ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1973 год Выпуск 55

УДК 51:16

# О ТЕОРИИ ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРЕДСКАЗАНИЙ

К.Ф.Самохвалов

Содержание настоящей работы тесно связано с вопросом: каким образом мы предсказываем события, ранее нами не наблюдавшиеся, если, как принято считать, истинность этих предсказаний не гарантируется логической дедукцией из имеющегося налицо протокола предварительно установленных фактов? Этот вопрос образует ядро так называемой "проблемы индукции". Ответ на него обязательно содержится в любой концепции теории эмпирических предсказаний. Поэтому проблема индукции вполне может рассматриваться как проблема поиска оправданной теории эмпирических предсказаний.

Мы хотим видеть будущую теорию эмпирических предсказаний оснащенной свойствами двух видов. Свойства первого вида должны отвечать за универсальную применимость, нетривиальность и корректность ожидаемой теории, а свойства второго вида предназначены для того,чтобы гарантировать осуществление с помощью теории таких предсказаний,которые сбываются. Однако свойства этого второго вида не могут быть - как это отметил в свое время К.Поппер [I] - сформулированы осмысленно; и поэтому проблема снабдить будущую теорию предсказаний такими свойствами является на самом деле псевдопроблемой. Действительно,за исключением тривиальных случаев для произвольных теорий предсказаний $f_1$ и $f_2$ просто-напросто не имеет смысла высказывание:" $f_1$ будет лучше предсказывать, чем $f_2$ ",так как принципиально не существует метода для установления значения истинности этого высказывания. Такого рода метод не может быть,как уже упоминалось, некоей дедукцией,а любой проверочный эксперимент позволяет установить значение истинности высказывания лишь следующего вида: "$f_1$ лучше, чем $f_2$ , предсказала такие-то кон кретные события". Это обстоятельство побуждает многих авторов, в частности К.Поппера, считать проблему поиска оправданной теории эмпирических предсказаний бессодержательной.

Но подобный вывод игнорирует следующий факт. Заранее не исключена возможность того, что одни лишь свойства первого вида могут оказаться столь сильными, что для всякой теории предсказания $f$ удастся установить следующее: если $f$ удовлетворяет рассматриваемым требованиям, то в каждом конкретном случае своего применения она дает или тот же самый результат, что дало бы применение в этом случае некоторой наперед заданной фиксированной теории $f^*$, или тривиальный результат, уже содержащийся в исходной информации для рассматриваемого применения. Но тогда указание теории $f^*$ решало бы проблему обоснования универсальной, нетривиальной и корректной теории предсказаний в том смысле, что для всякой такой теории $f$, не важно какой именно конкретно, оказались бы заведомо запрещены все нетривиальные результаты её применений, отличные от получаемых с помощью $f^*$ и, следовательно, заданных вместе с указанием $f^*$. Причем это запрещение совершенно не зависело бы от каких бы то ни было попыток оценить успешность предсказаний, осуществляемых теорией $f$.

Насколько известно автору, исследование рассматриваемой возможности обосновать теорию предсказаний никем не было осуществлено, что и мотивирует настоящую работу, в которой предпринимается попытка восполнить именно это упущение в современной обширной тематике по проблеме индукции [2, 3].

## § I. Эмпирическое предсказание. Эмпирическая гипотеза*)

Нашей отправной точкой является убеждение, что без существенного ограничения общности индивидуальный акт эмпирического предсказания может рассматриваться следующим образом. Первоначально имеется протокол $pr_0$ эксперимента над конечным множеством $\mathfrak{D}_0$ эмпирических объектов. Этот протокол является простой

*) Этот и следующий параграфы в известной степени пересекаются с содержанием работы [4].



констатацией результатов взаимодействия объектов из множества $\mathfrak{D}_0$ с приборами, с помощью которых ставился эксперимент. Имеется, вообще говоря, также определенная эмпирическая гипотеза $h_0$ относительно того, какие протоколы заведомо не могут быть получены, если ставить эксперименты с помощью данных приборов над любыми конечными множествами объектов (а не только над множеством $\mathfrak{D}_0$). Гипотеза $h_0$ при желании может рассматриваться как описание предполагаемых свойств измерительных приборов, а протокол $pr_0$ – как протокол результатов измерений, проведенных с помощью этих приборов.

Предполагается, что гипотеза $h_0$ такова, что протокол $pr_0$, соответствующий поставленному эксперименту над множеством $\mathfrak{D}_0$, является допустимым с точки зрения этой гипотезы. В противном случае $h_0$ считается опровергнутой этим экспериментом и подлежит пересмотру как априорная информация, оказавшаяся неверной. (Это как раз та ситуация, когда измерительные приборы оказываются вовсе не такими, какими мы их считали, приступая к измерениям.). Только в единственном случае, когда $h_0$ является тавтологией, никакой мыслимый эксперимент заведомо не может вынудить пересмотреть эту гипотезу $h_0$.

Акт предсказания состоит в том, что, отправляясь от исходной гипотезы $h_0$ и используя информацию, заключенную в протоколе $pr_0$, указывается новая гипотеза $h_1$, такая, что:

($i$) $h_1$ в определённом смысле является более (или, по крайней мере, не менее) информативной, чем первоначальная гипотеза $h_0$;

($ii$) $h_1$ согласуется с протоколом $pr_0$ (то есть $pr_0$ является допустимым с точки зрения гипотезы $h_1$).

Предсказание, осуществленное таким актом, считается успешным до тех пор, пока не обнаруживается такое новое множество эмпирических объектов, что протокол эксперимента, поставленного с помощью данных приборов над этим множеством, оказывается недопустимым с точки зрения гипотезы $h_1$, оставаясь допустимым с точки зрения гипотезы $h_0$. Очевидно, что тривиальный акт предсказания, сопоставляющий паре $\langle h_0, pr_0 \rangle$ гипотезу $h_0$, всегда является успешным в этом смысле, хотя и совершенно неинтересным.

До сих пор речь шла об индивидуальном акте предсказания. Что же касается т е о р и и предсказаний, то её естественно рассматривать теперь как некоторую функцию $f$, однозначно ставящую в соответствие каждой паре $\langle h_0, \rho r_0 \rangle$ некоторую гипотезу $h_1$:

$$h_1 = f(\langle h_0, \rho r_0 \rangle).$$

Разумеется, такая функция $f$ должна быть подчинена определенным ограничениям, которые вытекают из нашего намерения придать теории предсказания некоторые желательные черты.

Введем или уточним ряд понятий, которые позволят нам в дальнейшем изъясняться достаточно определенно.

Уточним прежде всего понятие эмпирической гипотезы. Ясно, что любая такая гипотеза только тогда вполне осмыслена, когда указан принципиально осуществимый метод её экспериментальной проверки. В противном случае приемлемость или неприемлемость гипотезы не определяется какими-либо наблюдениями, и она оказывается эмпирически бессодержательной. Поэтому мы отождествляем э м п и р и ч е с к у ю г и п о т е з у $h$ с упорядоченной тройкой $\langle \mathcal{V}_h, \mathcal{I}nt_h, \mathcal{T}_h \rangle$:

$$h = \langle \mathcal{V}_h, \mathcal{I}nt_h, \mathcal{T}_h \rangle.$$

В этом выражении:

$\mathcal{V}_h$ – некоторое конечное непустое множество символов вида $P_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$. Например:

$$\mathcal{V}_h = \{P_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\}.$$

Условимся называть множество $\mathcal{V}_h$ с л о в а р е м (г и п о т е з ы $h$), а символ $P_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ – п р е д и к а т н ы м с и м в о л о м (м е с т н о с т и $m_i$).

$\mathcal{I}nt_h$ – множество, равномощное с $\mathcal{V}_h$, каждый элемент $\mathbf{P}_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ которого является некоторым конкретным способом наблюдения, гарантирующим возможность – если дано произвольное непустое конечное множество произвольных объектов – наблюдать на этом множестве определенное трехзначное отношение местности $m_i$ ж). При этом предполагается, что каждому способу

ж) Под трехзначным отношением местности $m$ на данном множестве $X$ мы понимаем функцию $m$ переменных, определенную на всем множестве $X$ и принимающую значения из множества {истинно, ложно, не имеет смысла}.



наблюдения $\mathbf{P}_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ из совокупности $\mathcal{I}nt_h$ взаимно-однозначно соответствует именующий его символ $P_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ из словаря $\mathcal{V}_h$: если

$$\mathcal{V}_h = \{P_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\},$$

то

$$\mathcal{I}nt_h = \{\mathbf{P}_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \mathbf{P}_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\},$$

и наоборот. Вместо того, чтобы говорить о способе наблюдения $\mathbf{P}_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$, мы часто будем говорить об и н т е н с и о н а л ь н о й п р о ц е д у р е $\mathbf{P}_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$. Множество $\mathcal{I}nt_h$ часто будем называть и н т е н с и о н а л ь н ы м б а з и с о м (в с л о в а р е $\mathcal{V}_h$) ж). С понятием интенсионального базиса эмпирической гипотезы тесно связано понятие приборов (или прибора), предназначенных для проведения экспериментов по проверке гипотезы, а именно: упомянутые приборы рассматриваются в качестве средства – каково бы оно ни было – фиксировать конкретный интенсиональный базис. Использование трехзначных отношений (вместо обычных двузначных), с дополнительным значением истинности "не имеет смысла", обеспечивает свободу в выборе способов наблюдения, г а р а н т и р у ю щ и х возможность наблюдать отношения, о п р е д е л е н н ы е на конечных множествах п р о и з в о л ь н ы х объектов. Если бы мы рассматривали только обычные отношения, то, – поскольку эмпирический мир является такой совокупностью объектов ("открытой" совокупностью), которая принципиально никогда не может быть определена заранее, – никогда нет гарантии, что для данного способа наблюдения не найдется такого конечного множества объектов, на котором наблюдаемое этим способом двузначное отношение будет не всюду осмысленным и, следовательно, не всюду определенным.

$\mathcal{T}_h$ – тестовый алгоритм в словаре $\mathcal{V}_h$ (для гипотезы $h$). Для описания этого алгоритма нам придется ввести несколько новых понятий.

ж) Термин заимствован (с некоторой модификацией смысла) из работы [5].

Назовем **элементарным протоколом** (в словаре $\mathcal{V}_h$) выражение вида $\bar{P}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i})$, или вида $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i})$, или вида $\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i})$, где $P_i(x_1,\ldots,x_{m_i}) \in \mathcal{V}_h$, а символы $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}$ суть символы (не обязательно все различные) из фиксированного потенциально бесконечного алфавита $\propto$ (не содержащего символов $x_1,\ldots,x_{m_i}$).

Выражение $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i})$ (или $\bar{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i})$, или $\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i})$) интерпретируется как утверждение, что наблюдаемое на рассматриваемом (произвольном) множестве $\mathcal{D}$ эмпирических объектов с помощью интенсиональной процедуры $P_i(x_1,\ldots,x_{m_i})$ $m_i$-местное отношение таково, что на кортеже объектов из $\mathcal{D}$, соответствующем кортежу $\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}\rangle$ их имен (взаимно-однозначно сопоставленных самим объектам), оно (это отношение) является **истинным** (или **ложным**, или **не имеющим смысла**).

Пусть $\beta$ – произвольное конечное (непустое) подмножество множества $\propto$. **Протоколом** (в словаре $\mathcal{V}_h$) будем называть конечное непустое множество $pr$ элементарных протоколов в словаре $\mathcal{V}_h$, удовлетворяющее для некоторого $\beta$ следующим условиям:

а) для всякого $P_i(x_1,\ldots,x_{m_i}) \in \mathcal{V}_h$ и для каждых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i} \in \beta$, или

$$P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr,$$

или

$$\bar{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr,$$

или

$$\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr;$$

б) для всякого $P_i(x_1,\ldots,x_{m_i}) \in \mathcal{V}_h$ и для каждых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i} \in \beta$:
если $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr$, то $\bar{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$, и $\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$;
если $\bar{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr$, то $\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$, и $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$;
если $\tilde{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \in pr$, то $P_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$, и $\bar{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_i}) \notin pr$.

Пусть $pr$ есть произвольный протокол, а $\beta$ есть именно то подмножество алфавита $\propto$, относительно которого данный протокол $pr$ удовлетворяет указанным выше условиям а) и б). Тогда мы часто будем писать вместо символа $\beta$ символ $B(pr)$ и называть множество $B(pr)$ **базисом** (**протокола** $pr$).





Мощность $\bar{\bar{B}}(pr)$ множества $B(pr)$ назовем **мощностью протокола** $pr$.

Условимся говорить, что протоколы $pr_1$ и $pr_2$ **изоморфны** (символически, $pr_1 \simeq pr_2$), если и только если один из них может быть сделан равным другому путем взаимно-однозначного переименования элементов базиса.

Теперь мы в состоянии описать третий член упорядоченной тройки, задающей гипотезу, который ранее назван был нами тестовым алгоритмом.

**Тестовым алгоритмом** (в словаре $\mathcal{V}_h$) называется произвольный алгоритм $\mathcal{T}_h$, удовлетворяющий условиям ($i$), ($ii$), ($iii$):

($i$) $\mathcal{T}_h$ применим к любому протоколу в словаре $\mathcal{V}_h$ и на всяком таком протоколе $pr$ этот алгоритм принимает одно из двух значений: либо $\mathcal{T}_h(pr) = 1$, либо $\mathcal{T}_h(pr) = 0$;

($ii$) для всяких двух протоколов в словаре $\mathcal{V}_h$, если $pr_1 \simeq pr_2$, то $\mathcal{T}_h(pr_1) = \mathcal{T}_h(pr_2)$;

($iii$) для всякого натурального числа $n \geq 1$ существует протокол $pr$ в словаре $\mathcal{V}_h$, такой, что $\bar{\bar{B}}(pr) = n$, и $\mathcal{T}_h(pr) = 1$.

Равенство $\mathcal{T}_h(pr) = 0$ ($\mathcal{T}_h(pr) = 1$) интерпретируется как утверждение, что с точки зрения рассматриваемой гипотезы $h$ всякая экспериментальная ситуация, описываемая при данном интенсивном базисе $\mathcal{I}nt_h$ протоколом $pr$ (в словаре $\mathcal{V}_h$), считается **невозможной** (**возможной**, хотя и не необходимой) в качестве **наблюдаемой** и **является** (**не является**) **заведомо всего лишь воображаемой**.

Условие ($ii$) говорит о том, что неразличимые с помощью данного интенсионального базиса экспериментальные ситуации (протоколы таких ситуаций изоморфны) относятся, если принять гипотезу $h$, в один и тот же класс: либо в класс "наблюдабельных"(то есть возможных в качестве наблюдаемых), либо в класс всего лишь воображаемых ситуаций. В известном смысле этим условием утверждается один из аспектов объективности (интер-субъективности) гипотезы, независимости её от всего того, что не определяется соответствующими средствами наблюдения.

Последнее требование к тестовому алгоритму, требование $(iii)$, является следствием нашего соглашения иметь дело с трехзначными отношениями, наблюдение которых обеспечивается интенсиональными процедурами из $Int_h$ на п р о и з в о л ь н ы х конечных множествах произвольных объектов, следовательно, и на множествах произвольной конечной мощности.

Определив понятие эмпирической гипотезы так, как оно выше определено, мы одновременно гарантировали для каждой гипотезы $h$, подпадающей под наше определение, соответствующий метод экспериментальной проверки этой гипотезы и тем самым обеспечили её эмпирическую осмысленность. Для фиксированной гипотезы $h$ упомянутый метод проверки заключается в следующем. Берется произвольное конечное множество $b$ наблюдаемых объектов. На этом множестве объектов наблюдаются с помощью $Int_h$ те отношения, которые наблюдаются. Составляется протокол в словаре $\mathcal{V}_h$, соответствующий результатам этих наблюдений. Пусть это будет протокол $pr$. На этом протоколе определяется значение алгоритма $\mathcal{T}_h$. Если $\mathcal{T}_h(pr)=0$, то гипотеза $h$ считается о п р о в е р г н у т о й данным экспериментом, так как фактически наблюдалась ситуация, невозможная с точки зрения гипотезы в качестве наблюдаемой. Если $\mathcal{T}_h(pr)=1$, то считается, что данный эксперимент с о г л а с у е т с я с гипотезой, хотя она этим экспериментом не подтверждается раз и навсегда; никогда нет гарантии, что не найдется другого множества $b'$ наблюдаемых объектов, на котором эксперимент рассматриваемого типа все-таки опровергнет гипотезу $h$. Таким образом, всякая эмпирическая гипотеза может быть фальсифицирована одним экспериментом и не может быть окончательно, раз и навсегда, подтверждена никакой совокупностью согласующихся с ней экспериментов*).

---

*) Мы уже упоминали попперовский "принцип фальсификации". Если учесть, что любая теория, - в той мере, в какой она есть инструмент предсказания каких-то эмпирических событий, - эквивалентна некоторой эмпирической гипотезе в нашем смысле, то становится очевидным, что мы имеем здесь этот самый принцип.



## § 2. Требования к теории предсказаний

Упомянутые в начале предыдущего параграфа ограничения на функцию $f$ мотивируются, как мы уже говорили, нашим намерением рассматривать эту функцию в качестве теории эмпирических предсказаний, обладающей определенными желательными чертами.

Перейдем к изложению соответствующих требований на функцию $f$.

Назовем пару $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle$ д о п у с т и м о й, если и только если $h_0$ есть некоторая эмперическая гипотеза (и, следовательно. $\mathcal{T}_{h_0}$ -тестовый алгоритм эмпирической гипотезы), а $pr_0$ есть некоторый протокол такой, что $\mathcal{T}_{h_0}(pr_0)=1$.

Пусть $\Pi$ - множество всех возможных допустимых пар и пусть $\tau$ - множество всех возможных алгоритмов $\mathcal{T}_h$, где $h$ - произвольная эмпирическая гипотеза.

Мы хотим видеть будущую теорию предсказания универсально применимой в эмпирических исследованиях. Но это означает, что

д л я п р о и з в о л ь н ы х $h_0$, $pr_0$ е с л и $\mathcal{T}_{h_0}(pr_0)=1$, т о

$$f(\langle h_0, pr_0 \rangle) = \langle \mathcal{V}_{h_0}, Int_{h_0}, A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) \rangle, \qquad (I)$$

г д е $A_f$ е с т ь н е к о т о р а я ф у н к ц и я, н е з а в и с я щ а я о т $Int_{h_0}$, к о т о р а я о п р е д е л е н а н а к а ж д о й д о п у с т и м о й п а р е $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle$ и з $\Pi$ и к о т о р а я д л я к а ж д о й т а к о й п а р ы о д н о з н а ч н о у к а з ы в а е т н е к о т о р ы й а л г о р и т м $\mathcal{T}_{h_1} \in \tau$ в с л о в а р е $\mathcal{V}_{h_0}$:

$$A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) = \mathcal{T}_{h_1}.$$

В этом состоит первое требование $C1$ к теории предсказания.

Вторым требованием $C2$ мы хотим выразить нетривиальность предполагаемой теории предсказания, понимаемую в том смысле, что среди индивидуальных актов предсказания, подпадающих под эту теорию, должен иметься, по крайней мере, один такой, который не является простым воспроизводством исходной информации, а осуществляет существенно новые добавления к ней. В точных терминах рассматриваемое требование означает, что упомянутая выше функция $A_f$ должна удовлетворять условиям $(i)$, $(ii)$, $(iii)$:

$(i)$ для всех $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle \in \pi$, $\mathcal{T}_{h_1} \in \tau$, если $A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) = \mathcal{T}_{h_1}$, то $\mathcal{T}_{h_1}(pr_0) = 1$;

$(ii)$ для каждых $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle \in \pi$, $\mathcal{T}_{h_1} \in \tau$ и для каждого протокола $pr$, если $A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) = \mathcal{T}_{h_1}$, то из $\mathcal{T}_{h_0}(pr) = 0$ следует $\mathcal{T}_{h_1}(pr) = 0$;

$(iii)$ существует такая пара $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle \in \pi$ и такой протокол $pr$, что для каждого $\mathcal{T}_{h_1} \in \tau$, если $A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) = \mathcal{T}_{h_1}$, то $\mathcal{T}_{h_0}(pr) = 1$, и $\mathcal{T}_{h_1}(pr) = 0$.

Ниже мы намереваемся указать еще два требования $C3$ и $C4$, налагаемые на функцию $A_f$. Для этого понадобятся некоторые предварительные рассуждения.

Рассмотрим произвольный интенсиональный базис $\mathcal{I}nt$ в произвольном словаре $\mathcal{V}$. Пусть

$$\mathcal{V} = \{P_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\}$$

и пусть соответственно

$$\mathcal{I}nt = \{\mathbf{P}_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \mathbf{P}_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\}.$$

Отправляясь от заданного интенсионального базиса $\mathcal{I}nt$, мы всегда можем получить в свое распоряжение новый интенсиональный базис, который будет в определенном смысле алгоритмической конструкцией из исходных интенсиональных процедур, образующих множество $\mathcal{I}nt$. Речь идет о следующем. Фиксируется произвольный словарь $\mathcal{W}$, содержащий конечное число $\ell$ произвольных предикатных символов $Q_1(x_1, \ldots, x_{s_1}), \ldots, Q_\ell(x_1, \ldots, x_{s_\ell})$:

$$\mathcal{W} = \{Q_1(x_1, \ldots, x_{s_1}), \ldots, Q_\ell(x_1, \ldots, x_{s_\ell})\}.$$

Фиксируется произвольный алгоритм $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$, сопоставляющий единственным образом каждому протоколу $pr$ в словаре $\mathcal{V}$ некоторый протокол $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)$ в словаре $\mathcal{W}$ так, что:

а) $B((\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)) = B(pr)$;



б) изоморфные протоколы в словаре $\mathcal{V}$ отображаются в изоморфные протоколы в словаре $\mathcal{W}$.

Далее, для фиксированного интенсионального базиса $\mathcal{I}nt$ и фиксированного алгоритма $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ однозначно задается интенсиональный базис $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt)$,

$$(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt) = \{\mathbf{Q}_1(x_1, \ldots, x_{s_1}), \ldots, \mathbf{Q}_\ell(x_1, \ldots, x_{s_\ell})\}. \quad (2)$$

просто посредством соглашения, что на произвольном конечном множестве $\mathcal{L}$ наблюдаемых объектов процедуры $\mathbf{Q}_1(x_1, \ldots, x_{s_1}), \ldots, \mathbf{Q}_\ell(x_1, \ldots, x_{s_\ell})$ гарантируют – когда результаты наблюдения отношений на множестве $\mathcal{L}$ с помощью интенсиональных процедур из $\mathcal{I}nt$ фиксирует протокол $pr$ – наблюдение именно тех $s_1, \ldots, s_\ell$ – местных отношений, которым соответствует протокол $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)$.

В дальнейшем через $[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt)]$ мы будем обозначать интенсиональный базис в словаре $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$, определяемый для произвольных $\mathcal{I}nt$ и $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ соотношением

$$[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt)] = \mathcal{I}nt \cup (\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt). \quad (3)$$

Словарь $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ будем обозначать через $[\mathcal{V}.\mathcal{W}]$.

Для данного словаря $\mathcal{V}$ и данного алгоритма $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ рассматриваемого вида протокол $[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)]$ в словаре $[\mathcal{V}.\mathcal{W}]$ будем называть нетворческим $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$-обогащением данного протокола $pr$ в словаре $\mathcal{V}$, если и только если

$$[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)] = pr \cup (\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr). \quad (4)$$

Пусть, далее, алгоритм $\mathcal{T}$ есть произвольный тестовый алгоритм в словаре $\mathcal{V}$ и пусть снова $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ есть произвольный фиксированный алгоритм упомянутого вида. Алгоритм $[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})]$, определенный на каждом протоколе в словаре $[\mathcal{V}.\mathcal{W}]$, будем называть нетворческим $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$-обогащением алгоритма $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для каждого протокола $pr^*$ в словаре $[\mathcal{V}.\mathcal{W}]$ выполняется соотношение:

$$[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})](pr^*) = \begin{cases} \text{I, если существует протокол } pr \text{ в словаре } \mathcal{V}\text{, такой, что } pr^* \text{ изоморфен нетворческому } (\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})\text{-обогащению протокола } pr \text{ (то есть } pr^* \simeq [(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)]\text{), и } \mathcal{T}(pr)=1; \\ \text{0} - \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5)$$

Введем ещё понятие нетворческой модификации тестового алгоритма, а именно: алгоритм $((\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}))$ в словаре $\mathcal{W}$ есть нетворческая $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$-модификация произвольно данного тестового алгоритма $\mathcal{T}$ в словаре $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда для каждого протокола $pr^{w}$ в словаре $\mathcal{W}$ и фиксированного произвольного алгоритма $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ выполняется соотношение

$$((\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}))(pr^{w}) = \begin{cases} \text{I, если существует протокол } pr \text{ в словаре } \mathcal{V}\text{, такой, что } pr^{w} \text{ изоморфен протоколу } (\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr), \text{ и } \mathcal{T}(pr)=1; \\ \text{0} - \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Очевидно, что всякое нетворческое $(\Phi_1.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ -обогащение алгоритма $\mathcal{T}$ можно рассматривать как нетворческую $(\Phi_2.\mathcal{V}.[\mathcal{V}.\mathcal{W}])$-модификацию этого же алгоритма $\mathcal{T}$ при соответствующем выборе $(\Phi_2.\mathcal{V}.[\mathcal{V}.\mathcal{W}])$.

Обозначим через $\varphi$ совокупность всех возможных алгоритмов вида $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ при произвольных $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$.

Непосредственно из наших определений следует, что для произвольного $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ из $\varphi$ :

($i$) если $\mathcal{T}\in\tau$ , то $((\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}))\in\tau$ и поэтому $[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})]\in\tau$;

($ii$) если $\langle\mathcal{T}, pr\rangle\in\pi$ , то $\langle((\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})),(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)\rangle\in\pi$, и поэтому $\langle[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)]\rangle\in\pi$.

Вернемся к изложению и обоснованию требований, налагаемых на функцию $A_f$ . Требование $C3$ :

для произвольных $\langle\mathcal{T}_{h_0}, pr_0\rangle\in\pi, \langle\mathcal{T}_{h_0^*}, pr_0^*\rangle\in\pi$, $\mathcal{T}_{h_1}\in\tau, \mathcal{T}_{h_1^*}\in\tau, (\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})\in\varphi$ : если $A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0}, pr_0\rangle)=\mathcal{T}_{h_1}$ ,



$A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0^*}, pr_0^*\rangle)=\mathcal{T}_{h_1^*}$ , и если $\mathcal{T}_{h_0^*}$ есть нетворческое $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$-обогащение алгоритма $\mathcal{T}_{h_0}$ , а протокол $pr_0^*$ есть нетворческое $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$-обогащение протокола $pr_0$ , то есть если $\mathcal{T}_{h_0^*}=[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}_{h_0})]$, $pr_0^*=[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr_0)]$ , то алгоритм $\mathcal{T}_{H_1^*}$ в свою очередь есть нетворческое $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ - обогащение алгоритма $\mathcal{T}_{h_1}$ , то есть

$$\mathcal{T}_{h_1^*}=[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}_{h_1})].$$

Это требование выражает один из аспектов корректности предполагаемой теории предсказания. В самом деле, пусть функция $A_f$ этому требованию не удовлетворяет. Тогда найдется такая допустимая пара $\langle\mathcal{T}, pr\rangle$ и такой алгоритм $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})$ из $\varphi$ , что

$$[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle))]\neq A_f(\langle[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(pr)]\rangle). \quad (7)$$

Что означает это неравенство (7)? Предположим, что мы применяем теорию $f$ как раз в той ситуации, когда исходной информацией для индивидуального применения является пара $\langle h_0, pr_0\rangle$ , такая, что $\mathcal{T}_{h_0}=\mathcal{T}$, $pr_0=pr$ , и, следовательно, $\mathcal{V}_{h_0}=\mathcal{V}$ :

$$\langle h_0, pr_0\rangle=\langle\langle\mathcal{V}_{h_0}, \mathcal{I}nt_{h_0}, \mathcal{T}_{h_0}\rangle, pr_0\rangle=\langle\langle\mathcal{V}, \mathcal{I}nt_{h_0}, \mathcal{T}\rangle, pr\rangle.$$

Результатом такого применения будет гипотеза $h_1$ , определяемая в соответствии с $C1$ соотношением:

$$h_1=f(\langle h_0, pr_0\rangle) = \langle\mathcal{V}, \mathcal{I}nt_{h_0}, A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle)\rangle. \quad (8)$$

Рассмотрим следующую гипотезу $h_1^{(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})}$:

$$h_1^{(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})}=\langle[\mathcal{V}.\mathcal{W}],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt_{h_0})],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T}_{h_1})]\rangle = \langle[\mathcal{V}.\mathcal{W}],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt_{h_0})],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle))]\rangle. \quad (9)$$

В силу наших определений для $(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W}).[\mathcal{V}.\mathcal{W}],[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{I}nt)]$ , $[(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})(\mathcal{T})]$ очевидно, что для всякого конечного множества $\mathcal{D}$ наблюдаемых объектов эксперимент на $\mathcal{D}$ по проверке гипотезы $h_1$ и эксперимент на $\mathcal{D}$ по проверке гипотезы $h_1^{(\Phi.\mathcal{V}.\mathcal{W})}$ (см. стр. 10 настоящей работы) одновременно либо опровергают названные гипотезы, либо согласуются с ними. Таким образом, принимая эмпирическую гипотезу $h_1$ в качестве результата предсказания, осуществляемого теорией $f$ на основании исходной информации $\langle h_0, pr_0\rangle$, мы одновременно вынуждены принимать в качестве обязательного следствия упомянутого результата также и гипотезу $h_1^{(\Phi.V.W)}$.

Рассмотрим далее пару $\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)}$, определяемую условием

$$\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)} = \langle h_0^{(\Phi.V.W)}, [(\Phi.V.W)(pr_0)]\rangle =$$

$$= \langle\langle [V.W], [(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})], [(\Phi.V.W)(\mathcal{T})]\rangle, [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle.$$

Снова в силу упомянутых определений мы вынуждены считать, что всякий раз, когда принимается в качестве имеющейся налицо исходной информации для конкретного применения теории $f$ пара $\langle h_0, pr_0\rangle$, то должна приниматься в качестве также имеющейся налицо исходной информации для конкретного применения теории $f$ и пара $\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)}$.

В то время как результатом применения теории $f$ к паре $\langle h_0, pr_0\rangle$ является гипотеза $h_1$, определяемая соотношением (8) (и как её следствие, гипотеза $h_1^{(\Phi.V.W)}$), результатом применения теории $f$ к паре $\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)}$ служит гипотеза $h_1^*$, определяемая условием

$$h_1^* = f(\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)}) = f(\langle\langle [V.W], [(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})],$$

$$[(\Phi.V.W)(\mathcal{T})]\rangle, [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle) = \qquad (10)$$

$$= \langle [V.W], [(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})], A_f(\langle [(\Phi.V.W)(\mathcal{T})], [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle)\rangle.$$

Таким образом мы показали, что в том случае, когда имеется налицо исходная информация $\langle h_0, pr_0\rangle$, использование теории $f$ порождает следующую ситуацию. Имеется эмпирическая гипотеза $h_1^{(\Phi.V.W)}$, которую надлежит считать приемлемой в качестве следствия результата применения теории $f$ к паре $\langle h_0, pr_0\rangle$; кроме того, имеется эмпирическая гипотеза $h_1^*$, которую также надлежит считать приемлемой, но уже в качестве результата применения теории $f$ к паре $\langle h_0, pr_0\rangle^{(\Phi.V.W)}$, имеющейся налицо потому, что имеется налицо исходная информация $\langle h_0, pr_0\rangle$. Эта ситуация парадоксальна, если выполняется неравенство (7). В самом деле, в силу (9) и (10) названные гипотезы имеют один и



тот же интенсиональный базис $[(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})]$ и – поскольку имеет место неравенство (7) – различные тестовые алгоритмы $[(\Phi.V.W)(A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle))]$ и $A_f(\langle[(\Phi.V.W)(\mathcal{T})], [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle)$. Так как тестовые алгоритмы различны, то существует такой протокол $pr^*$ в словаре $[V.W]$, что для него справедливо соотношение:

$$[(\Phi.V.W)(A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle))](pr^*) \neq A_f(\langle[(\Phi.V.W)(\mathcal{T})], [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle)(pr^*).$$

Пусть, например,

$$[(\Phi.V.W)(A_f(\langle\mathcal{T}, pr\rangle))](pr^*) = 0, \qquad (11)$$

в то время как

$$A_f(\langle[(\Phi.V.W)(\mathcal{T})], [(\Phi.V.W)(pr)]\rangle)(pr^*) = 1. \qquad (12)$$

Пусть, кроме того, мощность $\bar{\bar{B}}(pr^*)$ протокола $pr^*$ равняется числу $n$. Фиксируем произвольное множество $\mathcal{B}$ из $n$ наблюдаемых объектов. В силу (11), принимая гипотезу $h_1^{(\Phi.V.W)}$ (см.(9)), мы утверждаем, в частности, что протокол наблюдений объектов из $\mathcal{B}$ с помощью интенсиональных процедур из $[(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})]$ не изоморфен протоколу $pr^*$. Аналогично, в силу (12), принимая гипотезу $h_1^*$ (см.(10)), мы, в частности, утверждаем, что протокол наблюдений объектов из $\mathcal{B}$ с помощью интенсиональных процедур из $[(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})]$ л и б о изоморфен протоколу $pr^*$, л и б о не изоморфен ему. Ясно, что в некоторых специальных исследованиях эти утверждения могут служить основанием для различных и п р о т и в о р е ч и в ы х решений.

Например, пусть объекты из $\mathcal{B}$ – детали некоторого устройства, требующего неотложного ремонта. Пусть интенсиональный базис $[(\Phi.V.W)(\mathcal{I}nt_{h_0})]$ – средство наблюдать внутреннее состояние этого устройства неким путем, приводящим к его (устройства) разрушению. Пусть, далее, $pr^*$ – протокол подобного наблюдения, соответствующий определенному внутреннему состоянию $Z$. Пусть мы применяем теорию $f$ затем, чтобы решить, не пытаясь наблюдать внутреннее состояние, подвергнуть ли рассматриваемое устройство дорогостоящей ремонтной процедуре, если известно, что эта процедура может быть успешной только тогда, когда устройство находится в состоянии $Z$. В такой ситуации принятие гипо –

зы $h_1^{(\Phi.V.W)}$ приводит к решению не производить указанный ремонт. Наоборот, принятие гипотезы $h_1^*$ мотивирует противоположное, так как рассматриваемое устройство все-таки нуждается в неотложном ремонте, и не исключено, что последний может быть успешно осуществлен, если верна гипотеза $h_1^*$.

Таким образом, если мы хотим иметь дело с такой теорией эмпирических предсказаний, которая з а в е д о м о была бы гарантирована от возникновения парадоксов в процессе своего использования (одно из обязательных условий научной правильности, понимаемой с современной точки зрения), то следует потребовать, чтобы для в с е х $\langle \mathcal{T}, pr \rangle \in \pi$ и всех $(\Phi.V.W) \in \varphi$, таких, что $V$ совпадает со словарем для $\mathcal{T}, pr$, выполнялось (вместо неравенства (7)) соотношение

$$[(\Phi.V.W)(A_f(\langle \mathcal{T}, pr \rangle))] = A_f(\langle [(\Phi.V.W)(\mathcal{T})], [(\Phi.V.W)(pr)] \rangle). \quad (13)$$

Очевидно, что это требование эквивалентно требованию $C3$.

Перейдем к изложению еще одного ограничения на $A_f$, связанного с другим аспектом корректности $f$. А именно, мы хотим, чтобы каждое отдельное применение теории предсказаний основывалось т о л ь к о на той информации, которая к моменту этого применения и м е л а с ь н а л и ц о и являлась бы о б ъ е к т и в н о й (или, по крайней мере, "интерсубъективной"). Условие (I), включенное в требование $C1$, гарантирует, конечно, зависимость результатов отдельных применений теории предсказания л и ш ь от той информации, которая имеется налицо; тем не менее, чтобы еще исключить и влияние на упомянутые результаты с у б ъ е к т и в н ы х особенностей имеющейся налицо исходной информации, следует дополнительно потребовать и н в а р и а н т н о с т ь функции $A_f$ относительно, по крайней мере, некоторых преобразований ф о р м ы записи исходной информации для каждого отдельного применения теории .

Введем некоторые соглашения.

Для произвольного словаря $V$,

$$V = \{P_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\},$$

будем обозначать через $V'$ всякий такой словарь, что

$$V' = \{Q_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_{m_k})\},$$



где каждый символ $Q_j(x_1, \ldots, x_{m_j})$ есть произвольный (не обязательно отличный от $P_j(x_1, \ldots, x_{m_j})$) предикатный символ местности $m_j$ ($j = 1, \ldots, k$).

Далее, для всякого протокола $pr$ в словаре $V$ будем обозначать через $(\Phi_*.V.V')(pr)$ такой протокол в словаре $V'$, который получается в результате замены каждого элементарного протокола вида $P_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$ (или $\bar{P}_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$, или $\tilde{P}_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$), принадлежащего протоколу $pr$, на элементарный протокол вида $Q_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$ (или $\bar{Q}_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$, или $\tilde{Q}_j(a_1, \ldots, a_{m_j})$).

Наконец, для всякого тестового алгоритма $\mathcal{T}$ в словаре $V$ будем обозначать через $((\Phi_*.V.V')(\mathcal{T}))$ такой алгоритм $\mathcal{T}^W$ в словаре $V'$, что для всякого протокола $pr^W$ в словаре $V'$ выполняется равенство $\mathcal{T}^W(pr^W) = \mathcal{T}(pr)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $pr^W = (\Phi_*.V.V')(pr)$.

Заметим, что алгоритм $((\Phi_*.V.V')(\mathcal{T}))$ является, очевидно, специальным видом нетворческой модификации алгоритма $\mathcal{T}$ и поэтому (см. $(i)$ и $(ii)$ на стр. 14 ) является также тестовым алгоритмом. Кроме того, из наших определений непосредственно вытекают равенства

$$(\Phi_*.V'.V)((\Phi_*.V.V')(pr)) = pr, \quad (14)$$

$$((\Phi_*.V'.V)(((\Phi_*.V.V')(\mathcal{T})))) = \mathcal{T}. \quad (15)$$

Теперь мы в состоянии точно сказать, что мы имели в виду, когда говорили выше о требовании инвариантности функции $A_f$ относительно, по крайней мере, некоторых преобразований формы записи исходной информации для каждого отдельного применения теории $f$.

Требование $C4$:

Д л я п р о и з в о л ь н ы х $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle \in \pi$, $\langle \mathcal{T}_{h_0^W}, pr_0^W \rangle \in \pi$, $\mathcal{T}_1 \in \tau$, $\mathcal{T}_1^W \in \tau$, т а к и х, ч т о

$$A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) = \mathcal{T}_1,$$

$$A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0^W}, pr_0^W \rangle) = \mathcal{T}_1^W,$$

е с л и

$$V_{h_0^W} = V'_{h_0},$$

и если

$$\mathcal{T}_{h_0}^{w} = ((\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})),$$

$$p\tau_0^{w} = (\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(p\tau_0),$$

то

$$\mathcal{T}_1^{w} = ((\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_1)).$$

Итак, мы сформулировали четыре ограничения $C1-C4$ на функцию $f$, которым она необходимо должна удовлетворять, если эта функция интерпретируется как теория предсказания, являющаяся универсально применимой, нетривиальной и корректной. Заметим, что нет (или во всяком случае не приводится в настоящей работе) никаких оснований считать упомянутые ограничения достаточными, чтобы любую теорию предсказаний (любую функцию $f$), удовлетворяющую им, действительно можно было бы оправдать в качестве универсальной, нетривиальной и корректной теории.

## § 3. Обоснование теории эмпирических предсказаний

В предыдущем параграфе мы сформулировани четыре требования. Каждое из них никак не апеллирует к попыткам гарантировать осуществление ожидаемой теорией именно таких предсказаний, которые являются успешными. Тем не менее нарушение любого из этих требований уже само по себе означало бы – несмотря на отсутствие упомянутой апелляции – заведомый отказ решать проблему (индукции) в тех постановках, в каких решение этой проблемы является желательным; ибо такое нарушение означало бы отказ видеть будущую теорию предсказаний универсальной, нетривиальной и корректной. С другой стороны, мы собираемся ниже показать, что названные требования достаточно сильны, чтобы любая теория предсказания $f$, удовлетворяющая им, в каждом конкретном случае своего применения давала бы или тривиальный результат, или результат, который может быть также получен применением в данных условиях некоторой наперед фиксированной теории $f^*$. То есть мы собираемся действительно осуществить обоснование теории эмпирического предсказания именно тем способом, который допускался в начале настоящего исследования всего лишь как возможность.



Рассмотрим функцию $A_{T^*}$, определяемую на всем классе $\pi$ условием

$$A_{T^*}(\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle) = (T^* p\tau_0 \mathcal{T}_{h_0}), \qquad (16)$$

где $\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle$ – произвольная пара из $\pi$;

$(T^* p\tau_0 \mathcal{T}_{h_0})$ – функция, определенная на каждом протоколе $p\tau$ в словаре $V_{h_0}$ соотношением

$$(T^* p\tau_0 \mathcal{T}_{h_0})(p\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\bar{B}}(p\tau) = \bar{\bar{B}}(p\tau_0) \text{ и протоколы } p\tau \text{ и } p\tau_0 \text{ не являются изоморфными;} \\ \mathcal{T}_{h_0}(p\tau), & \text{если имеет место любой другой случай.} \end{cases} \qquad (17)$$

Непосредственно ясно, что рассматриваемая функция $A_{T^*}$, определяемая (16) и (17), принимает значения в $\tau$, то есть что функции $(T^* p\tau_0 \mathcal{T}_{h_0})$ суть тестовые алгоритмы. Приведем предварительное

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для всякой пары $\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle$, принадлежащей множеству $\pi$, и для всякой функции $A_f$, удовлетворяющей требованиям $C1-C4$, или

$$A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle) = A_{T^*}(\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle) \qquad (18)$$

или

$$A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle) = \mathcal{T}_{h_0},$$

где $A_{T^*}$ – функция, определенная равенствами (16) и (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Тогда для некоторой пары $\langle \mathcal{T}_{h_0}, p\tau_0\rangle$, принадлежащей множеству $\pi$, и для некоторой функции $A_f$, удовлетворяющей требованиям $C1-C4$, будут одновременно выполнены неравенства

$$\mathcal{T}_{h_1} = A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, \rho\tau_0\rangle) \neq A_{T*}(\langle \mathcal{T}_{h_0}, \rho\tau_0\rangle) = (T^*\rho\tau_0\mathcal{T}_{h_0}) , \qquad (20)$$

$$\mathcal{T}_{h_1} = A_f(\langle \mathcal{T}_{h_0}, \rho\tau_0\rangle) \neq \mathcal{T}_{h_0}. \qquad (2I)$$

Из (2I) и $(ii)$ в $C2$ следует, что существует такой протокол $\check{\rho\tau}$ в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$, что

$$\mathcal{T}_{h_0}(\check{\rho\tau}) = 1, \qquad (22)$$

$$\mathcal{T}_{h_1}(\check{\rho\tau}) = 0. \qquad (23)$$

I. Пусть

$$\bar{\bar{B}}(\check{\rho\tau}) \neq \bar{\bar{B}}(\rho\tau_0). \qquad (24)$$

Так как $\mathcal{T}_{h_1}$ принадлежит $\mathcal{T}$, то в силу $(ii)$ и $(iii)$ определения тестового алгоритма (см. стр. 9 ) и равенства (23) существует такой не изоморфный протоколу $\check{\rho\tau}$ протокол $\dot{\rho\tau}$ (в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$), что

$$\bar{\bar{B}}(\check{\rho\tau}) = \bar{\bar{B}}(\dot{\rho\tau}), \qquad (25)$$

и

$$\mathcal{T}_{h_1}(\dot{\rho\tau}) = 1. \qquad (26)$$

Отсюда, вновь учитывая пункт $(ii)$ в $C2$, получаем

$$\mathcal{T}_{h_0}(\dot{\rho\tau}) = 1. \qquad (27)$$

Пусть далее

$$\mathcal{V}_{h_0} = \{P_1(x_1,\dots,x_{m_1}),\dots,P_k(x_1,\dots,x_{m_k})\}.$$

Рассмотрим словарь

$$\mathcal{V}'_{h_0} = \{Q_1(x_1,\dots,x_{m_1}),\dots,Q_k(x_1,\dots,x_{m_k})\}.$$

Очевидно, всегда можно указать такой алгоритм $(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})$ из $\varphi$, что для всякого протокола $\rho\tau$ в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$ протокол $(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau)$ в словаре $\mathcal{V}'_{h_0}$ удовлетворяет условию

$$(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau) = \begin{cases} (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\check{\rho\tau}) & \text{,если } \rho\tau = \dot{\rho\tau}\ ; \\ (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau}) & \text{,если } \rho\tau = \check{\rho\tau}\ ; \\ (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau) & \text{,если протокол } \rho\tau \text{ не изоморфен ни протоколу } \dot{\rho\tau}\text{, ни проколу } \check{\rho\tau}\ . \end{cases} \qquad (28)$$



Заметим, что в силу тех требований (см. а), б) на стр.12), которые мы наложили на алгоритмы из $\varphi$, изоморфность произвольных двух протоколов $\rho\tau_1$ и $\rho\tau_2$ в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$ влечет изоморфность соответствующих протоколов $(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_1)$ и $(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_2)$. Кроме того, ясно, что для произвольного протокола $\rho\tau^w$ в словаре $\mathcal{V}'_{h_0}$ существуют такие протоколы $\rho\tau_1$ и $\rho\tau_2$ в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$, что

$$\rho\tau^w = (\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_1) = (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_2) , \qquad (29)$$

причем $\rho\tau_1 = \rho\tau_2$, если протокол $\rho\tau^w$ на изоморфен ни протоколу $(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\check{\rho\tau})$, ни протоколу $(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau})$.

Рассмотрим нетворческую $(\Phi_1, \mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})$-модификацию алгоритма $\mathcal{T}_{h_0}$. В соответствии с определением (см.(6), стр. I4 ) эта модификация $((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))$ для всякого протокола $\rho\tau^w$ в словаре $\mathcal{V}'_{h_0}$ удовлетворяет соотношению

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w) = \begin{cases} \text{I, если существует протокол } \rho\tau \text{ в словаре } \mathcal{V}_{h_0}\text{, такой, что } \rho\tau^w \text{ изоморфен протоколу } (\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau) \text{ и } \mathcal{T}_{h_0}(\rho\tau) = 1\ ; \\ \text{0} - \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (30)$$

Так как $\mathcal{T}_{h_0}(\rho\tau_0) = 1$, то (30) влечет

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)) = 1. \qquad (3I)$$

Так как в силу (24) и (25) протокол $\rho\tau_0$ не изоморфен ни протоколу $\dot{\rho\tau}$, ни протоколу $\check{\rho\tau}$, то соотношение (28) влечет равенство

$$(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0) = (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0). \qquad (32)$$

Подставляя в (3I) вместо $(\Phi_1\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)$ правую часть равенства (32), получаем:

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)) = 1.$$

Но это соотношение означает, что пара $<((\Phi_1, \mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))$, $(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)>$ является допустимой:

$$<((\Phi_1, \mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})), (\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)> \in \pi. \qquad (33)$$

Кроме того, (28) и (30) совместно с (22) и (27) влекут:

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau}))=1; \qquad (34)$$

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\check{\rho\tau}))=1. \qquad (35)$$

Покажем, что

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))=((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})). \qquad (36)$$

Предположим обратное. Пусть существует такой протокол $\rho\tau^w$ в словаре $\mathcal{V}'_{h_0}$, что для него

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w)\neq((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w). \qquad (36_1)$$

Пусть, например,

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w)=0, \qquad (36_2)$$

а

$$((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w)=1. \qquad (36_3)$$

Учитывая (29), перепишем равенства $(36_2)$ и $(36_3)$ в виде

$$((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau))=0, \qquad (36_4)$$

$$((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau))=1, \qquad (36_5)$$

где $\rho\tau$ – некоторый протокол в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$. Равенство $(36_4)$ совместно с (30) и (28) дает:

$$\mathcal{T}_{h_0}(\rho\tau)=0. \qquad (36_6)$$



А равенство $(36_5)$ совместно с определением для $((\Phi_*.\mathcal{V}.\mathcal{V}')(\mathcal{T}))$ (см. стр. 19) дает:

$$\mathcal{T}_{h_0}(\rho\tau)=1. \qquad (36_7)$$

Но $(36_6)$ и $(36_7)$ противоречат друг другу, так как по определению тестового алгоритма он является однозначным отображением множества протоколов на множество $\{0,1\}$. Точно так же показывается, что предположение: $((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w)=1$, а $((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(\rho\tau^w)=0$, тоже ведет к противоречию.

Таким образом, вообще $(36_1)$ ведет к противоречию. Следовательно, действительно имеет место (36).

Из (32), (33), (36) и требования $C4$ вытекает равенство

$$A_f(<((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})), (\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)>)= \qquad (37)$$
$$=((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(A_f(<\mathcal{T}_{h_0}, \rho\tau_0>))).$$

Как и в том случае, когда мы ввели в рассмотрение алгоритм $(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})$, мы будем считать очевидным (и на этом основании опускаем – как и везде в подобных случаях – соответствующее доказательство), что существует такой алгоритм $(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})$ из $\varphi$, что для всякого протокола $\rho\tau^w$ в словаре $\mathcal{V}'_{h_0}$ протокол $(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(\rho\tau^w)$ в словаре $\mathcal{V}_{h_0}$ удовлетворяет условию

$$(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(\rho\tau^w)=\begin{cases}\dot{\rho\tau}, & \text{если } \rho\tau^w=(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau});\\ \check{\rho\tau}, & \text{если } \rho\tau^w=(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\check{\rho\tau});\\ \rho\tau, & \text{если } \rho\tau^w=(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau),\\ & \text{и } \rho\tau \text{ не изоморфен ни } \dot{\rho\tau}, \\ & \text{ни } \check{\rho\tau}.\end{cases} \qquad (38)$$

Покажем, что

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)]=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0))]. \qquad (39)$$

На основании (4) левая часть равенства (39) перепишется следующим образом:

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)]=\rho\tau_0 \cup (\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0). \qquad (39_1)$$

Отсюда, учитывая (32), получаем

$$[(\Phi_1, V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0)] = pr_0 \cup (\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0). \qquad (39_2)$$

Далее, протокол $(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0))$ в силу (32) удовлетворяет соотношению:

$$(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0)) = (\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0)). \qquad (39_3)$$

Следовательно, правая часть равенства (39) перепишется так:

$$[(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0))] =$$

$$= (\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0)) \cup (\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0). \qquad (39_4)$$

Так как $pr_0$ не изоморфен ни $pr$, ни $pr$, то в соответствии с (38) имеет место

$$(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0)) = pr_0 \qquad (39_5)$$

Учитывая это равенство $(39_5)$, мы можем окончательно переписать $(39_4)$ в виде:

$$[(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0))] = pr_0 \cup (\Phi_* . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr_0), \qquad (39_6)$$

Равенства $(39_2)$ и $(39_6)$ совместно дают (39).

Покажем теперь, что

$$[(\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})] = [(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})(((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))]. \qquad (40)$$

Предположим обратное. Пусть существует протокол $pr^*$ в словаре $[V_{h_0} . V'_{h_0}]$, такой, что для него

$$[(\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})](pr^*) \neq$$

$$\neq [(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})(((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))](pr^*). \qquad (40_1)$$

Пусть, например,

$$[(\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_n})](pr^*) = 0, \qquad (40_2)$$

в то время как

$$[(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})(((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))](pr^*) = 1. \qquad (40_3)$$

Из $(40_3)$ и определения нетворческих сопряжений для алгоритма и протокола соответственно (см. (4), (5)) следует, что существует такой протокол $pr^w$ в словаре $V'_{h_0}$, что для него

$$pr^* = [(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})(pr^w)]. \qquad (40_4)$$

и

$$((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0}))(pr^w) = 1. \qquad (40_5)$$

Соотношения $(40_5)$ и (30) дают следующий вывод. Существует такой протокол $pr$ в словаре $V_{h_0}$, что для него:

$$pr^w = (\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr), \qquad (40_6)$$

и

$$\mathcal{T}_{h_0}(pr) = 1. \qquad (40_7)$$

Расписывая $(40_4)$ по формуле (4) и учитывая $(40_6)$, получаем

$$pr^* = (\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr) \cup (\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr)). \qquad (40_8)$$

Но в силу соотношений (28) и (38) протокол $(\Phi_1^{-1} V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr))$ равен протоколу $pr$:

$$(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr)) = pr. \qquad (40_9)$$

Следовательно, равенство $(40_8)$ эквивалентно равенству

$$pr^* = (\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(pr) \cup pr, \qquad (40_{10})$$

где $pr$ удовлетворяет соотношению $(40_7)$. Но в таком случае $(40_{10})$, $(40_7)$ совместно с (5) влекут равенство

$$[(\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})](pr^*) = 1, \qquad (40_{11})$$

которое противоречит соотношению $(40_2)$.

Совершенно аналогично доказывается, что предположение

$$[(\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})](pr^*) = 1,$$

в то время как

$$[(\Phi_1^{-1} . V'_{h_0} . V_{h_0})(((\Phi_1 . V_{h_0} . V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))](pr^*) = 0,$$

также приводит к противоречию. Таким образом, неверно, что существует такой протокол $\rho\tau^*$ в словаре $[\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0}]$, что для него справедливо соотношение $(40_1)$. Следовательно, действительно имеет место равенство (40).

Заметим, что (5) и $\mathcal{T}_{h_0}(\rho\tau_0)=1$ непосредственно дают:

$$\langle[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})],[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)]\rangle\in\pi. \quad (41)$$

Так как функция $A_f$ однозначна и определена на каждой паре из $\pi$ (требование $C1$), то (39), (40) и (41) влекут равенство

$$A_f(\langle[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})],[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)]\rangle)=$$

$$=A_f(\langle[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))],$$

$$[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0))]\rangle). \quad (42)$$

В силу требования $C3$ (см. также соотношение (13)) имеет место равенство

$$A_f(\langle[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})))],$$

$$[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0))]\rangle)=$$

$$=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(A_f(\langle((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})),(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)\rangle))] \quad (43)$$

и равенство

$$A_f(\langle[\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})],[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)]\rangle)= \quad (44)$$

$$=[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0},\rho\tau_0\rangle))].$$

Следовательно, используя (43) и (44), мы можем переписать равенство (42) в виде



$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0},\rho\tau_0\rangle))]=$$

$$=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(A_f(\langle((\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_0})), \quad (45)$$

$$(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\rho\tau_0)\rangle))].$$

Равенство (45) в силу (37) в свою очередь перепишется как

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0},\rho\tau_0\rangle))]=$$

$$=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(A_f(\langle\mathcal{T}_{h_0},\rho\tau_0\rangle))))], \quad (46)$$

или

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})]=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})))]. \quad (47)$$

Но соотношение (47) ведет к противоречию. С одной стороны, оно означает, что для всякого протокола $\rho\tau^*$ в словаре $[\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0}]$ имеет место

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})](\rho\tau^*)=$$

$$=[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})))](\rho\tau^*). \quad (48)$$

С другой стороны, существует такой протокол $\rho\tau_1^*$ в словаре $[\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0}]$, что для него

$$[(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})](\rho\tau_1^*)\neq$$

$$\neq[(\Phi_1^{-1}.\mathcal{V}'_{h_0}.\mathcal{V}_{h_0})(((\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})))](\rho\tau_1^*). \quad (49)$$

В самом деле, пусть

$$\rho\tau_1^*=\dot{\rho\tau}\cup(\Phi_1.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau}). \quad (50)$$

Тогда в соответствии с (28)

$$\rho\tau_1^*=\dot{\rho\tau}\cup(\Phi_*.\mathcal{V}_{h_0}.\mathcal{V}'_{h_0})(\dot{\rho\tau}) \quad (51)$$

Так как $\mathcal{T}_{h_1}(\dot{\rho\tau})=1$ (см. (26)), то в соответствии с (5) и (50) имеет место равенство

$$[(\Phi_1 \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})](pr^*_1) = 1. \qquad (52)$$

Предположим, что

$$[(\Phi_1^{-1} \cdot V'_{h_0} \cdot V_{h_0})(((\Phi_* \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1})))](pr^*_1) = 1. \qquad (53)$$

Тогда, в силу (5), существует такой протокол $pr^w_1$ в словаре $V'_{h_0}$, что

$$pr^*_1 = pr^w_1 \cup (\Phi_1^{-1} \cdot V'_{h_0} \cdot V_{h_0})(pr^w_1), \qquad (54)$$

и

$$((\Phi_* \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1}))(pr^w_1) = 1. \qquad (55)$$

Поскольку, очевидно, любой протокол $pr^*$ в словаре $[V_{h_0} \cdot V'_{h_0}]$ однозначно представим в виде теоретико-множественной суммы двух протоколов $pr$ и $pr^w$ в словарях $V_{h_0}$ и $V'_{h_0}$ соответственно, то из (5I) и (54) следует, в частности, что

$$pr^w_1 = (\Phi_* \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\check{pr}). \qquad (56)$$

Используя (56), перепишем равенство (55) в виде

$$((\Phi_* \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\mathcal{T}_{h_1}))((\Phi_* \cdot V_{h_0} \cdot V'_{h_0})(\check{pr})) = 1. \qquad (57)$$

Это последнее соотношение в силу определения для $((\Phi_* \cdot V \cdot V')(\mathcal{T}))$ (см.стр. I9) влечет равенство $\mathcal{T}_{h_1}(\check{pr}) = 1$, которое противоречит (23). Таким образом, в наших предположениях одновременно не могут быть верными (52) и (53), что и доказывает (49). А так как (49) несовместимо с (48), то, следовательно, в самом деле равенство (47) ведет к противоречию. Но в таком случае мы вообще доказали, что если имеет место соотношение (2I), то для всякого протокола $pr$ (в словаре $V_{h_0}$), такого, что $\bar{B}(pr) \neq \bar{B}(pr_0)$, выполняется соотношение

$$\mathcal{T}_{h_1}(pr) = \mathcal{T}_{h_0}(pr). \qquad (58)$$

Заметим, что вследствие этого из соотношения (20), (2I) и (I7) вытекает существование таких двух не изоморфных друг другу и протоколу $pr$ протоколов $\check{pr}$ и $\dot{pr}$ (в словаре $V_{h_0}$), что имеет место соотношения (22), (23), (25), (26), (27) и соотношение

$$\bar{B}(\check{pr}) = \bar{B}(pr_0). \qquad (24')$$



В самом деле, если не существует протокола $\check{pr}$, удовлетворяющего (22), (23), (24'), не изоморфного $pr_0$, то в силу (58) не будет выполнено соотношение (2I). Если существует такой протокол $\check{pr}$ и не существует не изоморфного ему и протоколу $pr_0$ протокола $\dot{pr}$, удовлетворяющего (26), (27) и (25), то в силу (58) и (I7) не будет выполнено соотношение (20).

II. Итак, пусть имеют место (22), (23), (24'), (25), (26), (27). Этот случай отличается от уже исследованного случая I только тем, что здесь в качестве одной из посылок взято соотношение (24') вместо соотношения (24). Но так как при исследовании случая I мы использовали соотношение (24) только для того, чтобы гарантировать неизоморфность протоколов $\check{pr}$ и $\dot{pr}$ протоколу $pr_0$, то - поскольку эта неизоморфность имеет место и в рассматриваемом случае,- повторяя прежние рассуждения, мы снова придем к противоречию.

Таким образом, вообще противоречиво наше исходное предположение о том, что для некоторой пары $\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle$ из $\mathcal{T}$ и для некоторой функции $A_f$, удовлетворяющей требованиям $C1-C4$, будут одновременно выполнены неравенства (20) и (21). Этим доказывается сформулированное выше п р е д в а р и т е л ь н о е у т в е р ж д е н и е.

Рассмотрим теорию предсказания $f^*$, определяемую условием: для произвольных $h_0$, $pr_0$, если $\mathcal{T}_{h_0}(pr_0) = 1$, то

$$f^*(\langle h_0, pr_0 \rangle) = \langle V_{h_0}, \mathcal{I}nt_{h_0}, A_{T^*}(\langle \mathcal{T}_{h_0}, pr_0 \rangle) \rangle, \qquad (59)$$

где функция $A_{T^*}$ удовлетворяет соотношению (I6).

В соответствии с предварительным утверждением эта теория предсказания $f^*$ обладает следующим свойством. Для произвольных $h_0, pr_0$, таких что $\mathcal{T}_{h_0}(pr_0) = 1$, и для произвольной теории предсказания $f$, удовлетворяющей требованиям $C1-C4$, имеют место:

или $$f(\langle h_0, pr_0 \rangle) = f^*(\langle h_0, pr_0 \rangle), \qquad (60)$$

или $$f(\langle h_0, pr_0 \rangle) = \langle V_{h_0}, \mathcal{I}nt_{h_0}, \mathcal{T}_{h_0} \rangle = h_0 \qquad (6I)$$

Ранее мы употребили понятие тривиального результата применения какой-либо теории предсказания к имеющейся налицо исходной информации. Теперь мы можем точно сказать, что при этом имелось в виду. А именно: применение теории $f$ к исходной информации $\langle h_0, pr_0 \rangle$ дает тривиальный результат, если имеет место соотношение $f(\langle h_0, pr_0 \rangle) = h_0$. Учитывая это обстоятельство, мы на основании рассуждений, приведших к (60) и (61), приходим к следующему основному выводу:

> Всякая универсальная, нетривиальная и корректная теория предсказаний в каждом конкретном случае своего применения дает или тривиальный результат, или результат, который может быть получен применением к имеющейся налицо в рассматриваемом конкретном случае исходной информации теории $f^*$, определяемой соотношением (59).

Мы не доказали, что теория $f^*$ сама удовлетворяет требованиям $C1-C4$. Более того, по следующей причине мы считаем попытки продвинуться в этом направлении излишними. Во-первых, поскольку требования $C1-C4$ не обоснованы в качестве достаточных условий для того, чтобы всякая теория, удовлетворяющая им, действительно могла рассматриваться в качестве универсальной, нетривиальной и корректной теории предсказания, то соотношения (59), (60) и (61) не позволяют заключить, - даже если бы мы доказали, что $f^*$ требованиям $C1-C4$ удовлетворяет, - что существует хотя бы одна универсальная, нетривиальная и корректная теория предсказаний. Во-вторых, такого рода заключение и не представляет особого интереса, так как если бы все-таки удалось какими-нибудь дополнительными исследованиями установить, что класс универсальных, нетривиальных и корректных теорий предсказаний не пуст, то и в этом случае мы все равно мало бы что выиграли по существу. Дело в том, что в силу основного вывода рассматриваемый класс все равно состоял бы из теорий, каждая из которых заведомо не может осуществлять нетривиальные предсказания, отличающиеся от предсказаний, соответствующих теории $f^*$. А сама теория $f^*$ такова (см. (59), (17), (16)), что не остается никаких надежд на то, чтобы использование её в эмпирических исследованиях принесло бы удовлетворительный полезный эффект. Очевидно, что пользуясь такой ("убогой") теорией, не удалось бы открыть ни один из фактически открытых законов физики, химии и так далее.



Имеется в виду, например, следующее обстоятельство. Любой из упомянутых законов, скажем, закон всемирного тяготения, может быть представлен в виде некоторой эмпирической гипотезы, скажем, $h_1$. Возможность "открыть" этот закон означает возможность перейти к гипотезе $h_1$ от пары $\langle h_0, pr_0 \rangle$, где $h_0$ есть некоторая тавтология, а $pr_0$ есть протокол некоторого исходного эксперимента (предшествующего опыта). Тот факт, что $h_0$ здесь предполагается тавтологией, то есть гипотезой, тестовый алгоритм которой не запрещает ни одного из соответствующих (в соответствующем словаре) протоколов, отвечает пониманию акта "открытия" закона как такого процесса, который восходит в конце концов только к эксперименту. Ведь прежде чем использовать в качестве $h_0$ какую-либо не тавтологичную гипотезу, её в свою очередь также следует "открыть" и так далее.

Функция $f^*$, примененная к произвольной такой паре $\langle h_0, pr_0 \rangle$, что $h_0$ есть тавтология, дает гипотезу $h_1$, которая в силу (59), (17), (16) и того, что $h_0$ есть тавтология, не запрещает ни одного протокола мощности, отличной от мощности протокола $pr_0$, и запрещает все протоколы мощности, равной мощности протокола $pr_0$, и не изоморфные последнему. Так как закон всемирного тяготения, подобно другим законам природы, утверждает нечто, что не является тавтологией относительно эмпирических ситуаций с участием произвольного числа наблюдаемых объектов, то не существует такого протокола $pr_0$ (и, следовательно, предшествующего опыта), отправляясь от которого (и, конечно, тавтологии $h_0$) можно с помощью $f^*$ получить $h_1$, выражающую закон всемирного тяготения.

Итак, ясно, что если основной вывод не ошибочен, то попытки построить практически полезную теорию предсказаний должны вестись в нарушение или требования универсальности, или требования нетривиальности, или требования корректности ожидаемой теории. Такое положение дел свидетельствует, по-крайней мере, о двух вещах. Во-первых, проблема индукции - в той мере, в какой она содержит в себе задачу обосновать практически полезную теорию предсказаний – является более глубокой, чем это видно в результате её анализа по Попперу: невозможно гарантировать не только успешность предсказаний, осуществляемых какой-либо предлагаемой в данный момент теорией предсказания, но невозможно даже обосновать эту теорию как такую, которая будет универсальной, нетривиальной, корректной и вместе с тем не столь убогой, как теория $f^*$. И, во-вторых, если когда-либо все-таки удастся создать универсальную, нетривиальную и практически полезную теорию предсказаний, то такая теория не будет удовлетворять, по крайней мере, одному из требований $C3-C4$, и, следовательно, в рамках этой теории нельзя будет гарантировать отсутствие определенного рода парадоксов.

Полученный результат можно, по-видимому, интерпретировать как отражение существования двух классов объектов научного исследования[ж)]. К одному классу относятся те из упомянутых объектов, изучение которых надлежит осуществлять с помощью теорий, заведомо исключающих возникновение каких-либо парадоксов. Объекты этого класса можно называть "простыми". К другому классу, классу "сложных", относятся те объекты, изучение которых предполагает построение теорий, не гарантированных от возникновения парадоксов.

Если верно, что человек обладает универсальной способностью осуществлять нетривиальные и полезные предсказания (а история естествознания не дает оснований в это не верить), – то именно сама эта способность и являет собой пример "сложного объекта". Возможно, что вообще к этому классу относятся многие объекты, которые принято в литературе называть "большими" или "сложными системами".

Автор весьма рад случаю выразить благодарность следующим лицам, чья помощь способствовала появлению настоящей работы: Е.Е.Витяеву, Б.П.Гаврилко, Н.Г.Загоруйко, Б.Я.Ковалерчуку, Ю.Г. Косареву и А.С.Нудельману.

ж) Эту идею высказал Ю.Г.Косарев при обсуждении данной работы.



Литература

1. POPPER K. The logic of scientific Discovery. L., 1959.
2. The problem of inductive logic. Amsterdam, 1968.
3. Aspects of inductive logic. Amsterdam, 1966.
4. ВИТЯЕВ Е.Е., ГАВРИЛКО Б.П., ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф. Требования к алгоритмам предсказания. – "Вычислительные системы", Новосибирск, 1972, вып.50, с.100–105.
5. TICHY P. Intension in terms of Turing machines. – "Studio Logica", 1969, t.XXIV.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 апреля 1973 года