ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1972 год Выпуск 51

УДК 621.019. 3

ОБ ОСУЩЕСТВИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.Г. Хорошевский

Цель функционирования однородных вычислительных систем (ОВС) – решение поступивших задач различной сложности (выполнение параллельных программ с различным числом ветвей)[1].

Качество функционирования ОВС характеризуют показатели эффективности, которые прежде всего связаны с производительностью и надежностью (живучестью). Специально введенные показатели надежности ОВС [2] устанавливают взаимосвязь между потенциально возможной производительностью и собственно надежностью. Следовательно, показатели надежности позволяют организовать стохастически оптимальное функционирование ОВС. Однако они характеризуют процесс решения [3] поступающих задач не достаточно полно, так как параметры каждой из них имеют случайные значения.

Ниже будут рассчитаны показатели осуществимости [4] решения задач для класса живучих ОВС как наиболее общего по сравнению с системами со структурной избыточностью [2].

§ 1. Решение набора задач

Имеется живучая ОВС из N элементарных машин (ЭМ) и набор задач, представленных универсальными параллельными программами. (Универсальная программа может автоматически настраиваться на число исправных ЭМ в любой момент ее реализации.)

Будем считать, что цель функционирования может быть достигнута, если в ОВС имеется не менее n исправных ЭМ.

Требуется определить показатели осуществимости решения набора задач на ОВС.

1.1. **Вектор-функцией осуществимости** решения задач на ОВС назовем

$$\vec{F}(t) = \{F_k(t)\}, \quad k \in \{n, n+1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

где

$$F_k(t) = 1 - P\{\xi_k > t\}, \tag{2}$$

ξ_k – случайная величина, являющаяся моментом решения сложной задачи на k исправных ЭМ ОВС, $P\{\xi_k > t\}$ – вероятность события $\xi_k > t$.

Функция, определяемая формулой (2), может быть представлена в виде:

$$F_k(t) = R_k(t) \cdot G_k(t), \tag{3}$$

где $R_k(t)$ – координата вектор-функции надежности ОВС [2], то есть вероятность того, что на всем промежутке времени $[0, t)$ в ОВС ни разу не будет менее k исправных ЭМ; $G_k(t)$ – вероятность решения набора задач к моменту времени t при условии, что решение осуществлялось на k исправных ЭМ.

Очевидно, что показатель надежности $R_k(t)$ зависит от значений N и k, числа $i \in \{0, 1, \ldots, N-n\}$ отказавших ЭМ при $t = 0$, интенсивности λ потока отказов в элементарной машине, числа $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ восстанавливающих устройств, интенсивности μ восстановления отказавших ЭМ восстанавливающим устройством.

Для координат $R_k(t)$ справедлива следующая формула [5]:

$$R_k(t) = \frac{(N-i)!\,\lambda^{N-k-i+1}}{(k-1)!} \sum_{l=1}^{N-k+1} \frac{\Delta_i(-\alpha_l)\, e^{-\alpha_l t}}{\alpha_l\, \Delta'_{N-k+1}(-\alpha_l)}, \tag{4}$$

где многочлены $\Delta_i(S)$ и $\Delta_{N-k+1}(S)$ определяются по рекуррентным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{h+1}(S) &= [S+(N-h)\lambda+h\mu]\cdot\Delta_h(S)- \\ &\quad -(N-h+1)\lambda h\mu\Delta_{h-1}(S), \quad h<m, \\ \Delta_{h+1}(S) &= [S+(N-h)\lambda+m\mu]\Delta_h(S)- \\ &\quad -(N-h+1)\lambda m\mu\Delta_{h-1}(S), \quad h\geq m, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем $h = 0, 1, \ldots,\ i - 1$ для $\Delta_i(S)$, $h = 0, 1, \ldots, N-k$ для $\Delta_{N-k+1}(S)$, $\Delta_{-1}(S) = 0$, $\Delta_0(S) = 1$; $\Delta'_{N-k+1}(S)$ – производная полинома $\Delta_{N-k+1}(S)$; $-\alpha_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots, N-k+1$, – корни $\Delta_{N-k+1}(S)$, которые легко отыскиваются приближенно, так как система многочленов (5) обладает следующими свойствами [6]:

1) все корни $\Delta_h(S)$ различны и отрицательны,

2) корни соседних многочленов $\Delta_{h-1}(S)$ и $\Delta_h(S)$ чередуются,

3) сумма корней многочлена $\Delta_h(S)$ равна

$$-\frac{1}{2}(2N-h+1)h\lambda-\frac{1}{2}h(h-1)\mu, \quad h\leq m,$$

$$-\frac{1}{2}(2N-h+1)h\lambda-\frac{1}{2}(2h-m-1)m\mu, \quad h>m.$$

При эксплуатации статистически установлено, что время решения простых задач на одной машине распределено по экспоненциальному закону. Тогда можно считать, что

$$G_k(t) = 1-e^{-\beta_k t}, \tag{6}$$

где β_k – интенсивность решения задач на k машинах.

Практически

$$\beta_k \approx k\cdot\beta_1, \tag{7}$$

что является следствием методики решения задач на ОВС [1].

Формулы (1)-(7) позволяют вычислить вектор-функцию осуществимости $\vec{F}(t)$.

Интерес представляют величины

$$F_k(t_m) = \max_t F_k(t),$$

которые могут быть найдены численными методами.

Будем говорить, что решение набора задач осуществимо на k машинах, если для некоторого t одновременно имеем $F_k(t) > F_k^0$ и $t\leq t^0$ [4], где F_k^0, t^0 называются порогами осуществимости. F_k^0, t^0 выбираются из практических соображений.

Рассмотрим ОВС, для которой $N = 100$, $m = 1$, $i = 0$, $\mu = 0{,}7$ 1/час, $F_{90}^0 = 0{,}8$, $t^0 = 10$ час.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют резкую зависимость координаты $F_{90}(t)$ вектор-функции осуществимости от значений параметров β_1 и λ.

Видно, что в случае абсолютно надежных систем порог осуществимости F_{90}^0 достигается за время $t < t^0$ как для $\beta_1 = 0{,}01$ 1/час, так и для $\beta_1 = 0{,}002$ 1/час.

Однако в случае не абсолютно надежных систем решение набора задач осуществимо для $\beta_1 = 0{,}01$ 1/час и $\beta_1 = 0{,}002$ 1/час только лишь при $\lambda = 0{,}01$ 1/час. При $\lambda = 0{,}024$ 1/час решение осуществимо только для $\beta_1 = 0{,}01$ 1/час (см. заштрихованную на рисунках область осуществимости).

Таким образом, даже в вычислительных системах, состоящих из невысоконадежных и низкопроизводительных элементарных машин, могут быть организованы структуры, обеспечивающие высокую осуществимость решения задач.

Численный расчет $\vec{F}(t)$ выполняется при помощи вычислительных машин или систем.

1.2. Математическое ожидание $\mathcal{N}(t)$ числа исправных машин в момент времени t [5] сравнительно точно характеризует производительность ОВС, состоящих из достаточно большого числа ($N \geq 10$) машин.

Следовательно, в качестве показателя осуществимости решения набора задач может служить вероятность, вычисляемая по формуле:

$$F(t) = 1-\exp\left[-\beta_1\int^t \mathcal{N}(\tau)d\tau\right]. \tag{8}$$

$F(t)$ назовем **ф у н к ц и е й о с у щ е с т в и м о с т и** решения набора задач на живучей ОВС.

Используя результаты [5], можно вычислить

$$F(t) = 1-\exp\begin{cases} -\beta_1\left\{\frac{N\mu}{\lambda+\mu}t+\frac{i\lambda-(N-i)\mu}{(\lambda+\mu)^2}\left[1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\right\}, \\ i\in\{N-m, N-m+1, \ldots, N\},\ N\lambda\leq m(\lambda+\mu); \\ -\beta_1\left\{\frac{m\mu}{\lambda}t+\frac{i\lambda-m\mu}{\lambda^2}\left[1-e^{-\lambda t}\right]\right\}, \\ i\in\{0, 1, \ldots, N-m-1\},\ N\lambda > m(\lambda+\mu). \end{cases} \tag{9}$$

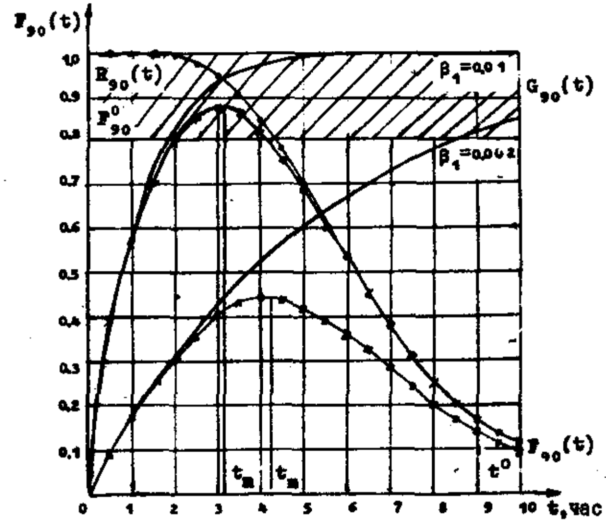

Рис.1. Координата $F_{90}(t)$ вектор-функции осуществимости, $\lambda = 0{,}024$ 1/час, $[\beta]$=1/час.

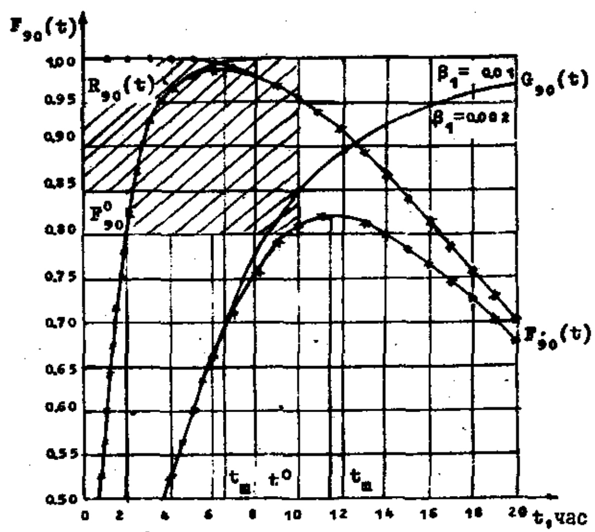

Рис.2. Координата $F_{90}(t)$ вектор-функции осуществимости, $\lambda = 0{,}01$ 1/час, $[\beta]$=1/час.

Формулы (8), (9) характеризуют осуществимость решения на начальном периоде функционирования ОВС. Если же ОВС функционирует достаточно долго (находится в стационарном режиме, $\varkappa = \lim_{t\to\infty}\varkappa(t)$), то вероятность решения набора задач может быть выражена просто:

$$F^*(t)=1-\exp[-\varkappa\,\beta_1\,t], \qquad (10)$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} \dfrac{N\mu}{\lambda+\mu}, & \text{если} \quad N\lambda \le m(\lambda+\mu), \\ \dfrac{m\mu}{\lambda} & \text{— в противном случае.} \end{cases} \qquad (11)$$

Расчет функций осуществимости как для переходного (8), так и стационарного (10) режимов безусловно проще, чем расчет вектор-функции $\vec{F}(t)$ (1). Это видно из формул (1)-(11).

§ 2. Решение потока задач

Будем считать, что на систему поступает простейший поток простых задач с интенсивностью α. Каждая задача представлена последовательной программой, реализуемой на исправной ЭМ в среднем за время $1/\beta$.

Требуется рассчитать м а т е м а т и ч е с к и е о ж и д а н и я $A(t)$ и $B(t)$ соответственно ч и с л а з а д а ч, н а х о д я щ и х с я в ОВС, и ч и с л а ЭМ, з а н я т ы х р е ш е н и е м.

Заметим, что для случая абсолютно надежных ОВС формулы для $A(t)$ и $B(t)$ могут быть получены при помощи классических методов теории массового обслуживания.

СЛУЧАЙ I. Пусть интенсивность поступления задач такова, что для любого $t\ge 0$ выполняется условие

$$A(t)\le \varkappa(t). \qquad (12)$$

Из (12) видно, что $B(t)=A(t)$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}A(t)=\alpha-\beta\,A(t), \qquad (13)$$

$$A(0)=j,\ j\in\{0,1,\dots,i\},\ \varkappa(0)=i,\ i\in\{0,1,\dots,N\}.$$

Легко заметить, что решением (I3) будет:

$$A(t)=\frac{\alpha}{\beta}+\left(j-\frac{\alpha}{\beta}\right)e^{-\beta t} \qquad (I4)$$

Используя (8), (9), (I4), можно показать, что неравенство (I2) будет выполняться на всем промежутке времени $[0,\infty)$, если справедливо:

$$\frac{\alpha}{\beta}\leq\begin{cases}\dfrac{N\mu}{\lambda+\mu} & \text{при} \quad N\lambda\leq m(\lambda+\mu),\\ \dfrac{m\mu}{\lambda} & \text{— в противном случае.}\end{cases} \qquad (I5)$$

Вместо неравенства (I5) практически более удобно использовать (I6), так как $\lambda \ll \mu$.

$$\alpha\leq\begin{cases}N\beta & \text{при} \quad N\lambda\leq m\mu,\\ \dfrac{m\mu}{\lambda}\beta & \text{при} \quad N\lambda> m\mu.\end{cases} \qquad (I6)$$

СЛУЧАЙ 2. Пусть

$$A(t)>\mathscr{R}(t),$$

тогда $B(t)=\mathscr{R}(t)$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}A(t)=\alpha+(\lambda-\beta)\mathscr{R}(t), \qquad (I7)$$

$$A(0)=j, \quad j\in\{i+1,\ i+2,\ldots\}.$$

Учитывая (8), (9), можно показать, что решением уравнения (I7) будет:

$$A(t)=\left[j+\frac{i(\lambda-\beta)}{x}-\frac{y\mu(\lambda-\beta)}{x^2}\right]+\left[\alpha+\frac{y\mu(\lambda-\beta)}{x}\right]t-$$

$$-\left[\frac{i(\lambda-\beta)}{x}-\frac{y\mu(\lambda-\beta)}{x^2}\right]e^{-xt}, \qquad (I8)$$

где

$$x=\begin{cases}\lambda+\mu, & N\lambda\leq m(\lambda+\mu), \ N\\ \lambda, & N\lambda> m(\lambda+\mu), \ m\end{cases}=y \qquad (I9)$$

Условием, при котором очередь нерешенных задач будет неограниченно расти во времени, является

$$\alpha>\frac{y\mu(\beta-\lambda)}{x} \qquad (20)$$

Учитывая (I9), (20), а также, что $\lambda\ll\mu$, получим более простое условие роста очереди:

$$\alpha>\begin{cases}N(\beta-\lambda), & \text{если} \quad N\lambda\leq m\mu,\\ \dfrac{m\mu}{\lambda}(\beta-\lambda), & \text{если} \quad N\lambda> m\mu.\end{cases}$$

Формулы (I4), (I8), (I9) характеризуют осуществимость решения задач заданного потока.

Следует заметить, что во втором случае производительность ОВС не достаточна для того, чтобы все поступающие задачи могли решаться без простаивания в очереди.

Следовательно, в подобных ситуациях требуются более мощные ОВС, для которых будут справедливы формулы случая I.

Таким образом, случай I практически наиболее важен.

Рис. 3–6 иллюстрируют зависимость математических ожиданий $B(t)=A(t)$ и $\mathscr{R}(t)$ от параметров α, β, λ, μ для систем, в которых N = I0, $A(0)$ = $B(0)$ = j = 6, $\mathscr{R}(0)$ = i = 8.

Из рисунков видно, что системы достаточно быстро входят в стационарный режим функционирования. Поэтому для оценки показателей осуществимости решения задач потока можно использовать предельные значения математических ожиданий при $t\to\infty$.

Очевидно, что подобный подход может быть сделан в случае потоков задач, представленных параллельными программами.

Результаты данной работы будут полезны и при расчете, например, таких показателей осуществимости решения задач, как вероятность нахождения в системе ℓ задач, закон распределения времени ожидания начала решения задачи и др.

Литература

I. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.

2. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. О двух классах однородных универсальных вычислительных систем. – "Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам", Новосибирск, "Наука", 1968, вып. 1, стр.70–84.

3. ГЛУШКОВ В.М., БАРАБАНОВ А.А., КАЛИНИЧЕНКО Л.А., МИХНОВСКИЙ С.Д., РАБИНОВИЧ З.Л. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. Киев, "Наукова думка", 1970.

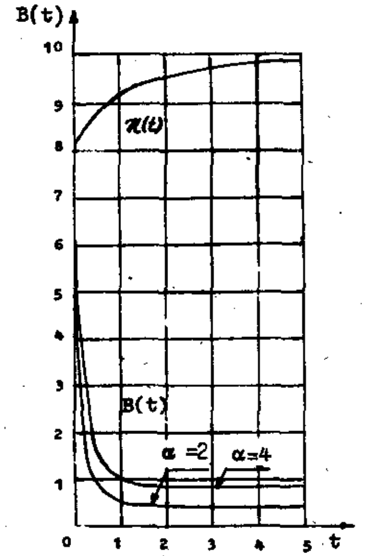

Рис.3. β =5; λ =0.0I; μ =I.

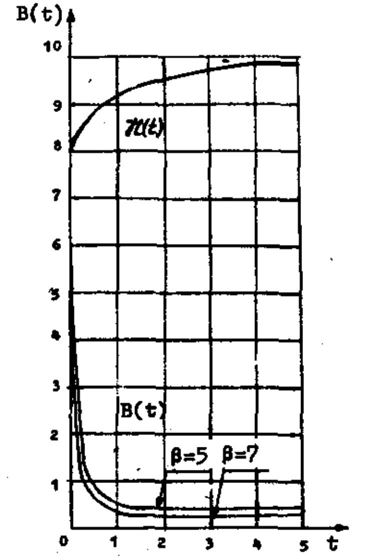

Рис.4. α =2; λ =0.0I; μ =I

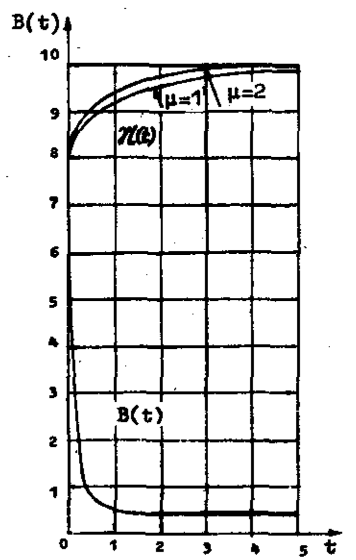

Рис.5. α =2; β =5; λ =0,0I.

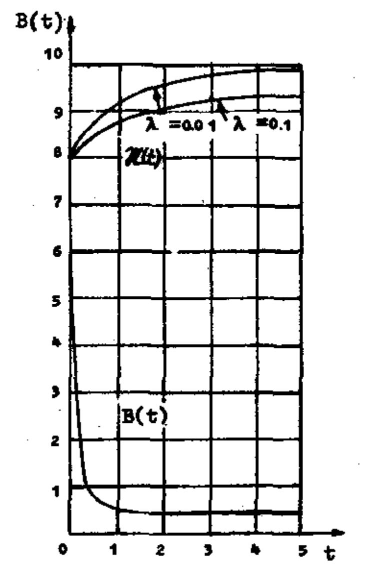

Рис.6. α =2; β =5; μ =I.

4. ФЛЕЙШМАН Б.С. Конструктивные методы оптимального кодирования для каналов с шумами. М., Изд-во АН СССР, 1963.

5. ИГНАТЬЕВ М.Б., ФЛЕЙШМАН Б.С., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г., ЩЕРБАКОВ О.В. Надежность однородных вычислительных систем. - "Вычислительные системы", Новосибирск, 197I, вып. 48, стр. I6-47.

6. ГНЕДЕНКО Б.В., БЕЛЯЕВ Ю.К., СОЛОВЬЕВ А.Д. Математические методы в теории надежности. М., "Наука", 1965.

Поступила в ред.-изд.отд.
4.I.1972 г.