

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА
В СВЯЗИ С РАСЧЕТОМ ХАРАКТЕРИСТИК
ПЛЕНОЧНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО РЕЛЕ ***

С.И. Фадеев

В данной статье приводится численный метод решения интегрального уравнения, связанного с задачами статики модели плёночного электростатического реле. Модель описывает цилиндрический прогиб натянутой жесткой пластинки под действием нагрузки, зависящей нелинейным образом от смещения пластинки [2]. Если из соображений симметрии заранее известно положение максимального прогиба пластинки, то двусторонние оценки решения интегрального уравнения могут быть получены способом, данным в работе [3]. Однако в целом задачи статики рассматриваемой модели сводятся к интегральному уравнению, решение которого не обладает указанным свойством. Приведем примеры.

1. Пусть требуется определить "напряжение срабатывания" U_* , если напряжение на контактном электроде равно U_* . Схе-

*) Тезисы этой статьи опубликованы в материалах XIV Новосибирской областной научно-технической конференции, посвященной Дню радио и Дню связиста [1].

матично модель реле изображена на рис. 1 (картина симметрична

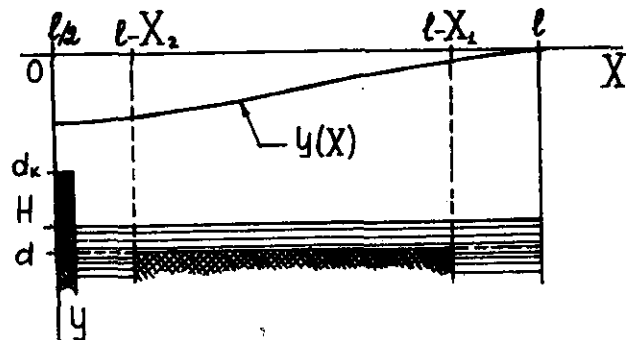


Рис. 1

относительно $X = \frac{l}{2}$). Здесь X - линейная координата; l - длина электрода - пластинки; $y(X)$ - уравнение цилиндрического прогиба пластинки; H - расстояние между невозмущенной пластинкой и поверхностью диэлектрика с диэлектрической постоянной ϵ (через ϵ_0 обозначим диэлектрическую постоянную для пустоты); $l - X_2$, $l - X_1$ - границы "тянущих" электродов, притягивающих пластинку, первоначальный зазор между поверхностью электрода и пластинкой равен d ; d_k - расстояние до выступающего электрода. Под U_k понимается наименьшая разность потенциалов U между пластинкой и "тянущими" электродами, начиная с которой пластинка окажется притянутой к контактному электроду. Пластинка натянута с силой P , отнесенной к единице ширины, и обладает цилиндрической жесткостью D . На концах закрепления пластинки выполняются условия:

$$y - \frac{dy}{dX} = 0 \text{ при } X=0 \text{ и } X=l$$

Сделаем переход к безразмерным переменным x и $y(x)$ по формулам:

$$X = \frac{l}{2}(1+x), \quad y = \left[H + \frac{1}{\epsilon} (d-H) \right] y. \quad (1)$$

При этом условии равновесия пластинки описывается нелинейным интегральным уравнением вида

$$y(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} K(x, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} + \sigma_k \frac{K(x, 0; \alpha)}{[y_k - y(0)]^2}. \quad (2)$$

Здесь

$$x_0 = 1 - \frac{2}{l} X_2, \quad x_N = 1 - \frac{2}{l} X_1, \quad y_k = d_k \left[H + \frac{1}{\epsilon} (d-H) \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 l^2 U^2}{8 \left[H + \frac{1}{\epsilon} (d-H) \right]^3 D}, \quad \sigma_k = \frac{\epsilon_0 l \Delta_k U^2}{8 \left[H + \frac{1}{\epsilon} (d-H) \right]^3 D}, \quad \alpha^2 = \frac{4D}{l^2 P};$$

$K(x, \theta; \alpha)$ - функция Грина рассматриваемой краевой задачи - имеет вид [3]:

$$K(x, \theta; \alpha) = \begin{cases} K_-(x, \theta; \alpha), & 0 < x < \theta, \\ K_+(x, \theta; \alpha), & \theta < x < 1; \end{cases} \quad (4)$$

$$K_-(x, \theta; \alpha) = 1 - \theta - \frac{\alpha}{4\theta} \left[ch \frac{1}{\alpha} - ch \frac{\theta}{\alpha} + (ch \frac{1-\theta}{\alpha} - 1) ch \frac{x}{\alpha} \right],$$

$$K_+(x, \theta; \alpha) = 1 - x - \frac{\alpha}{4x} \left[ch \frac{1}{\alpha} - ch \frac{x}{\alpha} + (ch \frac{1-x}{\alpha} - 1) ch \frac{\theta}{\alpha} \right].$$

В записанном таким образом условии равновесия предполагается, что сила

$$F_k = \frac{\epsilon_0 U_k^2 \Delta_k}{2 [d_k - y(l/2)]^2}$$

(Δ_k - размер контакта по X), обусловленная разностью потенциалов U_k , воздействует на пластинку как сосредоточенная.

Исключим из (2) σ_k . Для этого воспользуемся равенством (2) при $x = 0$, из которого следует, что

$$\sigma_k = \frac{[y_k - y(0)]^2}{K(0, 0; \alpha)} \left\{ y(0) - \sigma \int_{x_0}^{x_N} K(0, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} \right\}. \quad (5)$$

В результате получим

$$y(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} \left\{ K(x, \theta; \alpha) - \frac{K(x, 0; \alpha) K(0, \theta; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)} \right\} \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} +$$

$$+ y(0) \frac{K(x, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)}. \quad (6)$$

Наконец, преобразование

$$z(x) = \frac{y(x) - y(0) \frac{K(x, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)}}{1 - y(0) \frac{K(x, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)}} \quad (7)$$

позволяет записать (2) в искомом виде:

$$z(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} \frac{V(x, \theta; \alpha) d\theta}{[1 - z(\theta)]^2}, \quad (8)$$

где

$$V(x, \theta, \alpha) = \frac{K(x, \theta; \alpha) - \frac{K(x, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)} K(0, \theta; \alpha)}{[1 - y(0) \frac{K(x, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)}] [1 - y(0) \frac{K(\theta, 0; \alpha)}{K(0, 0; \alpha)}]^2}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Качественное решение (2) может быть исследовано, исходя из выражений простейших оценок, аналогичных тем, которые были получены в [3].

Пусть $y(\theta) \equiv y(x_0)$ при $x_0 \leq \theta \leq x_N$. Для удобства введем обозначения:

$$\xi = y(0), \quad \eta = y(x_0), \quad a_{00} = K(0, 0; \alpha), \quad a_{10} = K(x_0, 0; \alpha),$$

$$A_0 = \int_{x_0}^{x_N} K(0, \theta; \alpha) d\theta, \quad A_1 = \int_{x_0}^{x_N} K(x_0, \theta; \alpha) d\theta.$$

Пологая в (2) $x=0$ и $x=x_0$, имеем следующую систему равенств:

$$\xi = A_0 \frac{\sigma}{(1-\eta)^2} + a_{00} \frac{\sigma_\kappa}{(y_\kappa - \xi)^2},$$

$$\eta = A_1 \frac{\sigma}{(1-\eta)^2} + a_{10} \frac{\sigma_\kappa}{(y_\kappa - \xi)^2}.$$

Отсюда мы можем найти функции $\sigma(\xi, \eta)$ и $\sigma_\kappa(\xi, \eta)$ в виде:

$$\sigma = \frac{1}{D_0} (1-\eta)^2 (a_{00} \eta - a_{10} \xi), \quad D_0 = a_{00} A_1 - a_{10} A_0, \quad (9)$$

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{D_0} (y_\kappa - \xi)^2 (A_1 \xi - A_0 \eta).$$

Разрешим второе уравнение (9) относительно η и подставим найденное выражение в первое. Получим

$$\sigma = \frac{1}{A_0} \left[1 - \frac{A_1}{A_0} \xi + \frac{D_0}{A_0} \frac{\sigma_\kappa}{(y_\kappa - \xi)^2} \right]^2 \left[\xi - \frac{a_{00} \sigma_\kappa}{(y_\kappa - \xi)^2} \right]. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что σ принимает положительные значения, если $\xi' < \xi < \xi''$, где ξ' и ξ'' - корни уравнения

$$a_{00} \sigma_\kappa = \xi (y_\kappa - \xi)^2. \quad (11)$$

Отсюда следует, что при заданном σ_κ существует наибольшее значение σ , равное σ_{max} , которое и определяет \mathcal{U}_κ (в данном случае оценочное выражение) с учетом \mathcal{U}_κ . Так как при $\sigma = 0$ решение (2) удовлетворяет (11), то σ_κ ограничено сверху значением $\sigma_{\kappa*}$

$$\sigma_{\kappa*} = \frac{4}{27} \frac{y_\kappa^3}{K(0, 0; \alpha)}$$

Качественный график (10) приведен на рис. 2. С ростом σ_κ

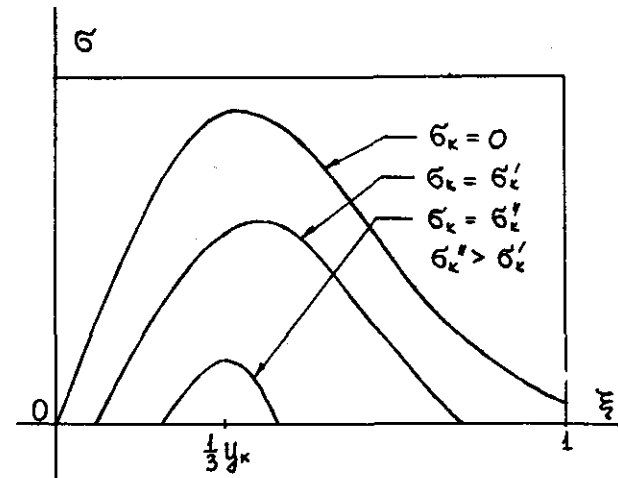


Рис. 2.

значение σ_{max} убывает и обращается в ноль при $\sigma_\kappa = \sigma_{\kappa*}$. Наибольшее значение σ_{max} принимает при $\sigma_\kappa = 0$:

$$\sigma_\kappa = 0, \quad \sigma_{max} = \sigma_* = \frac{4}{27 A_1}.$$

Функция $\sigma_{max} = f(\sigma_\kappa; y_\kappa)$ может быть построена из следующего соображения: при $\sigma > \sigma_{max}$ нарушается взаимно однозначное со-

ответствие между σ , σ_k и ξ , η , определяемое системой равенств для σ и σ_k . Приравняв нулю якобиан системы

$$J = \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \xi} = 0,$$

мы найдем отсюда зависимость $\eta = \eta(\xi)$, подстановка которой в (9) дает выражение $f(\sigma_k; y_k)$ в параметрическом виде:

$$\sigma = \sigma[\xi, \eta(\xi); y_k], \quad \sigma_k = \sigma_k[\xi, \eta(\xi); y_k].$$

Имеем

$$J = \frac{(1-\eta)(y_k - \xi)}{D_0^2} [a_{10} A_0 (1-\eta)(y_k - \xi) - (a_{00} - 3a_{00}\eta + 2a_{00}\xi) \times \\ \times (y_k A_1 - 3A_1 \xi + 2A_0 \eta)].$$

Отсюда функция $\eta = \eta(\xi)$ определяется уравнением

$$6a_{00} A_0 \eta^2 - [3(a_{10} A_0 + 3a_{00} A_1) \xi - y_k D_0 + 2a_{00} (A_0 - y_k A_1)] \eta + \\ + 6a_{10} A_1 \xi^2 + [3D_0 + 2a_{10} (A_0 - y_k A_1)] \xi - y_k D_0 = 0. \quad (12)$$

Качественная зависимость $f(\sigma; y_k)$ изображена на рис. 3.

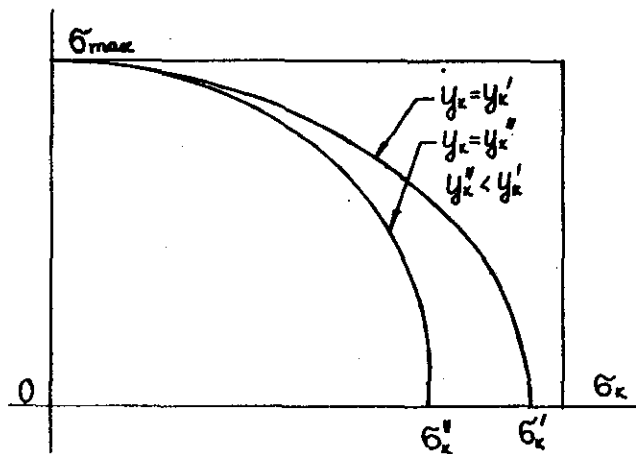


Рис. 3.

Подчеркнем очевидный результат. Заменяя $y(0)$ на $y(x_0)$, мы тем самым завышаем значение интеграла при σ в (2) и, следовательно, фиксированное значение $y(0)$ достигается при мень-

ших σ . Таким образом, мы получили выражение нижней оценки σ_{max} задачи (2).

Аналогичное выражение оценки сверху следует из (2) при замене $y(0)$ на $y(0) = y(x_N)$. При этом под η , a_{10} и A_1 следует понимать выражения:

$$\eta = y(x_N), \quad a_{10} = \kappa(x_N, 0; \alpha), \quad A_1 = \int_{x_0}^{x_N} \kappa(x_N, \theta; \alpha) d\theta.$$

Найденное приближенное решение (2) может быть использовано при расчетах инженерного характера.

2. Пусть высота контактного электрода такова, что выполняется неравенство

$$y_H = \frac{H}{H + \frac{1}{E}(d-H)} > y_k > \bar{y}_*,$$

где \bar{y}_* соответствует σ_{max} в задаче предыдущего пункта. Тогда при $\sigma > \sigma_{max}$ пластинка окажется притянутой к контактному электроду. Воздействие контактного электрода на пластинку заменим сосредоточенной силой P на единицу ширины. Требуется найти P , определяющую контактное давление, в зависимости от U и d_k .

В случае, когда пластинка опирается только на контактный электрод, уравнение равновесия может быть записано в виде:

$$y(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} \kappa(x, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} + q \kappa(x, 0; \alpha), \quad (13)$$

где

$$q = \frac{tR}{4P[H + \frac{1}{E}(d-H)]}.$$

Так как $y(0) = y_k$, то из (13) следует, что

$$q = \frac{1}{\kappa(0, 0; \alpha)} \left\{ y_k - \sigma \int_{x_0}^{x_N} \kappa(0, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} \right\}. \quad (14)$$

Подставив полученное выражение q в (13), преобразуем интегральное уравнение к виду, тождественному (6). Таким образом, мы вновь приходим к интегральному уравнению вида:

$$z(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} U(x, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-z(\theta)]^2}, \quad y(0) = y_k. \quad (15)$$

3. Пусть из решения (15) мы нашли значение $\bar{\sigma}_{max}$ как функцию y_k . Очевидно, с ростом y_k от нуля уменьшается разность $\bar{\sigma}_{max} - \sigma_{max}$ и, начиная с некоторого \bar{y}_k , разность становится отрицательной. В последнем случае равновесие пластинки, рассмотренное в пункте 2, не реализуемо, то есть при $\sigma > \sigma_{max}$ пластинка будет опираться не только на контактный электрод, но и на поверхность диэлектрика. На рис. 4 показано явление "залипания" пластинки [2]: $y(x) = H$ при $l - X_*^{(2)} < X < l - X_*^{(1)}$, $X_1 < X_*^{(1)} < X_*^{(2)} < X_2$. Кроме того, на границах области "залипания" выполняются условия:

$$dy/dx = d^2y/dx^2 = 0, \text{ если } d > 0; \quad dy/dx = 0, \text{ если } d = 0.$$

Переопределенности задачи нет, так как положение границ заранее неизвестно.

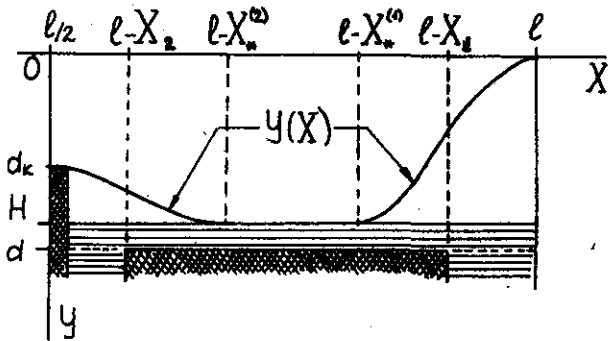


Рис. 4.

Вид граничных условий позволяет симметрично продолжить часть рис. 4 для $l/2 \leq X \leq l - X_*^{(2)}$ относительно $X = l - X_*^{(2)}$ и

свести задачу к решению интегрального уравнения

$$y(x) = \sigma' \int_0^{x'_N} K(x, \theta; \alpha') \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2} \quad (16)$$

с заданным максимальным значением $y(0)$. Здесь использованы отличные от (I) масштабы размерных величин, а именно: x и y связаны с размерными X и Y по формулам

$$x = \frac{X - (l - X_*^{(2)})}{\frac{l}{2} - X_*^{(2)}}, \quad y = \frac{Y}{H - d_k + \frac{1}{\epsilon}(d - H)}. \quad (17)$$

Другие обозначения в (16) выражаются через ранее принятые следующим образом:

$$x'_N = \frac{X_2 - X_*^{(2)}}{\frac{l}{2} - X_*^{(2)}}, \quad \sigma' = \sigma \frac{(1 - \frac{2}{l} X_2)^2}{(1 - x'_N)^2 (1 - y_k)^3},$$

$$\alpha' = \alpha \frac{1 - x'_N}{1 - \frac{2}{l} X_2}, \quad y(0) = \frac{y_H}{1 - y_k} \left(1 - \frac{d_k}{H}\right). \quad (18)$$

Произвольный параметр x'_N и связанный с ним $X_*^{(2)}$ определяются заданием $\sigma > \bar{\sigma}_{max}$ (или $\sigma > \sigma_{max}$, если $\bar{\sigma}_{max} < \sigma_{max}$, в зависимости от величины y_k). После решения (16) реакция контакта может быть подчтена по формуле

$$q = - \frac{(1 - y_k)(1 - x'_N)}{1 - \frac{2}{l} X_2} \sigma' \int_0^{x'_N} \frac{d\theta}{[1 - y(\theta)]^2}. \quad (19)$$

Таким образом, рассматривая задачу об определении контактного давления в случае "залипания" пластинки, мы получили интегральное уравнение (16), метод решения которого дан в [3].

ПРИМЕЧАНИЕ. Положив в (16) $y(\theta) = y(0)$ или $y(\theta) = y(x'_N)$, получим простейшие приближенные выражения, из которых определяются x'_N и q при заданном σ . Например, в первом случае уравнение для x'_N имеет вид:

$$\sigma = \frac{(1 - x'_N)^2 (1 - y_k)^3}{(1 - \frac{2}{l} X_2)^2} \frac{y(0) [1 - y(0)]^2}{\int_0^{x'_N} K(\theta, \theta; \alpha') d\theta} \quad (20)$$

Если x'_N найдено, то приближенное значение q подсчитывается по формуле

$$q = - \frac{(y_H - y_K) x'_N (1 - x'_N)}{(1 - \frac{2}{l} X_2) \int_0^{x'_N} k(0, \theta; \alpha') d\theta} \quad (21)$$

Наибольшее значение контактного давления достигается при $\sigma \rightarrow \infty, x'_N \rightarrow 0$. Устремляя в (16) и (19) или (20) и (21) x'_N к нулю, получаем, что

$$\sup |q| = \frac{y_H - y_K}{(1 - \frac{2}{l} X_2) k(0, 0; \alpha')} \quad (22)$$

4. Рассмотрим модель реза, в котором H - расстояние между невозмущенной пластинкой и поверхностью диэлектрика - есть функция от X . Примеры задания $H(X)$ приведены на рис. 5, а, б (картина симметрична относительно $X = l/2$). Для простоты будем считать, что $u_k = 0$.

Воспользовавшись формулами

$$X = \frac{l}{2} (1 + x), \quad y = (H_0 + \frac{\Delta}{\epsilon}) y,$$

где $H_0 = H(\frac{l}{2})$, а Δ - толщина диэлектрика, представим уравнение равновесия пластинки в виде:

$$y(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} \frac{k(x, \theta; \alpha) d\theta}{[k(\theta) - y(\theta)]^2} \quad (23)$$

Здесь

$$k(x) = \frac{H(x) + \frac{\Delta}{\epsilon}}{H_0 + \frac{\Delta}{\epsilon}}, \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 l^2 u^2}{8(H_0 + \frac{\Delta}{\epsilon})^3 p} \quad (24)$$

Подстановкой в (23)

$$y(x) = k(x) \psi(x) \quad (25)$$

рассматриваемая задача преобразуется к интегральному уравнению типа (8):

$$\psi(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} \frac{\Omega(x, \theta; \alpha) d\theta}{[1 - \psi(\theta)]^2}, \quad (26)$$

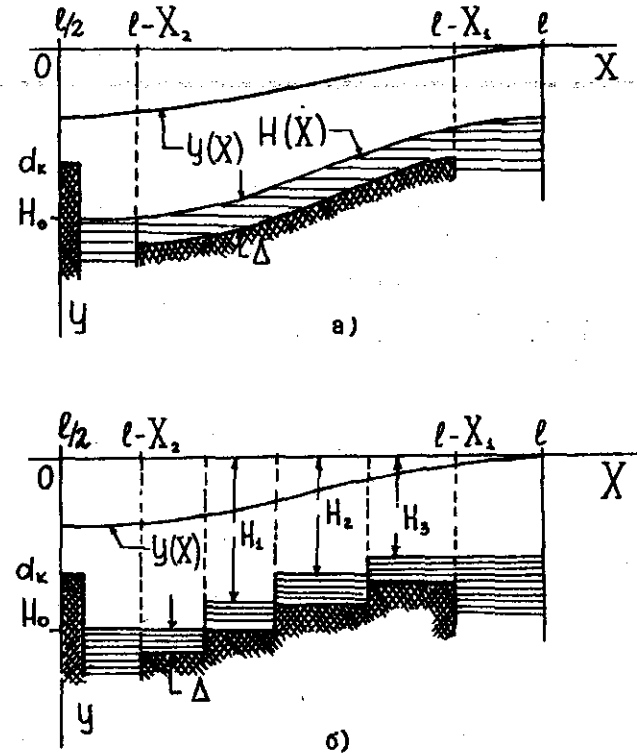


Рис. 5

где

$$\Omega(x, \theta; \alpha) = \frac{k(x, \theta; \alpha)}{k(x) k^2(\theta)}$$

Хотя в силу симметрии $y(x)$ монотонно изменяется на $[0, l]$, так что максимум $y(x)$ равен $y(0)$, тем не менее положение максимума $\psi(x)$, вообще говоря, неизвестно, поскольку поведение $\psi(x)$ определяется заданием $k(x)$.

Таким образом, в примерах I - 4 мы свели задачу статики к решению интегрального уравнения типа Гаммерштейна с неотрицательным в силу задания $k(x, \theta; \alpha)$ ядром. Нам удобно рассмот -

реть метод его решения на следующем примере.

5. Пусть пластинка притягивается одним электродом, границы которого соответствуют значениям x_0 и x_N , $-1 \leq x_0 < x_N \leq 1$. Требуется определить u_* (реле с постоянным зазором H). Запишем условие равновесия пластинки в интегральной форме. Так как прогиб пластинки в силу выбора границ электрода не обладает симметрией, то мы должны в подынтегральном выражении употребить вместо $k(x, \theta; \alpha)$ — функции, которая описывает прогиб пластинки под действием двух единичных сосредоточенных сил, приложенных в точках $x = \pm \theta$, $G(x, \theta; \alpha)$ — функцию Грина в обычном смысле. Имеем

$$y(x) = \sigma \int_{x_0}^{x_N} G(x, \theta; \alpha) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}, \quad (27)$$

где (см. [3])

$$G(x, \theta; \alpha) = \begin{cases} G_-(x, \theta; \alpha), & -1 < x < \theta, \\ G_+(x, \theta; \alpha), & \theta < x < 1. \end{cases}$$

$$G_-(x, \theta; \alpha) = \alpha \left(\alpha \operatorname{th} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} + \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} \right) A^-(\theta) + \\ + \alpha \left(\alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} + x \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} - \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} \right) B^-(\theta),$$

$$G_+(x, \theta; \alpha) = \alpha \left(\alpha \operatorname{sh} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} + \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} \right) A^+(\theta) + \\ + \alpha \left(\alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} + \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} \right) B^+(\theta),$$

$$A^-(\theta) = \frac{\theta - \operatorname{ch} \frac{1-\theta}{\alpha} + \alpha \operatorname{sh} \frac{1-\theta}{\alpha}}{2\alpha (\operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha})}, \quad B^-(\theta) = \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{1-\theta}{\alpha}}{2\alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}},$$

$$A^+(\theta) = \frac{\theta + \operatorname{ch} \frac{1+\theta}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1+\theta}{\alpha}}{2\alpha (\operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha})}, \quad B^+(\theta) = \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{1+\theta}{\alpha}}{2\alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}}.$$

В дальнейшем для сокращения записи мы обозначим интеграл в правой части (27) через $S(x; \alpha)$, так что уравнение равновесия пластинки примет вид:

$$y(x) = \sigma S(x; \alpha), \quad S(x; \alpha) = \int_{x_0}^{x_N} G(x, \theta; \alpha) f(\theta) d\theta, \quad (28)$$

где

$$f(\theta) = [1 - y(\theta)]^{-1}.$$

Пусть $x = x_*$ — точка, где $y(x)$ принимает максимальное значение y_* , $y_* = y(x_*)$. Как и в [3], рассмотрим решение обратной задачи, исключив из (28) σ и положив в (28) $x = x_*$, то есть требуется решить уравнение

$$y(x) = y_* S^{-1}(x_*; \alpha) S(x; \alpha) \quad (29)$$

с дополнительным условием: $dy/dx = 0$ при $x = x_*$. Здесь y_* — заданное число, $0 < y_* < 1$. Если решение (29) найдено, то соответствующее y_* значение σ может быть подсчитано по формуле

$$\sigma = y_* S^{-1}(x_*; \alpha).$$

Сразу обращает на себя внимание трудность, возникающая при решении несимметричной обратной задачи, которая связана с тем, что положение максимума $y(x)$ само подлежит определению. С другой стороны, исключение σ желательно, так как решение обратной задачи, если y_* задано в пределах $0 < y_* < 1$, существует и единственно. Это утверждение опирается на физическую интерпретацию зависимости $\sigma(y_*)$ [2]

В принципе нам не обязательно связывать исключение σ с фиксированием y_* . Зададимся значением $\hat{y} = y(\hat{x})$ и запишем обратную задачу в виде

$$y(x) = \hat{y} S^{-1}(\hat{x}; \alpha) S(x; \alpha), \quad \sigma = \hat{y} S^{-1}(\hat{x}; \alpha). \quad (30)$$

При этом мы должны определить области таких \hat{y} , чтобы соответствующие значения $y(x_*)$ оказались бы меньше единицы. Если заранее известно, что \hat{x} мало отличается от x_* , то можно ожидать, что задача (30) имеет решение при $\hat{y} < y_* < 1$, достаточно близких к единице. Будем перебирать значения \hat{y} с некоторым шагом в направлении возрастания \hat{y} от нуля. Тогда, если \hat{x} выбрано удачно, решение (30) позволит построить функцию $\sigma(\hat{y})$ в области, где достигается σ_{max} , и тем самым определить u_* .

С учетом последнего замечания предлагается следующий метод решения (30). Разобьем $[x_0, x_N]$ на N частей с точками разбиения

$$x_s = x_0 + sh, \quad h = \frac{x_N - x_0}{N}, \quad s = 0, 1, \dots, N$$

Обозначим

$$C_s(x) = \frac{1}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_s(x, \theta; \alpha) d\theta, \quad D_s(x) = \frac{1}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_s(x, \theta; \alpha) d\theta \quad (31)$$

Точку \hat{x} выберем, исходя из следующего соображения. Пусть "нагрузка" равномерно распределена на $[x_0, x_N]$ и $f(\theta) \equiv 1$. Вычислим значения функции

$$g(x_i) = \sum_{s=0}^{i-1} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{N-1} D_s(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (32)$$

За \hat{x} возьмем точку x_{i_0} , $0 < i_0 < N$, в которой $g(x_i)$ принимает наибольшее значение, $x_{i_0} = x_0 + i_0 h$.

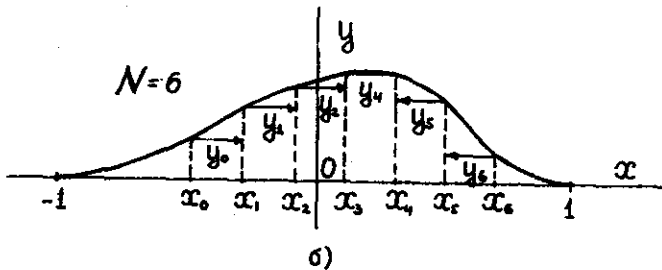
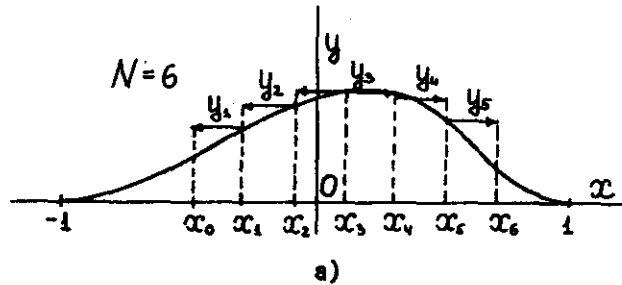


Рис. 6

Задачу (30) сведем к решению системы трансцендентных уравнений, заменив в подынтегральном выражении $y(x)$ на аппрокси-

мирующую функцию $\hat{y}(x)$. Пусть y_s - значения y в точках разбиения и пусть наибольшее среди y_s значение y_* достигается при $s = i_*$, то есть в точке $x_* = x_0 + i_* h$. Вообще говоря, у нас нет оснований считать, что $i_* = i_0$.

Желая получить нижнюю оценку σ , построим аппроксимируемую функцию $\hat{y}(x)$ по правилу (рис. 6, а):

$$\hat{y}(x) \equiv y(x_{s+1}) = y_{s+1} \text{ при } x_s < x \leq x_{s+1}, \text{ если } 0 \leq s < i_* - 1;$$

$$\hat{y}(x) \equiv y(x_s) = y_s \text{ при } x_s \leq x < x_{s+1}, \text{ если } i_* \leq s \leq N-1.$$

При этом (30) преобразуется в систему $N-1$ уравнений относительно y_i (включая заданное значение \hat{y}):

$$y_i = \frac{\hat{y}}{Q_N(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i-1} f_{s+1} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{i_*-1} f_{s+1} D_s(x_i) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_s D_s(x_i) \right],$$

если $0 < i, i < i_*$;

$$y_* = \frac{\hat{y}}{Q_N(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_{s+1} C_s(x) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_s D_s(x) \right], \quad (33)$$

если $i = i_*$;

$$y_i = \frac{\hat{y}}{Q_N(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_{s+1} C_s(x_i) + \sum_{s=i_*}^{i-1} f_s C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{N-1} f_s D_s(x_i) \right],$$

если $i_* < i < N$. Здесь

$$f_s = (1 - y_s)^{-2}$$

В зависимости от возможных случаев: а) $\hat{x} < x_*$, б) $\hat{x} = x_*$ и в) $\hat{x} > x_*$ - имеем следующее представление $Q_N(\hat{x})$:

$$Q_N(\hat{x}) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{i_*-1} f_{s+1} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{i_*-1} f_{s+1} D_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_s D_s(\hat{x}), & \hat{x} < x_* \\ \sum_{s=0}^{i_*-1} f_{s+1} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_s D_s(\hat{x}), & \hat{x} = x_* \\ \sum_{s=0}^{i_*-1} f_{s+1} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{i-1} f_s C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i}^{N-1} f_s D_s(\hat{x}), & \hat{x} > x_* \end{cases}$$

Вычислив y_i , можем найти нижнюю оценку σ , равную σ_N , по формуле

$$\sigma_N = \hat{y} [h Q_N(\hat{x})]^{-1}. \quad (34)$$

Будем решать (33) методом последовательных приближений. Полагая $f \equiv 1$, получим

$$y_i^{(0)} = \frac{\hat{y}}{Q_N^{(0)}(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i-1} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{N-1} D_s(x_i) \right],$$

где

$$Q_N^{(0)}(\hat{x}) = \sum_{s=0}^{i_0-1} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_0}^{N-1} D_s(\hat{x}),$$

причем $i_*^{(0)} = i_0$ и $\hat{y} \geq y_i$. Используя найденные значения $y_i^{(0)}$, запишем первое приближение, обратившись к системе (33), $\hat{x} = x_*$,

$$y_i^{(1)} = \frac{\hat{y}}{Q_N^{(1)}(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i-1} f^{(0)} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{i_*^{(0)}-1} f^{(0)} D_s(x_i) + \sum_{s=i_*^{(0)}}^{N-1} f^{(0)} D_s(x_i) \right],$$

если $0 < i < i_0$;

$$y_i^{(1)} = \frac{\hat{y}}{Q_N^{(1)}(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_0-1} f^{(0)} C_s(x_i) + \sum_{s=i_0}^{i-1} f^{(0)} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{N-1} f^{(0)} D_s(x_i) \right],$$

если $i_0 < i < N$. Здесь $y_{i_0} = \hat{y}$, $f_s^{(0)} = [1 - y_s^{(0)}]^{-2}$,

$$Q_N^{(1)}(\hat{x}) = \sum_{s=0}^{i_0-1} f_{s+1}^{(0)} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_0}^{N-1} f_s^{(0)} D_s(\hat{x}).$$

Может оказаться, что наибольшее значение $y_s^{(1)}$ достигается при $s = i_*^{(1)}$, $i_*^{(1)} \neq i_*^{(0)}$. Тогда второе приближение ищется из (33) (случаи а), б) или в)) в зависимости от результата сравнения i_0 и $i_*^{(1)}$, причем в правую часть равенств подставляются $f_s^{(1)}$, $f_s^{(1)} = [1 - y_s^{(1)}]^{-2}$, вместо f_s и $i_*^{(0)}$ вместо i_* . Сопоставив найденные $y_s^{(2)}$, определим $i_*^{(2)}$ и с учетом этого построим третье приближение и так далее до тех пор, пока относительная погрешность приближений не станет меньше наперед заданного числа.

При определении верхней оценки σ , равной σ_0 , аппрок-

симирующую функцию $\tilde{y}(x)$ следует задавать в виде (рис. 6, б):

$$\tilde{y}(x) \equiv y(x_s) \equiv y_s \quad \text{при } x_s \leq x < x_{s+1}, \quad \text{если } 0 \leq s \leq i_* - 1;$$

$$\tilde{y}(x) \equiv y(x_{s+1}) \equiv y_{s+1} \quad \text{при } x_s < x \leq x_{s+1}, \quad \text{если } i_* \leq s \leq N-1.$$

В этом случае система трансцендентных уравнений запишется следующим образом:

$$y_s = \frac{\hat{y}}{Q_B(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_s D_s(x) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_{s+1} D_s(x_0) \right],$$

если $i = 0$;

$$y_i = \frac{\hat{y}}{Q_B(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i-1} f_s C_s(x_i) + \sum_{s=i_*}^{i_*-1} f_s D_s(x_i) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_{s+1} D_s(x_i) \right],$$

если $0 < i, i_0 < i_*$;

(35)

$$y_i = \frac{\hat{y}}{Q_B(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_s C_s(x_i) + \sum_{s=i_*}^{i-1} f_{s+1} C_s(x_i) + \sum_{s=i}^{N-1} f_{s+1} D_s(x_i) \right],$$

если $i_* < i < N$;

$$y_N = \frac{\hat{y}}{Q_B(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_s C_s(x_N) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_{s+1} C_s(x_N) \right],$$

если $i = N$, где

$$Q_B(\hat{x}) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{i_0-1} f_s C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_0}^{i_*-1} f_s D_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_{s+1} D_s(\hat{x}), & \hat{x} < x_*; \\ \sum_{s=0}^{i_0-1} f_s C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_0}^{N-1} f_{s+1} D_s(\hat{x}), & \hat{x} = x_*; \\ \sum_{s=0}^{i_*-1} f_s C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_*}^{i_0-1} f_{s+1} C_s(\hat{x}) + \sum_{s=i_0}^{N-1} f_{s+1} D_s(\hat{x}), & \hat{x} > x_*. \end{cases}$$

Отсюда y_* определяется по формуле

$$y_* = \frac{\hat{y}}{Q_B(\hat{x})} \left[\sum_{s=0}^{i_*-1} f_s C_s(x_*) + \sum_{s=i_*}^{N-1} f_{s+1} D_s(x_*) \right].$$

Система (35) решается методом последовательных приближений, как и (33). Особенность состоит в том, что после вычисления κ -й итерации, $\kappa = 1, 2, \dots$, следует найти значение $y_{i_*^{(\kappa)}}$ которое в решении системы не входит (в силу определения аппрок-

симметричной функции), и лишь после этого из сравнения $y_i^{(\kappa)}$, включая $y_i^{(\kappa)}$, отыскивается положение наибольшего значения κ -й итерации.

Отыскав y_i , найдем верхнюю оценку σ , равную σ_B ,

$$\sigma_B = y' [h Q_B(x)]^{-1}. \quad (36)$$

Непосредственное интегрирование дает следующие значения $C_s(x)$ и $D_s(x)$:

$$C_s(x) = (\alpha \operatorname{sh} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} + \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}) \times \left[\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} A^+(\theta) d\theta \right] + (\alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} + \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha}) \times \left[\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} B^+(\theta) d\theta \right], \quad (37)$$

$$D_s(x) = (\alpha \operatorname{sh} \frac{x}{\alpha} - x \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} + \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}) \times \left[\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} A^-(\theta) d\theta \right] + (\alpha \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha} + x \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} + \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{ch} \frac{1}{\alpha}) \times \left[\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} B^-(\theta) d\theta \right],$$

где

$$\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} A^+(\theta) d\theta = \frac{x_s + \frac{h}{2} + \frac{2\alpha}{h} \operatorname{sh} \frac{h}{2\alpha} (\operatorname{ch} \frac{2+2x_s+h}{2\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{2+2x_s+h}{2\alpha})}{2 (\operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha})},$$

$$\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} B^+(\theta) d\theta = \frac{1 - \frac{2\alpha}{h} \operatorname{sh} \frac{h}{2\alpha} \operatorname{ch} \frac{2+2x_s+h}{2\alpha}}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}},$$

$$\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} A^-(\theta) d\theta = \frac{x_s + \frac{h}{2} - \frac{2\alpha}{h} \operatorname{sh} \frac{h}{2\alpha} (\operatorname{ch} \frac{2-2x_s+h}{2\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{2-2x_s+h}{2\alpha})}{2 (\operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \alpha \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha})},$$

$$\frac{\alpha}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} B^-(\theta) d\theta = \frac{1 - \frac{2\alpha}{h} \operatorname{sh} \frac{h}{2\alpha} \operatorname{ch} \frac{2-2x_s+h}{2\alpha}}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}}.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Укажем на другое представление задачи (27). Симметрично продолжив картину относительно $X=l$, мы преобразуем (27) в интегральное уравнение (15), в котором ядро $U(x, \theta; \alpha)$ берется при $y(0)=0$, так что $z(x) \equiv y(x)$. Имеем

$$y(x) = \sigma' \int_{x'_0}^{x'_1} [U(x, \theta; \alpha')] y_{\theta=0} \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}, \quad (38)$$

где

$$x'_0 = 1 - \frac{1}{2} X_l, \quad x'_1 = 1 - \frac{1}{2} X_l, \quad \sigma' = 4\sigma, \quad \alpha' = \frac{1}{2} \alpha.$$

Метод решения (38) аналогичен (27). Следует лишь заменить в равенствах (32), (33) и (35) коэффициенты $C_s(x)$ и $D_s(x)$ соответственно на $E_s(x)$ и $F_s(x')$, где

$$E_s(x) = \frac{1}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} \left\{ \kappa_+(x, \theta; \alpha') - \frac{\kappa_+(x, 0; \alpha')}{\kappa(0, 0; \alpha')} \kappa_-(0, \theta; \alpha') \right\} d\theta = A_s(x) - \frac{\kappa_+(x, 0; \alpha')}{\kappa(0, 0; \alpha')} B_s(0), \quad (39)$$

$$F_s(x) = \frac{1}{h} \int_{x_s}^{x_{s+1}} \left\{ \kappa_-(x, \theta; \alpha') - \frac{\kappa_-(x, 0; \alpha')}{\kappa(0, 0; \alpha')} \kappa_-(0, \theta; \alpha') \right\} d\theta = B_s(x) - \frac{\kappa_-(x, 0; \alpha')}{\kappa(0, 0; \alpha')} B_s(0)$$

Здесь $\kappa_-(x, \theta; \alpha')$ и $\kappa_+(x, \theta; \alpha')$ определены в (4), а выражения $A_s(x)$ и $B_s(x)$ имеют вид ($\alpha = \alpha'$):

$$A_s(x) = 1 - x - \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}} (\operatorname{ch} \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ch} \frac{x}{\alpha}) - \frac{2\alpha^2}{h \operatorname{sh} \frac{1}{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{h}{2\alpha} \times (\operatorname{ch} \frac{1-x}{\alpha} - 1) \operatorname{ch} \frac{2x_s+h}{2\alpha},$$

$$B_S(x) = 1 - x_S - \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{h \operatorname{th} \frac{1}{\alpha}} (ch \frac{1}{\alpha} - ch \frac{x}{\alpha}) - \frac{2\alpha^2}{h \operatorname{th} \frac{1}{\alpha}} \frac{h}{2\alpha} x \times (ch \frac{x}{\alpha} ch \frac{2-2x_S-h}{2\alpha} - ch \frac{2x_S+h}{2\alpha})$$

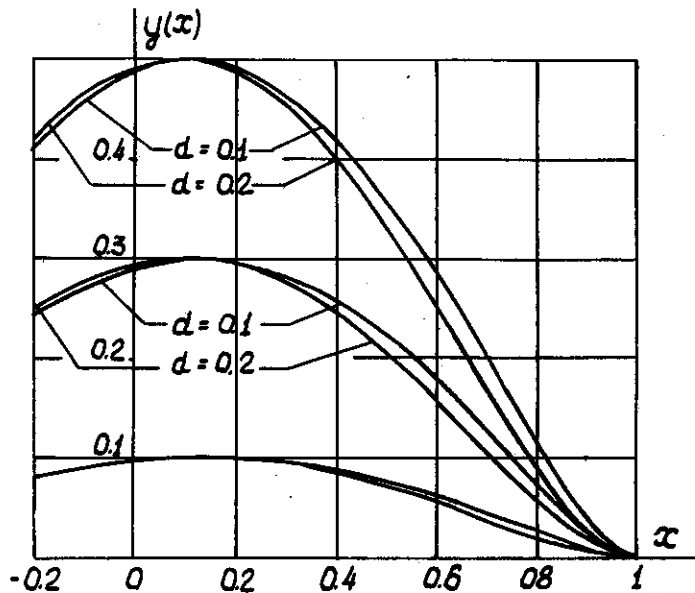


Рис. 7

Приведем результаты численного решения (27) при $x_0 = -0.2$, $x_N = 1$, $N = 30$ и $\alpha = 0.1; 0.2$ (вычисления на ЭВМ выполнены Лукьяновой Р.Г.). В таблице (стр. 23) даны значения σ_H и σ_B в зависимости от \hat{y} , а также уточненные значения оценок σ_{max} . На рис. 7 показаны зависимости $y(x)$ или $\hat{y} = 0.1; 0.3$ и 0.5 , $\alpha = 0.1, 0.2$. Следует отметить, что сходимость метода последовательных приближений, примененного к решению систем (33) и (35), а также качественное поведение решения в рассмотренном

примере (в частности, зависимость $\sigma(\hat{y})$), не отличаются от случая, когда положение максимума $y(x)$ заранее известно.

Наконец, сопоставим результаты, полученные из реализации предложенного алгоритма решения интегрального уравнения ти-

α	i_0	\hat{y}	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.1	8	σ_H	0.2916	0.4746	0.5646	0.5778	0.5301	0.4379
		σ_B	0.2929	0.4791	0.5738	0.5922	0.5498	0.4620
		$\sigma_{Hmax} = 0.5810$ при $\hat{y} = 0.3688$ $\sigma_{Bmax} = 0.5939$ при $\hat{y} = 0.3750$						
0.1	8	σ_H	0.3880	0.6328	0.7543	0.7726	0.7084	0.5828
		σ_B	0.3888	0.6357	0.7620	0.7822	0.7221	0.6005
		$\sigma_{Hmax} = 0.7767$ при $\hat{y} = 0.3688$ $\sigma_{Bmax} = 0.7852$ при $\hat{y} = 0.3750$						

па (8) с решением соответствующей краевой задачи, когда последняя сводится к конечным соотношениям. Это имеет место в примерах 1-3 и 5 при $\alpha = 0$, а также в примере 4, если $H(X)$ - линейная функция или парабола и $\alpha = 0$ [4].

6. Остановимся на примере 4. Задав $k(x)$ в виде

$$k(x) = 1 - \frac{x}{1+y}, \quad y = \frac{\Delta}{\varepsilon H_0}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (40)$$

построим точное решение краевой задачи, соответствующей (23), при $\alpha = 0$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\sigma}{[k(x)-y]^2} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x=0; \quad y=0 \quad \text{при} \quad x=1.$$

Отсюда, полагая

$$z = k(x) - y, \quad z_* = 1 - y(0),$$

запишем решение (41) следующим образом:

$$x(x) = \frac{\sqrt{z_*}}{a} \left[\frac{1}{\gamma+1} z_* \sqrt{z_*} - \sqrt{z(ax+b)} - \frac{b}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{ax_*+z_*} + z_*}{\sqrt{ax_*+z_*}} \right], \quad (42)$$

$$a = \frac{z_*}{(1+\gamma)^2} + 2\sigma, \quad b = -2\sigma z_*,$$

причем σ находится по заданному z_* , $0 < z_* < 1$, из решения трансцендентного уравнения

$$1 = \frac{\sqrt{z_*}}{a} \left[\frac{1}{\gamma+1} z_* \sqrt{z_*} - \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{ax}{\gamma+1} + b} - \frac{b}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{\frac{ax_*}{\gamma+1} + z_*} + z_*}{\sqrt{\frac{ax_*}{\gamma+1} + z_*}} \right]. \quad (43)$$

Вычисления, выполненные Гимельштейн С.М., обнаруживают следующую особенность функции $\sigma(z_*)$: при $\sigma = \sigma_{max}$ — наибольшее значение σ , при котором (42) — (43) имеет смысл, — выполняется равенство:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\gamma+1},$$

то есть пластинка в местах закрепления касается поверхности диэлектрика. При $\sigma > \sigma_{max}$ мы имеем явление "залипания" пластинки. В частном случае, при $\gamma = 0.1$, $\sigma_{max} = 0.0420$.

Получим двусторонние оценки σ_{max} задачи (41), исходя из (26), которое в данном случае имеет вид

$$\psi(x) = \sigma \mathcal{L}(x), \quad \mathcal{L}(x) = \int_0^1 \Omega(x, \theta; 0) \frac{d\theta}{[1 - \psi(\theta)]^2},$$

где

$$\Omega(x, \theta; 0) = \frac{k(x, \theta; 0)}{(1 - \frac{x}{1-\gamma})(1 - \frac{\theta}{1-\gamma})^2}, \quad k(x, \theta; 0) = \begin{cases} 1-\theta, & 0 < x < \theta, \\ 1-x, & \theta < x < 1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{y(x)}{1 - \frac{x}{\gamma+1}}, \quad \psi(0) = y(0) = y_*, \quad \gamma = 0.1,$$

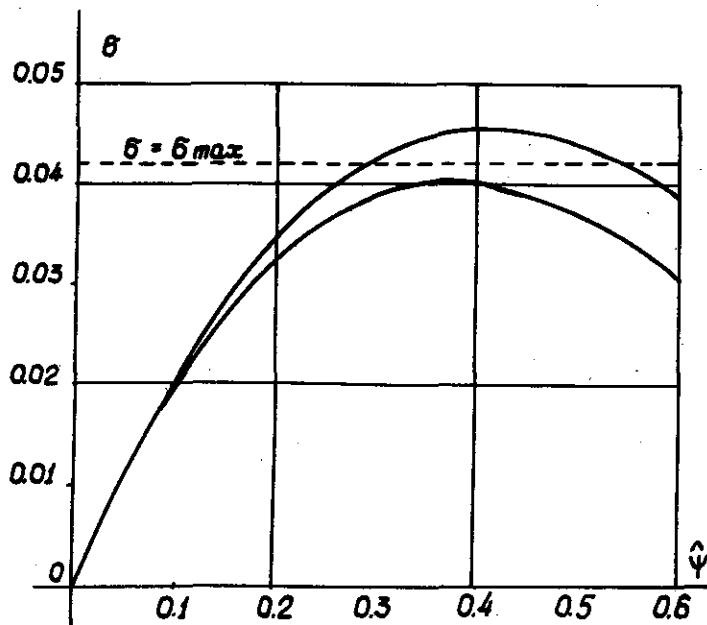


Рис. 8

При решении обратной задачи

$$\psi(x) = \hat{\psi} \mathcal{L}^{-1}(\hat{x}) \mathcal{L}(x), \quad \hat{\psi} = \psi(\hat{x}),$$

в равенства (32), (33) и (35) вместо y_i , $C_S(x)$ и $D_S(x)$ войдут $\hat{\psi}_i$, $\hat{C}_S(x)$ и $\hat{D}_S(x)$:

$$\hat{C}_S(x) = \frac{1}{h} \int_{x_S}^{x_{S+1}} \frac{1-x}{(1-\frac{x}{\gamma+1})(1-\frac{\theta}{\gamma+1})^2} d\theta = \frac{1-x}{(1-\frac{x}{\gamma+1})(1-\frac{x_S}{\gamma+1})(1-\frac{x_{S+1}}{\gamma+1})},$$

$$\hat{D}_S(x) = \frac{1}{h} \int_{x_S}^{x_{S+1}} \frac{1-\theta}{(1-\frac{x}{\gamma+1})(1-\frac{\theta}{\gamma+1})^2} d\theta = \frac{1}{1-\frac{x}{\gamma+1}} \times \left[\frac{(\gamma+1)^2}{h} \ln \frac{1-\frac{x_S}{\gamma+1}}{1-\frac{x_{S+1}}{\gamma+1}} - \frac{\gamma}{(1-\frac{x_S}{\gamma+1})(1-\frac{x_{S+1}}{\gamma+1})} \right].$$

Некоторые численные результаты, полученные Шведовой К.В., приведены на рис. 8 при $N = 20$, $\gamma = 0.1$. На рис. 8 даны двусторонние оценки σ , а на рис. 9 - примеры функций $\psi(x)$ и $y(x)$ при $\psi = 0.2$ и $\psi = 0.5$. Отсюда следуют двусторонние оценки σ_{max} : $0.0405 < \sigma_{max} = 0.0420 < 0.0452$.

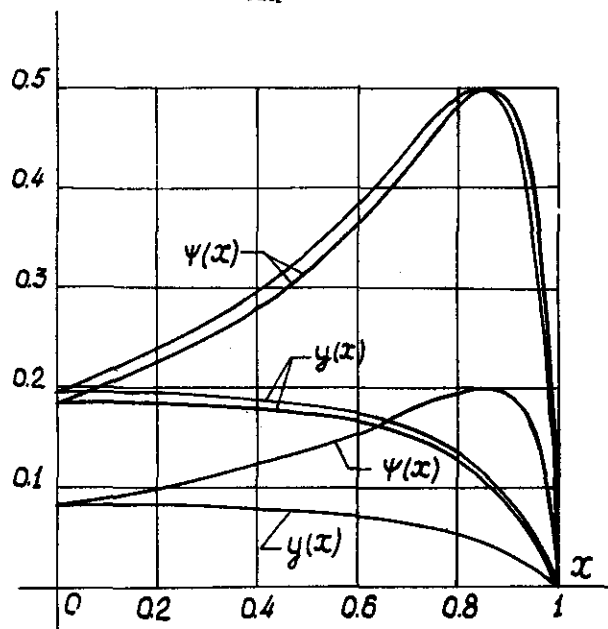


Рис. 9

Предлагаемый метод расчета статических характеристик реле позволяет получить численный результат, если предварительно найдена функция Грина краевой задачи типа (2), после чего ядро интегрального уравнения становится известным. В силу этого метод может быть непосредственно применен к расчетам реле других конструкций, в которых прогиб пластинки остается цилиндрическим. Видоизменение конструкции, связанное с расположением электродов и их числом, а также распределением жесткости пластинки по длине и условиям закрепления концов пластинки, скажется лишь на изменении пределов интегрирования и выражении ко-

эффициентов, входящих в системы (33) и (35).

Отметим также, что с функцией Грина связано определение еще одного статического параметра реле. Пусть $u = u_c = 0$. Требуется найти величину сосредоточенной силы R_0 (по отношению к длине пластинки), приложенной в точке $X = l/2$, $Y(l/2) = d_c$. Используя, например, (4), нетрудно получить, что

$$R_0 = \frac{4Pd_c}{eK(0,0;\alpha)} \quad (44)$$

7. В заключение рассмотрим решение задачи об изгибе круглой мембраны радиуса R под действием электростатических сил. Уравнение равновесия сил в этом случае запишется следующим образом:

$$P \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\epsilon_0 u^2}{2 \left[H + \frac{1}{\epsilon} (d-H) - y \right]^2} = 0, \quad (45)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l$$

(обозначения имеют тот же смысл, что и в примере I). Обратившись к безразмерным величинам (1) и (3), преобразуем (45) к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{\sigma}{(1-y)^2} = 0, \quad (46)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 1$$

Краевая задача (46) описывает также изгиб ферромагнитной мембраны магнитом [5]. Однако приведенная там зависимость σ от $y(0)$ (в обозначениях, принятых в [5], $\sigma = \alpha R^2$, $y(0) = u(0)$) представляется нам ошибочной.

Соответствующее (46) интегральное уравнение имеет вид:

$$y(x) = \sigma \int_0^1 \vartheta(x, \theta) \frac{d\theta}{[1-y(\theta)]^2}, \quad (47)$$

где

$$\vartheta(x, \theta) = \begin{cases} -\epsilon \ln x, & x > \theta, \\ -\theta \ln \theta, & x < \theta. \end{cases}$$

В силу симметрии максимальное значение $y(x)$ равно $y(0)$. По-

этому решение обратной (47) задачи может быть построено методом, описанным в [3].

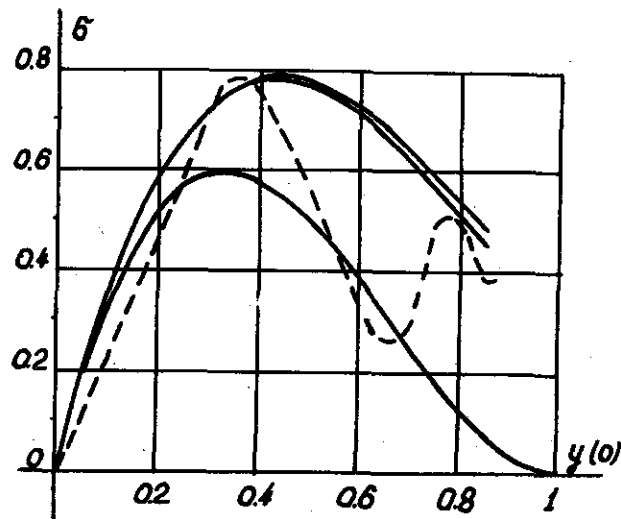


Рис. 10

На рис. 10 даны двусторонние оценки σ в зависимости от $y(0)$ при разбиении промежутка интегрирования на 50 частей (численные результаты получены Шведовой К.В.). Здесь же приведена простейшая нижняя оценка σ ($N=1$), которая стремится к точному значению при $y(0) \rightarrow 0$. Пунктирной линией представлено решение из [5]. Подчеркнем, что исходящая ветвь зависимости σ от $y(0)$, соответствующая явлению "залипания" мембраны, должна монотонно убывать до нуля при $y(0) \rightarrow 1$.

Л и т е р а т у р а

1. ФАДЕЕВ С.И. Метод расчета статических параметров пленочного электростатического реле на ЭМ. — "Вычислительные системы", Новосибирск, 1971, вып. 46.

2. ДУГЛОВ В.И., СОЛДАТЕНКОВ И.С. Некоторые результаты исследования пленочных электростатических реле. — "Вычислительные

системы", Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Физико-технологические исследования. Новосибирск, "Наука" СО, 1968, вып. 5.

3. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И., ШВЕДОВА К.В. Расчет статических параметров механической модели пленочного электростатического реле. — "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып. 40.

4. ДУГЛОВ В.И., ПЬЯНКОВ Ю.А. Исследование влияния формы зазора на основные характеристики пленочных электростатических реле. — "Вычислительные системы", Новосибирск, 1971, вып. 46.

5. ХОДИАЕВ К.И. Нелинейные колебания системы проводников с токами и ферромагнитных тел. Труды 5 международной конференции по нелинейным колебаниям, Издание ИМ АН УССР, Киев, 1970, т. 4.

Поступила в ред.-изд. отд.
9. I. 1972 г.