ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1973 год Выпуск 56

УДК 518.12

О ЧЕБЫШЕВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ*)

В.В. Филатов

В работе рассмотрен вопрос о существовании кубического сплайна [1], дающего чебышевское приближение непрерывной функции [2], и указан способ численного решения задачи нахождения такого сплайна. Эта проблема изучалась ранее в работе [3].

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сеть

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b. \qquad (1)$$

Мы будем искать кубический сплайн наилучшего приближения $S_\Delta^*(x)\in C^2[a,b]$ для функции $f(x)\in C[a,b]$ среди всевозможных сплайнов, определенных на сети (1) с краевыми условиями

$$S_\Delta''(a)=S_\Delta''(b)=0. \qquad (2)$$

Множество таких сплайнов образует конечномерное подпространство $\mathcal{S}_\Delta[a,b]\subset C[a,b]$, базис которого состоит из множества фундаментальных сплайнов [1] $\{e_i(x)\}_{i=0}^N$, определенных на Δ. Следовательно, мы можем для любой функции $f\in C[a,b]$ найти сплайн $S_\Delta^*\in\mathcal{S}_\Delta[a,b]$, такой что

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-S_\Delta^*(x)|=\inf_{S_\Delta\in\mathcal{S}_\Delta[a,b]}\ \max_{x\in[a,b]}|f(x)-S_\Delta(x)|. \qquad (3)$$

*) Заметка содержит часть результатов дипломной работы автора, выполненной в 1970 г. в Новосибирском госуниверситете под руководством доцента Ю.С. Завьялова.

Нетрудно показать, что множество фундаментальных сплайнов не образует системы Чебышева и, следовательно, решение поставленной задачи оказывается не единственным. Будем решать задачу не на всем $[a, b]$, а на некотором дискретном множестве:

$$\mathfrak{M} \ : a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_M^* = b.$$

С помощью метода, предложенного в [4], можно показать,что существует дискретное множество такой густоты, что задача на нем решается с любой наперед заданной точностью. Действительно, пусть $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| = M$ и ρ_0 – нижняя грань наименьшего уклонения $\rho = \inf\limits_{S_\Delta(x)} \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - S_\Delta(x)|$, где $S_\Delta(x)$ удовлетворяет условию $\|S_\Delta(x)\|_c < 2M$. Тогда на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$, согласно следствию из теоремы Маркова [4] будем иметь

$$|S'_\Delta(x)| \leqslant \frac{4n^2 M}{x_j - x_{j-1}} \leqslant \frac{36\,M}{h},$$

где $h = \min\limits_i \{|x_i - x_{i-1}|\}$, n – степень полинома, представляющего $S_\Delta(x)$ на (x_{i-1}, x_i) . В силу непрерывности первой производной это неравенство будет выполняться на всем $[a, b]$

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|x' - x''| < \delta_0 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon \rho_0}{2}.$$

Выберем

$$\delta < \min\left(\delta_0, \frac{\varepsilon \rho_0 h}{72 M}\right).$$

Тогда $|f(x') - S_\Delta(x') - f(x'') + S_\Delta(x'')| < \varepsilon\rho_0$, если $|x' - x''| < \delta$

В качестве $\mathfrak{M}$ можно теперь выбрать множество равноотстоящих друг от друга точек таких, что $|x_j^* - x_{j-1}^*| < \delta$. Пусть задача решена на множестве $\mathfrak{M}$, то есть сплайн $S_\Delta^*(x)$,для которого $\max\limits_{x \in \mathfrak{M}} |f(x) - S_\Delta^*(x)| = \rho^* \leq \delta$, построен.

Существует $x_0 (x_{j-1}^* \leq x_0 \leq x_j^*)$, на котором достигается $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - S_\Delta^*(x)|$. Тогда

$$\begin{aligned}\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_\Delta^*(x)| &= |f(x_0) - S_\Delta^*(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_0) - S_\Delta^*(x_0) - f(x_{j-1}^*) + S_\Delta^*(x_{j-1}^*)| + |f(x_{j-1}^*) - S_\Delta^*(x_{j-1}^*)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\rho_0 + \rho^* \leqslant \rho(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$S_\Delta^*(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \sigma_i(x),$$

где $\{\sigma_i(x)\}$ – система фундаментальных сплайнов для Δ . Для этого достаточно найти чебышевскую точку системы

$$\sum_{i=0}^{N} \sigma_i(x_j^*) \xi_i - f(x_j^*) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, M), \tag{4}$$

то есть точку $(\xi_0^*, \ldots, \xi_N^*)$ такую, что

$$\max_{x \in \mathfrak{M}} \left|\sum \sigma_i(x) \xi_i^* - f(x)\right| = \inf_{\{\xi_0, \ldots, \xi_N\}} \max_{x \in \mathfrak{M}} \left|\sum \sigma_i(x) \xi_i - f(x)\right|.$$

Тогда решение имеет вид

$$S_\Delta^*(x) = \sum_{i=0}^{N} \xi_i^* \sigma_i(x).$$

Для нахождения чебышевской точки системы (4) воспользуемся алгоритмом, предложенным в [5]. В нашем случае число итераций сокращается за счет выбора начальной точки, в качестве которой можно взять точку, состоящую из коэффициентов интерполяционного сплайна. Как известно, они равны просто значению функции f в узловых точках сети (I), то есть начальная точка есть $(f(x_0), \ldots, f(x_N))$. Алгоритм сводится к преобразованию таблицы

$$\begin{array}{c|ccccc|c|} & \xi'_0 & \xi'_1 & \cdots & \xi'_N & 1 & \\ & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_N & 1 & \\ \hline \eta_0 & a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0N} & c_0 & \eta_0(x') \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_M & a_{M0} & a_{M1} & \cdots & a_{MN} & c_M & \eta_M(x') \\ \hline \end{array} , \tag{5}$$

где ξ_i - независимые переменные $(i=0,1,\dots,N)$, η_j - зависимые переменные $(j=0,1,\dots,M)$.

В начале алгоритма $\xi_i = f(x_i) = \xi_i'$, $c_j = f(x_j^*)$,

$$a_{ij} = \sigma_i(x_j^*), \quad \eta_j(x') = \left|\sum \sigma_i(x_j^*)\xi_i' - f(x_j^*)\right| = \eta_j,$$
$$(i=0,1,\dots,N; \quad j=0,1,\dots,M).$$

Рядом жордановых исключений мы перебрасываем на верх таблицы те η_j, для которых $\eta_j(x')$ максимально, тем самым превращая их в независимые переменные, а соответствующие ξ_i - в зависимые, имея, таким образом, запись ξ_i в новых координатах.

Когда все максимальные η_j переброшены, двигаемся от начальной точки так, чтобы, сохраняя равенство между максимальными уклонениями η_j, уменьшить их настолько, чтобы они сравнялись еще с одним или несколькими η_j. Двигаемся до тех пор, пока не натолкнемся на точку, называемую стационарной. Под ребром размерности $N=z+1$ понимается линейное многообразие, удовлетворяющее z уравнениям, которые получаются, если приравнять 0 любые z линейно независимых из максимальных η_j. Согласно способу, изложенному в [5], двигаясь из стационарной точки по некоторому ребру, приближаются к искомой точке и достигают ее за конечное число шагов.

Литература

1. АЛБЕРГ Дж, НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

2. АХИЕЗЕР Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., "Наука", 1965.

3. ESCH R.E., EASTMAN W.L. Computational methods for best spline function approximation. - "J.Approxim. Theory", 1969, vol. 2, N 1, p.85-96.

4. ЗУХОВИЦКИЙ С.И. Алгоритм для решения чебышевской задачи приближения в случае конечной системы несовместных линейных уравнений. -ДАН СССР, 1951, т. 79, № 4, с. 561-564.

5. ЗУХОВИЦКИЙ С.И. О новой численной схеме алгоритма для чебышевского приближения несовместной системы линейных уравнений. -ДАН СССР, 1961, т. 139, № 3, с. 534-537.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 апреля 1973 года