ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1973 год Выпуск 55

УДК 51:155.001.57

КЛАССИФИКАЦИИ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НАИМЕНОВАНИЙ ОБЪЕКТОВ

Б.Я.Ковалерчук

Новые методы классификации объектов с помощью вычислительных машин поставили задачу формализации многих интуитивных требований, предъявляемых к классификации.

В работе рассматривается одно из таких требований – независимость классификации относительно наименований объектов. Для представления исходных сведений об объектах в виде результатов измерений определенных признаков в некоторых конкретных шкалах можно использовать работу Суппеса и Зинеса [1].

Однако не всегда исходные сведения об объектах, подлежащих классификации, представлены таким образом.

В общем случае исходная информация об объектах есть протокол экспериментов, проведенных с помощью фиксированных приборов над данными объектами. Всякий такой эксперимент можно рассматривать как модель.

В работе вводится понятие классификации, инвариантной относительно наименований объектов. Доказывается утверждение, что указанные классификации исчерпываются ($\stackrel{\Phi}{=}$) физической неразличимостью [3] либо её укрупнениями. Приводятся также некоторые попутные результаты.

1. Обозначения и определения

$\langle A,\Omega\rangle$ – модель [2];
$\Omega=\{P_i\}_J$ – сигнатура модели [2];

v_i – местность предиката [2];
$\{v_i\}$ – тип модели [2];
$\langle x\rangle_{v_i}$ – кортеж длины v_i из элементов множества A;
$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_k)$ – подстановка, преобразующая x_1 в x_2, $x_2\to x_3,\ldots,x_k\to x_1$ и оставляющая на месте остальные элементы;
$x\varphi$ – образ элемента x при подстановке φ;
$\langle x\varphi\rangle$ – образ кортежа $\langle x\rangle$ при подстановке φ;
B – произвольное множество такое, что $|B|=|A|$;
$\varkappa$ – взаимо-однозначное отображение A на B;
$\langle a\varkappa\rangle_{v_i}$, $\langle b\varkappa^{-1}\rangle_{v_i}$ – образы $\langle a\rangle_{v_i}$, $\langle b\rangle_{v_i}$ при отображениях $\varkappa$ и $\varkappa^{-1}$, где $\langle a\rangle_{v_i}$, $\langle b\rangle_{v_i}$ – кортежи длины v_i соответственно из элементов множества A и B.

Определим v_i – местный предикат $P_{\varkappa i}(\langle b\rangle)$ условием: $\forall\langle b\rangle\, P_{\varkappa i}(\langle b\rangle)\Leftrightarrow P_i(\langle b\varkappa^{-1}\rangle)$, $\Omega_\varkappa=\{P_{\varkappa i}\}_J$. Тогда возникает модель $\langle B,\Omega_\varkappa\rangle$.

Если модель $\langle A,\Omega\rangle$ конечна, то её можно интерпретировать как эксперимент, где A – рассматриваемое конечное множество объектов, P_i – наблюдаемое с помощью того или иного прибора отношение между объектами, B – множество имен и $\langle B,\Omega_\varkappa\rangle$ – как протокол эксперимента. Рассматривая различные множества B и отображения $\varkappa$, будем получать различные протоколы экспериментов. Под классификацией понимается функция, задающая на каждой модели $\langle B,\Omega_\varkappa\rangle$ эквивалентность со свойством, что каждому классу эквивалентности присваивается номер (для бесконечного случая индекс).

Для каждой классификации возникает задача проверки независимости результата классификации от вида записи использованного протокола эксперимента и выделения классификаций, инвариантных в этом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы a и b суть физически неразличимы (Ф-неразличимы, $a\stackrel{\Phi}{=}b$), если

$$\forall\langle x\rangle_{v_i}\ i\in J\quad P_i(\langle x(a,b)\rangle_{v_i})=P_i(\langle x\rangle_{v_i}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В [3] показано, что $\stackrel{\Phi}{=}$ является эквивалентностью на A.

На содержательном языке отличие $\overset{\Phi}{=}$ от E – обычного равенства элементов в модели заключается в том, что элементы, эквивалентные по E, при помощи предикатов из сигнатуры отличить невозможно, а об Ф-неразличимых элементах можно сказать, что они отличны, но нельзя сказать, где какой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две модели называются графически неотличимыми, если элементы основных множеств обозначены одними и теми же символами и предикаты в этих моделях на графически неотличимых кортежах принимают одинаковые значения.

Пусть $\theta(b_i, b_j, k, \langle B, \Omega \rangle)$ – функция, принимающая значения 0 и I, где $b_i, b_j \in B$, $k \in K$, $|K| \leqslant |B|$, причем только в случае, если в качестве значений последнего аргумента функции θ берутся графически неотличимые модели, эти значения аргументов считаются совпадающими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция θ, удовлетворяющая для любых B и $\varkappa$ следующим требованиям:

I) $\forall ijk\, \theta(b_i, b_j, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = \theta(b_j, b_i, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle)$;

2) $\forall i \exists! k\, \theta(b_i, b_i, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1$;

3) $\forall ijkm(\theta(b_i, b_j, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1 \,\&\, \theta(b_j, b_m, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta(b_i, b_m, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1;$$

4) $\forall ijk\, \theta(b_i, b_j, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1 \Rightarrow \forall t \neq k\ \theta(b_i, b_i, t, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 0$;

5) $\forall ijqk(\theta(b_i, b_j, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1 \,\&\, \theta(b_q, b_q, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta(b_i, b_q, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1,$$

называется классификацией, k интерпретируется как номер (индекс) класса.

ЗАМЕЧАНИЕ. Каждая классификация θ задает на произвольной модели $\langle \theta, \Omega_\varkappa \rangle$ эквивалентность $a \sim b \Leftrightarrow \exists k\, \theta(a, b, k, \langle B, \Omega_\varkappa \rangle) = 1$.

Пусть $\langle B_{k\varkappa} \rangle_{k \in K}$ – множество классов эквивалентности по θ на модели $\langle B, \Omega_\varkappa \rangle$, $\varkappa^{-1} B_{k\varkappa}$ – подмножество элементов из A, чьими именами являются элементы из $B_{k\varkappa}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Классификация θ называется инвариантной относительно наименований элементов, если существует семейство $\{A_k\}_K$ такое, что $\bigcup_{k \in K} A_k = A$, $\forall i \neq j\ A_i \cap A_j = \Lambda$, $\forall B\, \varkappa\ \varkappa^{-1} B_{k\varkappa} = A_k$.

Пусть $a_\alpha \overset{\Phi}{=} b_\beta$, B – множество имен; $\varkappa_1$ отображает $a_\alpha \to b_\alpha$, $a_\beta \to b_\beta$; $\varkappa_2 : a_\alpha \to b_\beta, a_\beta \to b_\alpha$. В обоих случаях $\forall \delta \neq \alpha, \beta\ \ a_\delta \to b_\delta$.

2. Инвариантные классификации

УТВЕРЖДЕНИЕ I. $\langle B, \Omega_{\varkappa_1} \rangle$ и $\langle B, \Omega_{\varkappa_2} \rangle$ графически неотличимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\forall j \in J$, $x_1 x_2 \ldots x_{v_j}$

$$P_j(x_1, x_2, \ldots, x_{v_j}) \Leftrightarrow P_{\varkappa_1 j}(x_1 \varkappa_1, \ldots, x_{v_j} \varkappa_1) \Leftrightarrow P_{\varkappa_2 j}(x_1 \varkappa_2, \ldots, x_{v_j} \varkappa_2).$$

Пусть $x_i = a_\alpha$, тогда $x_i(a_\alpha, a_\beta) = a_\beta$

$$P_j(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{v_j}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\varkappa_1 j}(x_1 \varkappa_1, \ldots, x_i \varkappa_1, \ldots, x_{v_j} \varkappa_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\varkappa_1 j}(x_1 \varkappa_1(b_\alpha, b_\beta), \ldots, x_i \varkappa_1(b_\alpha, b_\beta), \ldots, x_{v_j} \varkappa_1(b_\alpha, b_\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\varkappa_1 j}(x_1 \varkappa_1, \ldots, b_\alpha, \ldots, x_{v_j} \varkappa_1) \Leftrightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow P_{\varkappa_1 j}(x_1 \varkappa_1(b_\alpha, b_\beta), \ldots, b_\beta, \ldots, x_{v_j} \varkappa_1(b_\alpha, b_\beta)) \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow P_j(x_1(a_\alpha, a_\beta), \ldots, a_\alpha(a_\alpha, a_\beta), \ldots, x_{v_j}(a_\alpha, a_\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_{\varkappa_2 j}(x_1 \varkappa_2(b_\alpha, b_\beta), \ldots, b_\alpha(b_\alpha, b_\beta), \ldots, x_{v_j} \varkappa_2(b_\alpha, b_\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{P_{\varkappa_2 j}(x_1 \varkappa_2, \ldots, b_\beta, \ldots, x_{v_j} \varkappa_2)}.$$

В подчеркнутых предикатах на i-м месте стоят графически неотличимые элементы. Ввиду произвольности i, j, утверждение I доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякая классификация (по некоторой модели $\langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle$), на которой Ф-неразличимые элементы попадают в разные классы эквивалентности, не инвариантна относительно наименований объектов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b_\alpha \overset{\Phi}{=} b_\beta$ и образуют классы $\{b_\alpha \dots\} = B_{\alpha\varkappa_1}$ и $\{b_\beta \dots\} = B_{\beta\varkappa_1}$ в модели $\langle B, \Omega_{\varkappa_1} \rangle$ тогда, ввиду графической неотличимости $\langle B, \Omega_{\varkappa_1} \rangle, \langle B, \Omega_{\varkappa_2} \rangle$, для $\langle B, \Omega_{\varkappa_2} \rangle$ классы эквивалентности будут иметь тот же вид $B_{\alpha\varkappa_2} = \{b_\alpha \dots\}$ и $B_{\beta\varkappa_2} = \{b_\beta \dots\}$, это следует из того, что $\theta(b_k, b_k, k, \langle B, \Omega_{\varkappa_1} \rangle) = \theta(b_k, b_k, k, \langle B, \Omega_{\varkappa_2} \rangle) = 1$, где $k = \alpha, \beta$ – индексы классов эквивалентности, но $\varkappa_1^{-1} B_{k\varkappa_1} \neq \varkappa_2^{-1} B_{k\varkappa_2}$, $a_\alpha \neq a_\beta$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $B_{\alpha\varkappa_1}$ и $B_{\beta\varkappa_1}$ – разномощные классы эквивалентности, то соответственно $B_{\beta\varkappa_2}$ и $B_{\alpha\varkappa_2}$ будут отличаться от них как индексами, так и содержанием классов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $|B_{\alpha\varkappa_1}| \neq 1$, то $B_{\beta\varkappa_2}$ и $B_{\alpha\varkappa_2}$ будут отличаться соответственно от $B_{\alpha\varkappa_1}$ и $B_{\beta\varkappa_1}$ как индексами, так и содержанием классов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что классификация θ_1 задает классификацию θ_2, если существует такая модель $\langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle$, что $\theta_1(, , , \langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle) = \theta_2(, , , \langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Ф-неразличимость задает классификацию, инвариантную относительно наименований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим Ф-неразличимости классификацию следующим образом: пусть для некоторых $\bar{B}, \bar{\varkappa}$ классам эквивалентности по $\overset{\Phi}{=}$ присвоены индексы из K и соответственно $\{\bar{B}_{k\bar{\varkappa}}\}_{\mathcal{K}}$, тогда пусть

$$\forall B, \varkappa \ \theta(b_i \varkappa^{-1} \bar{\varkappa}, b_j \varkappa^{-1} \bar{\varkappa}, k, \langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle) = \theta(b_i, b_j, k, \langle \bar{B}, \Omega_{\bar{\varkappa}} \rangle).$$

Очевидно, что так определенное θ удовлетворяет определению классификации.

Покажем, что θ инвариантна относительно наименований.

Пусть $\forall k \in \mathcal{K}$ $A_k = \bar{\varkappa}^{-1} B_k$, $\bigcup_{k \in \mathcal{K}} A_k = A$, $\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \Lambda$,

тогда $\forall \varkappa, k$ $\varkappa^{-1} B_{k\varkappa} = A_k$ – для этого достаточно доказать, что $a \in \varkappa^{-1} B_{k\varkappa} \Leftrightarrow a \in \bar{\varkappa}^{-1} \bar{B}_{k\bar{\varkappa}}$

$$a \in \varkappa^{-1} B_{k\varkappa} \Leftrightarrow a\varkappa \in B_{k\varkappa} \Leftrightarrow \theta(a\varkappa, a\varkappa, k, \langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \theta(a\varkappa\varkappa^{-1}\bar{\varkappa}, a\varkappa\varkappa^{-1}\bar{\varkappa}, k, \langle \bar{B}, \Omega_{\bar{\varkappa}} \rangle) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \theta(a\bar{\varkappa}, a\bar{\varkappa}, k, \langle B, \Omega_{\bar{\varkappa}} \rangle) = 1 \Leftrightarrow a\bar{\varkappa} \in \bar{B}_{k\bar{\varkappa}} \Leftrightarrow a\bar{\varkappa}^{-1} \in \bar{B}_{k\bar{\varkappa}}.$$

Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 3. Всякая эквивалентность, классы эквивалентности которой на некоторой модели $\langle B, \Omega_{\varkappa} \rangle$ составлены из Ф-классов (классов эквивалентности по Ф-неразличимости) задает классификацию, инвариантную относительно наименований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такая эквивалетность не задает инвариантной классификации, то есть, переименовав элементы, получим, что какой-то элемент оказался в другом классе, а это означает, что он оказался в другом Ф-классе. Но это противоречит инвариантности Ф-неразличимости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для каждого типа такого, что $\forall i \in J$ $v_i \geq 2$, во множестве всех моделей $\langle A, \Omega \rangle$ этого типа для каждого разбиения множества $A = \bigcup_{k \in \mathcal{K}} A_k$, $\forall i = j$, $A_i \cap A_j = \Lambda$ существует модель такая, что в ней каждое A_i является Ф-классом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\forall k \in \mathcal{K}$, $A_k = \{a_{k\gamma_k}\}_{\gamma \in \Gamma_k}$ и $\langle X \rangle (A_k)$ – множество всех кортежей длины v_i, содержащих элементы A_k. Значения предикатов на кортежах, не входящих в $\langle X \rangle (A_k)$, не влияют на $\overset{\Phi}{=}$ элементов A_k в модели $\langle A, P_i \rangle$. Это непосредственно следует из определения Ф-неразличимости. По теореме Цермело для каждого множества существует отношение, вполне упорядочивающее его. Пусть

$$S_k = \{\langle a_{k\gamma_k}, a_{m\gamma_m}\rangle\}_{\Gamma_k,\Gamma_m} \ (\forall m > k),$$

где $\langle a_{k\gamma_k}, a_{m\gamma_m}\rangle$ – кортеж длины v_i такого вида $\langle a_{k\gamma_k}, a_{m\gamma_k}, a_{k\gamma_k}, a_{m\gamma_m}, \ldots\rangle$, здесь $a_{k\gamma_k}$, $a_{m\gamma_m}$ последовательно чередуются.

Определим $\forall\langle x\rangle \in \langle X\rangle(A)\setminus S_k$ $P(\langle x\rangle)=1$ и $\forall\langle x\rangle \in S_k$ $P(\langle x\rangle)=0$. Отсюда следует, что произвольные $a,b\in A_k$ Ф–неразличимы и $\forall m > k, \gamma_k, \gamma_m$ $a_{k\gamma_k} \overset{\Phi}{\neq} a_{m\gamma_m}$.

Докажем, что $a \overset{\Phi}{=} b$. Пусть $\langle x\rangle \in \langle X\rangle(A_k)$ содержит хотя бы одно из a и b.

Возможны два случая: $\langle x\rangle \in \langle X\rangle(A_k)\setminus S_k$ и $\langle x\rangle \in S_k$. Рассмотрим первый случай. Если

$$\langle x\rangle, \langle x(a,b)\rangle \in \langle X\rangle(A_k)\setminus S_k \Rightarrow P(\langle x\rangle) = P(\langle x(a,b)\rangle).$$

Если $\qquad \langle x\rangle \in \langle X\rangle(A_k)\setminus S_k,$

то $\qquad \langle x(a,b)\rangle \in \langle X\rangle(A_k)\setminus S_k. \qquad$ (I)

Предположим противное $\langle x(a,b)\rangle \in S_k$, тогда $\langle x(a,b)\rangle = \langle a_{m\gamma_m}, a_{k\gamma_k}\rangle$ $(m > k)$, то есть имеет вид либо $\langle a_{m\gamma_m}, a\rangle$, либо $\langle a_{m\gamma_m}, b\rangle$ и соответственно $\langle x\rangle$, либо $\langle a_{m\gamma_m}, b\rangle$, либо $\langle a_{m\gamma_m}, a\rangle$. Но тот и другой кортежи являются элементами S_k. Противоречие. Доказано (I).

Остался неразобранным случай $\langle x\rangle \in S_k$. Здесь по предыдущим рассуждениям имеем $\langle x(a,b)\rangle \in S_k$, откуда $P(\langle x\rangle) \Leftrightarrow P(\langle x(a,b)\rangle)$.

Итак, $\forall\langle x\rangle$ $P(\langle x\rangle) = P(\langle x(a,b)\rangle)$, откуда $a \overset{\Phi}{=} b$.

Покажем, $a \overset{\Phi}{\neq} a_{m\gamma_m}$ $m > k$. Предположим, $a \overset{\Phi}{=} a_{m\gamma_m}$, тогда $P(\langle a, a_{m\gamma_m}\rangle) \Leftrightarrow P(\langle a, a_{m\gamma_m}(a, a_{m\gamma_m})\rangle)$, откуда $P(\langle a_{m\gamma_m}, a\rangle) \Leftrightarrow P(\langle a, a_{m\gamma_m}\rangle)$, что противоречит определению $P(\langle a_{k\gamma_k}, a_{m\gamma_m}\rangle) = 0$, $P(\langle a_{m\gamma_m}, a_{k\gamma_k}\rangle) = 1$. Поскольку всякое вполне упорядоченное множество имеет первый элемент, получим, что A_1 образует Ф-класс, тогда, сделав индуктивное предположение, что $\forall t < k$ A_t – образуют Ф-классы, по трансфинитной индукции получим по приведенным рассуждениям, что A_k образует Ф-класс. Тем самым утверждение 4 доказано.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить К.Ф. Самохвалова за помощь.

Литература

1. СУППЕС П., ЗИНЕС Дж. Основы теории измерений. – В сб. "Психологические измерения", М., 1967.
2. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. М., 1970.
3. CZAJSNER J. Equivalence relations determining useful properties. – Stadia logika, 1969, t. XXIV.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 апреля 1973 года