в какую-нибудь тупиковую д.н.ф., если имеет место поглощение группы конъюнкций $\tilde{x}_j A$ конъюнкциями $D$, т.е. $\tilde{x}_j A \to D \equiv 1$. Предположим, что все конъюнкции $\tilde{x}_j A$, кроме одной $\tilde{x}_j A_1$, поглощаются совокупностью конъюнкций $\tilde{x}_j A_1 \vee D$. Тогда тождество $\tilde{x}_j A \to D \equiv 1$ справедливо в том случае, если $\tilde{x}_j A_1 \to D \equiv 1$, но из последнего выражения следует, что $A_1 \to D \equiv 1$ и $\tilde{x}_j A_1 \to A_1 \equiv 1$, т.е. имеет место элементарное поглощение. А это значит, что конъюнкция $\tilde{x}_j A_1$ не является простой импликантой. Таким образом, для простых



импликант, т.е. для сокращенных д.н.ф., поглощение $\tilde{x}_j A \to D \equiv 1$ не может иметь места. Лемма доказана.

На основе леммы легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Для кратчайшей д.н.ф. булевой функции, состоящей из простых импликант, произведение $P$ числа конъюнкций $M$ на число различных букв, входящих в д.н.ф., $N$ ( $x$ и $\bar{x}$ различны) минимально по сравнению с любой другой д.н.ф., реализующей $f$, т.е. $P=M\cdot N=P_{min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы следует, что любая д.н.ф., состоящая из простых импликант, записывается с помощью минимального числа различных букв $N=N_{min}$. Кратчайшая д.н.ф. имеет минимальное число конъюнкций $M=M_{min}$. Таким образом,

$$P=M_{min}\cdot N_{min}=P_{min}.$$

Следует сказать, что минимальная д.н.ф. может иметь число $P$, большее, чем кратчайшая, т.к. первая не обязана быть кратчайшей [5].

Таким образом, теорема дает возможность утверждать, что кратчайшая д.н.ф., состоящая из простых импликант, займет в среде наименьшую площадь $R=M_{min}\cdot N_{min}=R_{min}$ по сравнению с любой другой д.н.ф., реализующей $f$, в том числе и минимальной.

## Литература


1. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные вычислительные системы высокой производительности, Новосибирск, 1966.

2. БАНДМАН О.Л. Реализация автоматов в криотронной вычислительной среде.-"Вычислительные системы". Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, Новосибирск, 1968, вып.3.

3. MINNICK R.C. Survey of microcellular research, J.ACM, vol. 14, N 2, April 1967.

4. БАНДМАН О.Л. Методы реализации автоматов в криотронной вычислительной среде.-"Труды I межвузовской конференции по

цифровым интегрирующим структурам и вычислительным средам," Таганрог, 1970.

5. ЖУРАВЛЕВ Ю.И. О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм.—"Сибирский математический журнал," 1960, т.1, №4.

Поступила в редакцию

25. IV. 1971