1973 год ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 56

УДК 518.12

О ЯВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Ю.С. Завьялов

При теоретическом исследовании некоторых вопросов интерполирования сплайн-функциями оказывается полезным явное выражение решения через заданные значения функции и её производных в узлах интерполяции. Примеры таких представлений для кубических сплайн-функций с равностоящими узлами на конечном отрезке даны в [1-3], а на всей вещественной оси - в [4]. В последнем случае, включая сплайны высших степеней, можно использовать результаты работы [5]. В настоящей статье излагается построение явных решений для систем линейных уравнений с почти ленточными матрицами по методу производящих функций. Полученные формулы применимы для интерполяционных сплайнов любых степеней. В качестве примера рассматриваются кубический сплайны. Найденные выражения используются для изучения свойств фундаментальных сплайнов.

1. Решение систем линейных уравнений методом производящих функций

Применение метода производящих функций для решения бесконечных систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей подробно описано в монографии [6, гл. 2]. Ниже рассматривается общий случай конечных систем с почти ленточными матрицами.

Пусть система $N+1$ уравнений обладает ленточной матрицей с постоянными элементами вдоль диагоналей. Это значит, что система образуется рекуррентными уравнениями вида:

$$\alpha_{-i} t_0 + \ldots + \alpha_{m_2} t_{i+m_2} = b_i \quad (i = 0, \ldots, m_1 - 1), \tag{I.1}$$

$$\alpha_{-m_1} t_{i-m_1} + \ldots + \alpha_0 t_i + \ldots + \alpha_{m_2} t_{i+m_2} = b_i \quad (i = m_1, \ldots, N - m_2), \tag{I.2}$$

$$\alpha_{-m_1} t_{i-m_1} + \ldots + \alpha_{N-i} t_N = b_i \quad (i = N - m_2 + 1, \ldots, N), \tag{I.3}$$

где $\alpha_{m_1} \neq 0, \alpha_{m_2} \neq 0, m_1 + m_2 + 1$ – число ненулевых диагоналей матрицы.

Система (I.I)–(I.3) дополняется сверху тождествами, левые части которых равны левым частям уравнений (I.I) при $i = -m_2, \ldots, -1$, а для правых частей сохраняется стандартное обозначение b_i. Эти тождества и уравнения (I.I) и (I.2) образуют систему с нижней треугольной матрицей, решение которой можно выписать через правые части, содержащие параметры $t_i \; (i = 0, \ldots, m_2 - 1)$. Подставляя решение в уравнения (I.3), получаем систему из m_2 уравнений для определения параметров.

Такую процедуру проще всего проделать методом производящих функций. С этой целью снизу к системе тоже добавляются тождества, так что на каждой диагонали матрицы дополненной системы оказывается по $N+1$ одинаковому элементу.

Пусть τ – параметр. Если умножить каждое из равенств дополненной системы на $\tau^{i+m_2} \; (i = -m_2, \ldots, N + m_1)$ и сложить их, то получается соотношение

$$T(\tau) A(\tau) = B(\tau), \tag{I.4}$$

где

$$T(\tau) = \sum_{i=0}^{N} t_i \tau^i, \quad A(\tau) = \sum_{\ell=-m_1}^{m_2} \alpha_\ell t^{m_2 - \ell}, \tag{I.5}$$

$$B(\tau) = \sum_{\nu=-m_2}^{N+m_1} b_\nu \tau^{\nu + m_2}.$$

Здесь $T(\tau)$, $A(\tau)$ и $B(\tau)$ – производящие функции конечных последовательностей $\{t_i\}$, $\{\alpha_\ell\}$ и $\{b_\nu\}$. Из (I4) следует, что

$$T(\tau) = \frac{B(\tau)}{A(\tau)}, \tag{I.6}$$

и задача сводится к делению двух полиномов.

Это удобно осуществить следующим образом. Полином $A(\tau)$ разлагается на множители

$$A(\tau) = \alpha_{m_2} (1 - s_1 \tau) \ldots (1 - s_{m_1 + m_2} \tau), \tag{I.7}$$

где $s_\ell^{-1} \neq 0$ – его корни, вещественные или комплексные. Предположим, что среди них нет кратных. Тогда разложение $A^{-1}(\tau)$ на простые дроби имеет вид:

$$\frac{1}{A(\tau)} = \sum_{\ell=1}^{m_1+m_2} \frac{\gamma_\ell}{1 - s_\ell \tau}.$$

В случае кратных корней это выражение будет содержать высшие степени биномов $(1 - s_\ell \tau)^{-1}$, в остальном же порядок вычислений не меняется.

Так как имеет место разложение

$$g_\ell(\tau) = \frac{1}{1 - s_\ell \tau} = \sum_{q=0}^{N} (s_\ell \tau)^q + R_{\ell, N+1}(\tau),$$

где $R_{\ell,N+1}(\tau) = g_\ell^{(N+1)}(\tau^*) \cdot \tau^{N+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, то

$$\frac{1}{A(\tau)} = \sum_{q=0}^{N} z_q \tau^q + G^* \tau^{N+1}, \tag{I.8}$$

$$z_q = \sum_{\ell=1}^{m_1+m_2} \gamma_\ell s_\ell^q \quad (q = 0, \ldots, N). \tag{I.9}$$

Из (I.6) следует, что

$$T(\tau) = \sum_{\nu=-m_2}^{N+m_1} \left(\sum_{q=0}^{N} z_q b_\nu \tau^{\nu+q+m_2} + C_\nu^* \tau^{\nu+N+m_2+1} \right).$$

Заменяя индекс q на $i=q+\nu+m_2$ и учитывая, что справа должен стоять полином степени не выше N, получаем

$$T(\tau)=\sum_{\nu=-m_2}^{N-m_2}\ \sum_{i=\nu+m_2}^{N}\tau_{i-\nu-m_2}b_\nu\tau^i.$$

Отсюда, изменяя порядок суммирования, имеем

$$T(\tau)=\sum_{i=0}^{N}\ \sum_{\nu=-m_2}^{i-m_2}\tau_{i-\nu-m_2}b_\nu\tau^i. \tag{I.IO}$$

Наконец, приравнивая коэффициенты при степенях τ слева и справа, находим

$$t_i=\sum_{\nu=-m_2}^{i-m_2}\tau_{i-\nu-m_2}b_\nu \quad (i=0,\dots,N). \tag{I.II}$$

Эти формулы дают представление решения системы через неизвестные t_ℓ $(\ell=0,\dots,m_2-1)$, которые находятся из уравнений (I.3) после подстановки в них выражений (I.II).

Часто некоторые из уравнений системы (I.I) - (I.3) имеют нестандартный вид. В этих случаях приходится прибегать к модификациям метода. Основной прием состоит в приведении уравнений к стандартному виду за счет добавления членов с неизвестными в левые и правые части уравнений. Ситуации, когда нестандартными являются граничные уравнения (I.I) и (I.3), будут продемонстрированы на примерах со сплайн-функциями. Несколько сложнее обстоит дело, если возмущения имеются в уравнениях (I.2). Тем не менее во всех случаях задача сведется к нахождению корней полинома $A(\tau)$ и решению системы уравнений с числом неизвестных, равным числу параметров, вошедших в правые части верхних тождеств и уравнений (I.I) - (I.2).

2. Явное представление интерполяционных кубических сплайнов

Рассматривается кубический сплайн дефекта I на отрезке $[a,b]$ с равноотстоящими точками раздела $\Delta: x_i=a+ih$ $(i=0,\dots,N)$,

$$S(x)=a_\lambda^{(i)}(x-x_i)^\lambda, \tag{2.I}$$

где по $\lambda=0,1,2,3$ берется тензорная сумма. Пусть сплайн принимает в узлах заданные значения, то есть $a_0^{(i)}=f_i$, и, кроме того, на концах удовлетворяет граничным условиям типов I или II, налагаемым на производные: $S^{(p)}(x_i)=f_i^{(p)}$ $(i=0,N;\ p=1$ или 2 соответственно), или же является периодическим с периодом $T=b-a$.

Условия непрерывности функции и второй производной дают соотношения:

$$a_1^{(i)}=\frac{1}{h}(f_{i+1}-f_i)-\frac{h}{3}(2a_2^{(i)}+a_2^{(i+1)}), \tag{2.2а}$$

$$a_1^{(i+1)}=\frac{1}{h}(f_{i+1}-f_i)+\frac{h}{3}(a_2^{(i)}+2a_2^{(i+1)}), \tag{2.2б}$$

$$a_3^{(i)}=\frac{a_2^{(i+1)}-a_2^{(i)}}{3h} \quad (i=0,\dots,N-1). \tag{2.3}$$

Условия непрерывности первой производной и граничные условия выражаются системой:

$$2a_2^{(0)}+\beta_0a_2^{(1)}+\alpha_0a_2^{(N)}=c_0, \tag{2.4}$$

$$a_2^{(i-1)}+4a_2^{(i)}+a_2^{(i+1)}=c_i \quad (i=1,\dots,N-1), \tag{2.5}$$

$$\beta_Na_2^{(0)}+\alpha_Na_2^{(N-1)}+2a_2^{(N)}=c_N \tag{2.6}$$

(В периодическом случае принято $b=x_{N+1}$).

Эти уравнения представляют собой систему вида (I.I)-(I.3) при $m_1=m_2=1$ с нестандартными граничными уравнениями.

Очевидно, в формуле (I.6) в данном случае

$$A(\tau)=1+4\tau+\tau^2.$$

Корни этого полинома суть $s_1=s_2^{-1}=-2+\sqrt{3}$, $s_2=s_1^{-1}=-2-\sqrt{3}$, а коэффициенты разложения $A^{-1}(\tau)$ на простые дроби — $\gamma_1=s_1(s_1-s_2)^{-1}$, $\gamma_2=-s_2(s_1-s_2)^{-1}$. Величины τ_q (I.9) будут

$$\tau_q=\frac{s_1^{q+1}-s_2^{q+1}}{s_1-s_2}\quad(q=0,\dots,N). \tag{2.7}$$

Введем обозначение

$$\zeta_k=s_1^k-s_2^k. \tag{2.8}$$

Тогда решение системы (2.4)-(2.6) можно представить в виде (I.II):

$$\alpha_2^{(i)}=\frac{1}{\zeta_1}\sum_{\nu=-1}^{i-1}\zeta_{i-\nu}b_\nu\quad(i=0,\dots,N). \tag{2.9}$$

Входящие в (2.9) правые части уравнений (2.5) суть $b_\nu=c_\nu$, где

$$c_\nu=\frac{3}{h^2}(f_{\nu+1}-2f_\nu+f_{\nu-1}), \tag{2.I0}$$

а величины b_{-1}, b_0 для каждого из трех типов сплайнов будут различными.

Т и п I характеризуется значениями $\alpha_0=\beta_N=0$, $\beta_0=\alpha_N=1$,

$$c_0=\frac{3}{h}\left[\frac{1}{h}(f_1-f_0)-f_0'\right],\quad c_N=\frac{3}{h}\left[f_N'-\frac{1}{h}(f_N-f_{N-1})\right]. \tag{2.II}$$

Слева и справа в (2.4) прибавим по $2\alpha_2^{(0)}$. Тогда $b_0=c_0+2\alpha_2^{(0)}$. Дополнительное тождество должно быть $\alpha_2^{(0)}=\alpha_2^{(0)}=b_{-1}$. Тогда формулы (2.9) можно конкретизировать следующим образом:

$$\alpha_2^{(i)}=\frac{1}{\zeta_1}\left[(\zeta_{i+1}+2\zeta_i)\alpha_2^{(0)}+\sum_{\nu=0}^{i-1}\zeta_{i-\nu}c_\nu\right]\quad(i=0,\dots,N). \tag{2.I2}$$

Величина $\alpha_2^{(0)}$ определяется из (2.6) с использованием очевидного тождества

$$\zeta_{k-1}+4\zeta_k+\zeta_{k+1}=0 \tag{2.I3}$$

в виде

$$\alpha_2^{(0)}=\frac{1}{3\zeta_N}\sum_{\nu=0}^{N}(\zeta_{N-\nu-1}+2\zeta_{N-\nu})c_\nu. \tag{2.I4}$$

Т и п II характеризуется значениями $\alpha_0=\beta_0=\alpha_N=\beta_N=0$,

$$c_0=f_0'',\quad c_N=f_N''. \tag{2.I5}$$

В данном случае уравнение (2.4) удобно использовать на месте тождества, положив $b_{-1}=\frac{1}{2}c_0$. Наоборот, на место этого уравнения поставим тождество $4\alpha_2^{(0)}+\alpha_2^{(1)}=2c_0+\alpha_2^{(1)}=b_0$. Тогда (2.9) дает решение

$$\alpha_2^{(i)}=\frac{1}{\zeta_1}\left[-\zeta_{i-1}\frac{c_0}{2}+\zeta_i\alpha_2^{(1)}+\sum_{\nu=1}^{i-1}\zeta_{i-\nu}c_\nu\right]\quad(i=0,\dots,N). \tag{2.I6}$$

Из (2.6) и (2.I3) следует, что

$$\alpha_2^{(1)}=\frac{1}{\zeta_N}\left[\zeta_{N-1}\frac{c_0}{2}-\sum_{\nu=1}^{N-1}\zeta_{N-\nu}c_\nu+\zeta_1\frac{c_N}{2}\right]. \tag{2.I7}$$

П е р и о д и ч е с к и й с л у ч а й.

Здесь $\alpha_0=\beta_0=\alpha_N=\beta_N=\frac{1}{2}$, и после умножения на 2 уравнения (2.4) и (2.6) по структуре не отличаются от (2.5). В их правых частях стоят теперь выражения (2.I0) при $\nu=0$ и $\nu=N$.

Перенесем в (2.4) $\alpha_2^{(N)}$ в правую часть, обозначив $b_0=c_0-\alpha_2^{(N)}$, и добавим тождество $\alpha_2^{(0)}=\alpha_2^{(0)}=b_{-1}$. Тогда (2.9) принимает вид:

$$\alpha_2^{(i)}=\frac{1}{\zeta_1}\left[\zeta_{i+1}\alpha_2^{(0)}-\zeta_i\alpha_2^{(N)}+\sum_{\nu=0}^{i-1}\zeta_{i-\nu}c_\nu\right]\quad(i=0,\dots,N-1), \tag{2.I8}$$

$\alpha_2^{(0)}$ и $\alpha_2^{(N)}$ находятся из последнего уравнения (2.5) и уравнения (2.6) с учетом тождеств (2.I3) и

$$\zeta_k\zeta_\ell-\zeta_{k-1}\zeta_{\ell+1}=\zeta_1\zeta_{\ell-k+1} \tag{2.I9}$$

в виде

$$\alpha_2^{(0)}=\frac{\sum_{\nu=0}^{N}(\zeta_{N-\nu+1}+\zeta_\nu)c_\nu}{2(\zeta_1+\zeta_N+2\zeta_{N+1})};\quad \alpha_2^{(N)}=\frac{\sum_{\nu=0}^{N}(\zeta_{N-\nu}+\zeta_{\nu+1})c_\nu}{2(\zeta_1+\zeta_N+2\zeta_{N+1})}. \tag{2.20}$$

Выражения коэффициентов $\alpha_0^{(i)} = f_i$ и $\alpha_2^{(i)}$ $(i=0,\dots,N)$ вместе с формулами (2.2) и (2.3) дают явное представление кубического сплайна (2.I) через значения функции в узлах x_i и значения первых или вторых производных на концах. Из формул (2.I2), (2.I4), соответственно из (2.I6), (2.I7) или (2.I8), (2.20) можно вывести выражения для $2\alpha_2^{(i)}$, полученные в [I, § 2.4].

3. Свойства фундаментальных сплайнов

Задаче интерполирования, рассмотренной в п.2, соответствуют фундаментальные сплайны $v^k(x)$ $(k=0,\dots,N)$ и $v_\rho^0(x)$, $v_\rho^N(x)$ (ρ = I или 2), образующие базис для всех кубических сплайнов того или иного типа на сетке Δ [I,§2.7]. Они задаются условиями:

$$\left.\begin{aligned} &v^k(x_i) = \delta_{ki} \quad (k,i=0,\dots,N),\\ &[v^k(x_i)]^{(\rho)} = 0 \quad (i=0,N); \end{aligned}\right\} \tag{3.I}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_\rho^0(x_i) = 0,\ v_\rho^N(x_i) = 0 \quad (i=0,\dots,N),\\ &[v_\rho^0(x_i)]^{(\rho)} = (-1)^\rho\delta_{0i},\ [v_\rho^N(x_i)]^{(\rho)} = \delta_{Ni} \quad (i=0,N). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

В периодическом случае имеют смысл только функции $v^k(x)$ $(k=0,\dots,N)$, а $v_\rho^0(x) = v_\rho^N(x) = 0$.

Любой кубический сплайн выражается через фундаментальные формулой:

$$S(x) = S_k v^k(x) + S_0^{(\rho)} v_\rho^0(x) + S_N^{(\rho)} v_\rho^N(x), \tag{3.3}$$

где по индексам $k=0,\dots,N$ берется тензорная сумма.

При изучении свойств фундаментальных сплайнов $v^k(x)$ достаточно рассмотреть левые ветви $(x < x_k)$, так как в силу единственности определения сплайна условиями (3.I) и (3.2) можно менять нумерацию узлов (направление оси x) на обратную.

Начнем изучение со вторых производных $2\alpha_2^{(i)}$ (2.9). Согласно формуле (2.I0) для сплайна $v^k(x)$ только три компоненты c_ν отличны от нуля, а именно:

$$c_{k-1} = \frac{3}{h^2}, \quad c_k = -\frac{6}{h^2}, \quad c_{k+1} = \frac{3}{h^2}. \tag{3.4}$$

Поэтому в формулах (2.I2), (2.I6) и (2.I8), отвечающих трем типам сплайнов, суммы для $i \le k-1$ равны нулю.

Обозначим

$$\eta_i = \frac{\alpha_2^{(i)}}{\alpha_2^{(i+1)}} \tag{3.5}$$

и исследуем возможные случаи.

Тип I. Из (2.I2) и (2.8), учитывая, что $s_1 + s_2 = -4$, получим

$$\eta_i = \frac{\zeta_{i+1} + 2\zeta_i}{\zeta_{i+2} + 2\zeta_{i+1}} = s_1 \frac{s_1^{2i}+1}{s_1^{2i+2}+1} \quad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.6}$$

Так как $s_1 < 0$, то $\eta_i < 0$, и, следовательно, происходит чередование знаков у $\alpha_2^{(i)}$ $(i=k-1,\dots,0)$. Следовательно, модули $|\eta_i|$ убывают с ростом $i=0,\dots,k-2$: $|\eta_0| = \frac{1}{2}$, $|\eta_1| = \frac{2}{7}, \dots$, приближаясь к $|s_1| = 2-\sqrt{3} = 0{,}268$ справа. Следовательно, модули $|\alpha_2^{(i)}|$ убывают от точек x_{k-1} и x_{k+1} влево и вправо быстрее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем I/2.

Из (2.I3), (2.I4) и (3.4) имеем

$$\alpha_2^{(0)} = \frac{3}{h^2}\,\frac{\zeta_{N-k+1} - \zeta_{N-k-1}}{\zeta_N}.$$

Вследствие того, что

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sign}\zeta_\ell = \operatorname{sign}(s_1-s_2)(s_1^{\ell-1}+\dots+s_2^{\ell-1}) = \operatorname{sign}(-1)^{\ell-1},\\ &\operatorname{sign}(\zeta_{\ell+1}-\zeta_{\ell-1}) = \operatorname{sign}(s_1-s_2)(s_1^\ell+s_2^\ell) = \operatorname{sign}(-1)^\ell, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

то $\operatorname{sign}\alpha_2^{(0)} = \operatorname{sign}(-1)^{k+1}$. А это значит, по правилу чередования знаков, что $\operatorname{sign}\alpha_2^{(k-1)} = \operatorname{sign} 1$. Поскольку при изменении направления оси x на обратное вторая производная знака не меняет, то $\operatorname{sign}\alpha_2^{(k+1)} = \operatorname{sign} 1$. Но тогда можно показать, что $\alpha_2^{(k)} < 0$. Действительно, так как вторая производная сплайна на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ есть линейная функция, то неравенство $\alpha_2^{(k)} \ge 0$

означало бы, что она неотрицательна на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. Отсюда первая производная должна быть монотонно возрастающей на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. Поскольку функция $v^k(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$ получает положительное приращение, то, по крайней мере, в окрестности точки x_k первая производная больше нуля. Тогда функция должна возрастать и на $[x_k, x_{k+1}]$, в то время как она получает здесь отрицательное приращение. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Для фундаментальных сплайнов $v_1^0(x)$ и $v_1^N(x)$, отвечающих граничным условиям, отличны от нуля $c_0=-3/h$ или $c_N=3/h$. Закономерности в изменении $\alpha_2^{(i)}$ такие же, как и для функций $v^k(x)$, имеющих отличные от нуля значения $\alpha>0$ в точках x_0-h или x_N+h, соответственно.

Т и п II. Из (2.16) и (2.8) следует, что

$$\eta_i=\frac{\zeta_i}{\zeta_{i+1}}=s_1\frac{s_1^{2i}-1}{s^{2i+2}-1} \quad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.8}$$

Отсюда, как и для типа I, $\eta_i<0$, но только теперь $|\eta_i|$ растет с ростом i: $|\eta_0|=0$, $|\eta_1|=\frac{1}{4},\dots$, приближаясь к $|s_1|$ слева.

Из (2.17) имеем

$$\alpha_2^{(1)}=\frac{18}{h^2}\,\frac{\zeta_{N-k}}{\zeta_N},$$

и в соответствии с (3.7) $sign\,\alpha_2^{(1)}=sign\,(-1)^k$. Отсюда снова $\alpha_2^{(k-1)}>0$, $\alpha_2^{(k+1)}>0$ и $\alpha_2^{(k)}<0$. Закономерность в изменении $\alpha_2^{(i)}$ у фундаментальных сплайнов $v_2^0(x)$ и $v_2^N(x)$ такая же.

П е р и о д и ч е с к и й с л у ч а й. Из (2.18) следует, что

$$\eta_i=\frac{\zeta_{i+1}\alpha_2^{(0)}-\zeta_i\alpha_2^{(N)}}{\zeta_{i+2}\alpha_2^{(0)}-\zeta_{i+1}\alpha_2^{(N)}} \quad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.9}$$

На основании (2.13), (2.20) и (3.4) находим, что

$$\eta_N=\frac{\alpha_2^{(N)}}{\alpha_2^{(0)}}=\frac{\zeta_{N-k}+\zeta_{k+1}}{\zeta_{N-k+1}+\zeta_k}. \tag{3.10}$$

Так как в периодическом случае все фундаментальные сплайны одинаковы и получаются один из другого сдвигом по оси x на шаг h, то достаточно рассматривать какой-либо один из них.

а) Пусть N -нечетное число. Возьмем $k=(N+1)/2$. Тогда из (2.13) и (3.10), заменяя N на $2k-1$, находим $\eta_N=-2$, а из (3.9)

$$\eta_i=\frac{\zeta_{i+1}+2\zeta_i}{\zeta_{i+2}+2\zeta_{i+1}}=s_1\frac{s_1^{2i}+1}{s_1^{2i+2}+1} \quad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.11}$$

Это выражение совпадает с η_i для типа I (3.6). Наименьшее значение $|\alpha_2^{(i)}|$ достигается при $i=0$. Согласно (2.8), (2.13), (2.20) и (3.4)

$$\alpha_2^{(0)}=-\frac{9}{h^2}\,\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_{k-1}}{\zeta_1\zeta_k^2},$$

и в силу формул (3.7) $sign\,\alpha_2^{(0)}=sign\,(-1)^{k+1}$. Отсюда снова $\alpha_2^{(k-1)}>0$, $\alpha_2^{(k+1)}>0$ и $\alpha_2^{(k)}<0$.

б) Пусть N - четное число. Положим $k=N/2$. Тогда из (2.13) и (3.10) определяется $\eta_N=1$, а из (3.9)

$$\eta_i=\frac{\zeta_{i+1}-\zeta_i}{\zeta_{i+2}-\zeta_{i+1}}=s_1\frac{s_1^{2i+1}+1}{s_1^{2i+3}+1} \quad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.12}$$

Как и в предыдущих случаях, $\eta_i<0$, $|\eta_i|$ растут с ростом i: $|\eta_0|=\frac{1}{5}$, $|\eta_1|=\frac{5}{19},\dots$, приближаясь к $|s_1|$. Наименьшее значение $|\alpha_2^{(i)}|$ достигается при $i=0$ и $i=N$.

$$\alpha_2^{(0)}=\alpha_2^{(N)}=-\frac{3}{h^2}\,\frac{(\zeta_{k+2}-\zeta_k)-(\zeta_{k+1}-\zeta_{k-1})}{\zeta_1\zeta_{k+\frac{1}{2}}^2}.$$

Здесь $\zeta_{k+\frac{1}{2}}$ - мнимое число, и потому $sign\,\alpha_2^{(0)}=sign\,\alpha_2^{(N)}=sign(-1)^{k+1}$. Следовательно, как и ранее, $\alpha_2^{(k-1)}>0$, $\alpha_2^{(k+1)}>0$ и $\alpha_2^{(k)}<0$.

Итак, установлено

СВОЙСТВО I. Вторая производная фундаментального сплайна в узлах x_i подчиняется правилам:

а) $\alpha_2^{(i)} < 0$ для $i=k$;

б) $sign\,\alpha_2^{(i)} = sign(-\alpha_2^{(i+1)})$ $(i=0,\dots,N-1)$;

в) значения $|\alpha_2^{(i)}|$ убывают от точек x_{k-1} и x_{k+1} к концам отрезка в отношении η_i $(0<|\eta_i|\leqslant 0{,}5)$.

Исследуем далее поведение первой производной сплайна $v^k(x)$ в узлах. Из (2.2б)

$$\alpha_1^{(k-1)} = \frac{h}{3}(\alpha_2^{(k-2)} + 2\alpha_2^{(k-1)}),$$

и так как $\alpha_2^{(k-1)} > 0$, а $|\alpha_2^{(k-2)}| < \frac{1}{2}\alpha_2^{(k-1)}$, то $\alpha_1^{(k-1)} > 0$. При изменении направления оси x на обратное первая производная меняет знак, поэтому $\alpha_1^{(k+1)} < 0$

Обозначим

$$\xi_i = \frac{\alpha_1^{(i)}}{\alpha_1^{(i+1)}}. \tag{3.13}$$

Используя формулы (2.2), находим

$$\xi_i = -\frac{2\alpha_2^{(i)} + \alpha_2^{(i+1)}}{\alpha_2^{(i)} + 2\alpha_2^{(i+1)}} \qquad (i=0,\dots,k-2). \tag{3.14}$$

Знаки числителя и знаменателя совпадают со знаком $\alpha_2^{(i+1)}$, следовательно, $\xi_i < 0$, то есть имеет место чередование знаков и у $\alpha_1^{(i)}$.

Далее,

$$|\xi_i| = \frac{|\alpha_2^{(i+1)}| - 2|\alpha_2^{(i)}|}{2|\alpha_2^{(i+1)}| - |\alpha_2^{(i)}|} = \frac{1-2|h_i|}{2-|h_i|}. \tag{3.15}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для типов I и II последовательности $\{|\xi_i|\}$ и $\{|\eta_i|\}$ меняются местами. В периодическом случае при N нечетном картина такая же, как для типа I, а при N четном $|\xi_0| = \frac{1}{3}$, $|\xi_1| = \frac{3}{11}, \dots$, то есть $|\xi_i|$ приближается к $|s_1|$ справа.

СВОЙСТВО 2. Первая производная фундаментального сплайна подчиняется правилам:

а) $\alpha_1^{(k-1)} > 0$, $\alpha_1^{(k+1)} < 0$;

б) $sign\,\alpha_1^{(i)} = sign(-\alpha_1^{(i+1)})$ $(i \leqslant k-2,\ i \geqslant k+1)$;

в) значения $|\alpha_1^{(i)}|$ убывают от точек x_{k-1} и x_{k+1} к концам отрезка в отношении ξ_j $(0<|\xi_i|\leqslant 0{,}5)$.

ξ_i, как и η_i, можно вычислить для каждого i точно. Исключая концы отрезка, $|\xi_i| \approx |s_1|$ с точностью до 0,02.

Рассмотрим теперь приведение самих функций $v^k(x)$ $(v_p^0(x)$ и $v_p^N(x)$).

Из (2.I), учитывая (2.2) и (2.3), можно получить уравнения звеньев фундаментального сплайна в виде:

$$P_i^k(x-x_i) = (x-x_i)\left[\alpha_2^{(i)}(x-x_i)\left(1-\frac{x-x_i}{h}\right) + \alpha_1^{(i)}\left(1-\frac{(x-x_i)^2}{h^2}\right) + \frac{\delta_{k-1,i}}{h}\right] \tag{3.16}$$

$$(i=0,\dots,k-1).$$

По свойствам I и 2 $\alpha_1^{(i)}$ и $\alpha_2^{(i)}$ для $i \leqslant k-1$ одновременно положительны или отрицательны, причем $\alpha_1^{(k-1)} > 0$, $\alpha_2^{(k-1)} > 0$. Из (3.16) следует, что на всем интервале (x_{k-1}, x_k) $v^k(x) > 0$. На остальных интервалах (x_i, x_{i+1}) при $i < k-1$ знаки чередуются вместе со знаками коэффициентов $\alpha_1^{(i)}$ и $\alpha_2^{(i)}$ $(\delta_{k-1,i} = 0)$. Очевидно, подобным свойством функция $v^k(x)$ обладает и при $x > x_k$.

Функция $P_i^k(x-x_i)$ принимает на концах промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ при $i \leqslant k-2$ нулевые значения, и, следовательно, внутри него имеет экстремумы. Так как знаки первой и второй производных в узлах совпадают и чередуются, то, принимая во внимание, что вторая производная есть линейная функция, приходим к выводу о существовании только одной точки, в которой первая производная обращается в нуль. Значит, $P_i^k(x-x_i)$ имеет единственный экстремум и сохраняет знак внутри интервала (x_i, x_{i+1}). Нетрудно видеть, что на промежутке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ тоже существует только один экстремум (максимум).

Из (3.16) следует, что значения функции $P_i^k(x-x_i)$ в соответственных точках $z=x-x_i$ убывают по модулю с уменьшением номера i вместе с коэффициентами $\alpha_1^{(i)}$ и $\alpha_2^{(i)}$.Отношение значений на соседних интервалах меньше $\max(|\xi_i|, |\eta_i|)$.

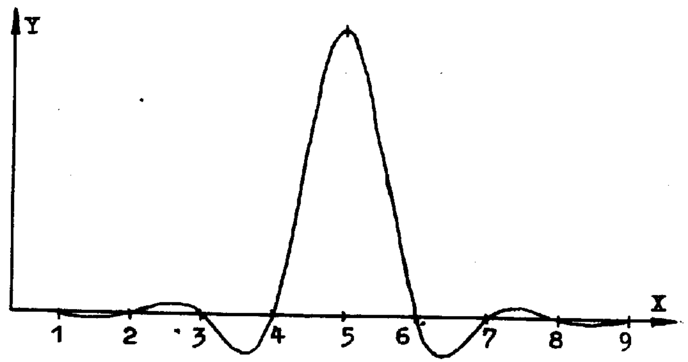
СВОЙСТВО 3. Фундаментальный сплайн подчиняется правилам:

а) $v^k(x)>0$ на (x_{k-1}, x_{k+1}) ;

б) $\mathrm{sign}\, P_i^k(x-x_i)=\mathrm{sign}(-P_{i+1}^k(x-x_{i+1}))$ $(i \leq k-2,\ i \geq k+1)$;

в) значения $|P_i^k(z)|$ убывают от $i=k-1$ и $i=k+1$ к концам отрезка быстрее, чем $\max(|\xi_i|, |\eta_i|)$.

Свойства фундаментальных сплайнов иллюстрируется рисунком, где изображен сплайн типа I.



Некоторые из отмеченных свойств для фундаментальных сплайнов типа I с неравноотстоящими узлами были установлены в работе [7]. В частности, было замечено правило чередования знаков у величин $\alpha_1^{(i)}$ и $\alpha_2^{(i)}$ и установлен закон убывания их модулей к концам отрезка в отношениях $|\xi_i| \leq \frac{1}{2}$, $|\eta_i| \leq \frac{1}{2}$. В рассмотренном здесь случае отношения ξ_i и η_i вычисляются точно. Свойства фундаментальных сплайнов на всей вещественной оси с узлами в целых точках можно вывести из результатов работы [4]. При этом в непериодическом случае отношения ξ_i и η_i в точности равны s_1.

Из изученных свойств сплайнов следует вывод о влиянии заданного интерполяционного условия только в ближайшей окрестности его узла.

Литература

1. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и её приложения. М., "Мир", 1972.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками (сплайнами). - "Вычислительные системы", Новосибирск, 1970, вып.38, с.23-73.

3. HOSKINS W.D., PONZO P.J. Explicit calculation of interpolating cubic splines on equi-distant knots. - "BIT" (Sver.), 1972, vol.12, N 1, p.54-62.

4. NILSON E. Cubic splines on uniform meshes. - "Commun. ACM", 1970, vol.13, N 4, p.255-258.

5. СУББОТИН Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными. Труды МИАН им.Стеклова, 1965, т.78, с.24-42.

6. РИОРДАН Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., ИЛЛ, 1963.

7. BIRKHOFF G., de BOOR C. Error bounds for spline interpolation. - "J.Math.Mech.", 1964, vol.13, N 5, p.827-835.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 мая 1973 г.