

УДК 518:517.949.12

СТАНДАРТНЫЕ ПРОГРАММЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ  
КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ДЛЯ ЭВМ "МИНСК-2(22)"

Г.Н. Кулиш

Приводятся две стандартные программы, составленные по алгоритму, изложенному в [1, § 1,2]. Первая программа определяет коэффициенты интерполяционного кубического сплайна  $y = S(x)$ , а вторая вычисляет значения функции и её двух первых производных  $S'(x)$  и  $S''(x)$  в заданной точке.

§ 1. Определение коэффициентов  
интерполяционного кубического сплайна

1. Алгоритм. Уравнения звеньев кубического сплайна  $S(x)$  на  $[x_0, x_N]$  имеют вид:

$$P^{(i)}(x) = \sum_{\lambda=0}^3 a_{\lambda}^{(i)}(x-x_1)^{\lambda} \quad (i = 0, 1, \dots, N-1).$$

Требуется построить сплайн, интерполирующий функцию  $f(x)$  на  $[x_0, x_N]$ , то есть  $S(x_i) = f(x_i)$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ), и удовлетворяющий на каждом из концов одному из условий следующего типа:

I:  $S'(x_1) = f'(x_1)$  ( $i = 0$  или  $N$ );

II:  $S''(x_1) = f''(x_1)$  ( $i = 0$  или  $N$ );

III:  $S''(x_1) = f''(x_1)$   $x_1 = x_0 - h_0$  или  $x_1 = x_N + h_{N-1}$ ,

где  $h_1 = x_{i+1} - x_i$ ;

IV: если функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $X = x_N - x_0$ ,

то

$$S'(x_0) = S'(x_N), \quad S''(x_0) = S''(x_N).$$

Тогда условия непрерывности функции  $S(x)$  и её производных  $S'(x)$  и  $S''(x)$  сводятся к системе уравнений для определения  $a_2^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ):

$$\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} a_2^{(i-1)} + 2a_2^{(i)} + \frac{h_i}{h_{i-1}+h_i} a_2^{(i+1)} = f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}), \quad (I)$$

$i = 1, \dots, N-1$ ,  
а условия на концах  $x_0, x_N$  к уравнениям:

тип I  $2a_2^{(0)} + a_2^{(1)} = \frac{3[f(x_0; x_1) - f'(x_0)]}{h_0},$

$$a_2^{(N-1)} + 2a_2^{(N)} = \frac{3[f'(x_N) - f(x_{N-1}; x_N)]}{h_{N-1}}; \quad (2.I)$$

тип II  $2a_2^{(0)} = f''(x_0),$   
 $2a_2^{(N)} = f''(x_N); \quad (2.II)$

тип III  $2a_2^{(0)} - a_2^{(1)} = \frac{1}{2} f''(x_0 - h_0),$   
 $-a_2^{(N-1)} + 2a_2^{(N)} = \frac{1}{2} f''(x_N + h_{N-1}); \quad (2.III)$

тип IV  $2a_2^{(0)} + \frac{h_0}{h_{N'}+h_0} a_2^{(1)} + \frac{h_{N'}}{h_{N'}+h_0} a_2^{(N')} = 3f(x_{-1}; x_0; x_1), \quad (2.IV)$

$$\frac{h_{N'}}{h_{N'}-1+h_{N'}} a_2^0 + \frac{h_{N'}-1}{h_{N'}-1+h_{N'}} a_2^{(N'-1)} + 2a_2^{(N')} = 3f(x_{N'-1}; x_{N'}; x_{N'+1}),$$

где  $f(x_{i-1}; x_i)$  и  $f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$  - соответственно первая и вторая разделенные разности;  $N' = N - 1$ .

Программа анализирует характер граничных условий и выбирает соответствующие уравнения типа I-IV, которые добавляются к уравнениям (I). Полученная система решается методом прогонки. Три набора чисел  $\{x_i\}, \{f(x_i)\}$  и  $\{a_2^{(i)}\}$  ( $i=0, 1, \dots, N$ ) достаточны для определения функции  $S(x)$ , так как остальные коэффициенты находятся по формулам:

$$a_3^{(1)} = \frac{a_2^{(1+1)} - a_2^{(1)}}{3h_1},$$

$$a_1^{(i)} = f(x_i; x_{i+1}) - \frac{2}{3} a_2^{(i)} h_1 - \frac{1}{3} a_2^{(i+1)} h_1, \quad (3)$$

$$a_0^{(i)} = f(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, N'-1).$$

Погрешность интерполяции можно оценить по формулам, полученным в [1, §4].

2. Краткая характеристика СП (стр.187).  
Обращение к СП должно иметь следующий вид:

K) - 3I 00 AN 00I7 ,  
K+I) N-1 <x>-I0000 ,  
K+2) 0000 <y>-1 T .

Здесь AN - начальный адрес СП; <x>, <y> - начала соответственно массивов {x<sub>i</sub>}, {y<sub>i</sub>}; T - начало рабочего поля программы, N-1 - число узлов интерполяции.

Узлы x<sub>i</sub> должны быть расположены в возрастающем порядке, значения y<sub>i</sub>=f(x<sub>i</sub>) соответственно им. В зависимости от типа граничных условий в ячейки <x>-1 и <x>+N+1 должны быть помещены соответствующие признаки:

I тип - 0000 00000 0000  
II тип - I000 0000 0000  
III тип - 2000 0000 0000  
IV тип + 0000 0000 0000

Значения производных на концах Γ<sup>p</sup> (p=1, 2) в случаях I-III помещаются в ячейке <y>-1 и <y>+N+1 соответственно; в случае IV содержимое этих ячеек безразлично. Вся информация в массивах {x<sub>i</sub>}, {y<sub>i</sub>} и граничные условия должны быть представлены в двоичном коде с плавающей запятой.

Значения интерполяционных коэффициентов a<sub>2</sub><sup>(i)</sup> размещаются в ячейках, начиная с T до T + N. СП занимает 173 ячейки памяти, использует стандартные рабочие ячейки 0040-0045, индексные ячейки 00I4-00I6, рабочее поле в 3 (N+2) ячейки, начиная с адреса T. Изменяемая часть программы с AN по AN+0I57; неизменяемая часть с AN+0I60 по AN+0I72.

Время работы программы t оценивается следующим образом:  
0,9 N 10<sup>4</sup> мксек ≤ t ≤ 1,2 N 10<sup>4</sup> мксек.

Если x<sub>i</sub> и f(x<sub>i</sub>) имеют относительные погрешности соответственно δx и δf, то относительная погрешность не превосходит N<sup>2</sup> (δx + δf).

## § 2. Вычисление значений кубического сплайна и его двух первых производных

I. Алгоритм. Кубический сплайн S(x) задан на [x<sub>0</sub>, x<sub>N</sub>] тремя массивами чисел: {x<sub>i</sub>}, {y<sub>i</sub>} и {a<sub>2</sub><sup>(i)}</sup> (i=0, ..., N). В точке x=x\* требуется вычислить S(x\*), S'(x\*) и S''(x\*).

Программа определяет, на каком из промежутков [x<sub>i</sub>, x<sub>i+1</sub>] находится точка x=x\*. По формулам (3) вычисляются значения коэффициентов a<sub>0</sub><sup>(i)</sup>, a<sub>1</sub><sup>(i)</sup>, a<sub>3</sub><sup>(i)</sup>. Значения кубического сплайна и его производных вычисляются по формулам:

$$S(x^*) = \sum_{\lambda=0}^3 a_{\lambda}^{(i)} (x^* - x_i)^{\lambda},$$

$$S'(x^*) = \sum_{\lambda=1}^3 \lambda a_{\lambda}^{(i)} (x^* - x_i)^{\lambda-1},$$

$$S''(x^*) = \sum_{\lambda=2}^3 \lambda(\lambda-1) a_{\lambda}^{(i)} (x^* - x_i)^{\lambda-2}$$

2. Краткая характеристика программы (см. стр.191). Обращение к СП должно иметь следующий вид:

K) -3I00 AN 00I7  
K+I) N-1 <x> 0000  
K+2) 0000 <y> <a<sub>2</sub>> ,

где AN - начальный адрес СП, <x>, <y>, <a<sub>2</sub>> - начала массивов {x<sub>i</sub>}, {y<sub>i</sub>}, {a<sub>2</sub><sup>(i)</sup>} соответственно, указываемое в МОЗУ-I. Массив {x<sub>i</sub>} должен быть расположен в возрастающем порядке, массивы {y<sub>i</sub>} и {a<sub>2</sub><sup>(i)</sup>} - соответственно ему. Вся информация в этих массивах должна быть представлена в двоичном коде с плавающей запятой.

Значение x\* заносится в ячейку 0040. Значения S(x\*), S'(x\*) и S''(x\*) получаются в ячейках 004I, 0042 и 0043 соответственно. После работы СП значение x\* сохраняется в ячейке 0040.

СИ занимает 60 ячеек памяти и использует стандартные рабочие ячейки 0040 - 0046 и индексные ячейки 0014 - 0016.

При  $x^* < x_0$  или  $x^* > x_N$  происходит останов по команде -00 СЧАК АН+0017.

Изменяемая часть программы с АН по АН+0052, неизменяемая часть с АН+0053 по АН+0057.

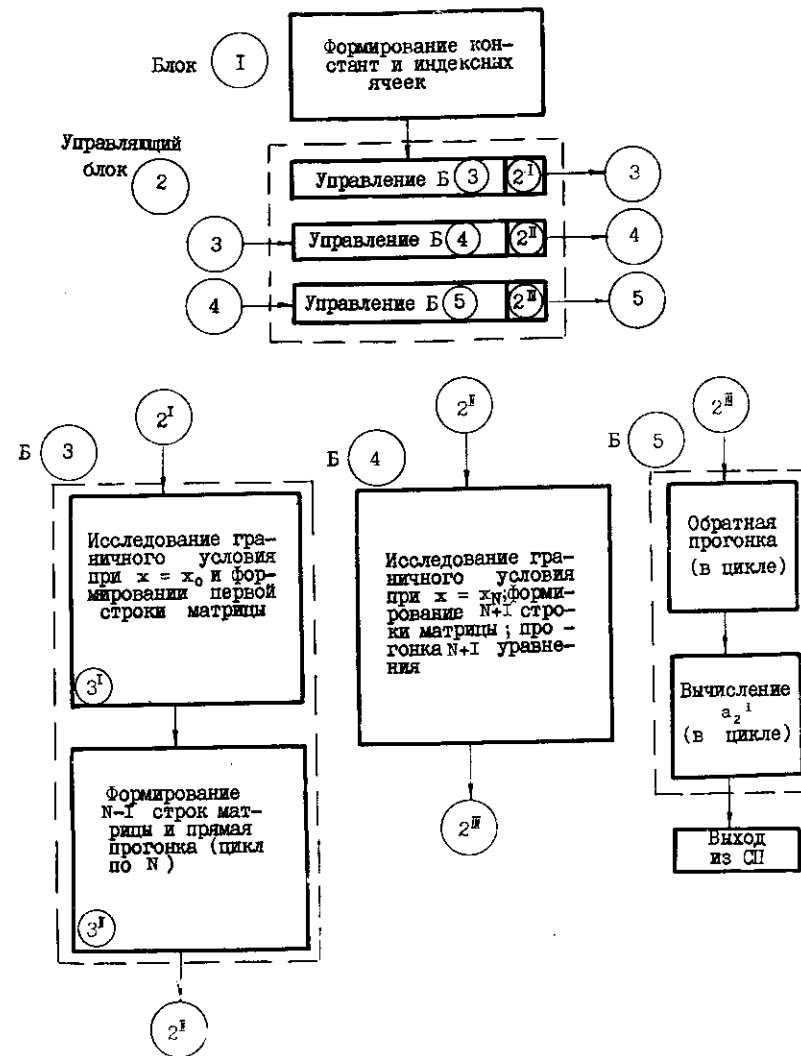
Время работы программы оценивается неравенством  $0,9 N 10^3 \text{ мксек} \leq t \leq 1,2 N 10^3 \text{ мксек}$ .

Если коэффициенты  $a_2^{(i)}$  вычислены по стандартной программе интерполирования сплайнами, то относительные погрешности  $S(x^*)$ ,  $S'(x^*)$  и  $S''(x^*)$  практически не превосходят  $\delta a_2$ .

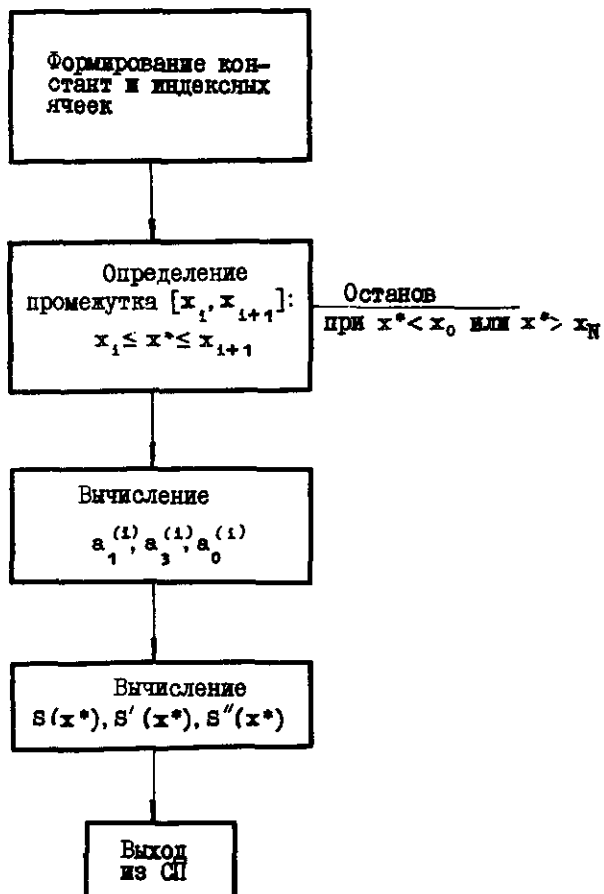
### Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвеньевыми. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 3-73.

Поступила в ред.-изд.отд.  
13 декабря 1973 года



БЛОК-СХЕМА 2



СТАНДАРТНАЯ ПРОГРАММА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ КРИВОЙ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	A1	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06000	-10 I7	0000	00I4	$i_1: N-1, \langle x \rangle -1,0000$
06001	72 00	6I57	0045	$r_5: N-1, 0000,0000$
06002	I2 I7	000I	00I6	
06003	72 00	6I72	00I5	$i_2: 0000, \langle y \rangle -1,0000$
06004	20 00	00I5	00I6	$i_3: N-1,0000, T$
06005	I3 00	6I66	0II4	
06006	62 00	6005	004I	$r_1: 0000, N, 0000$
06007	-10 I6	6I63	0000	$T+0: A_{-1} = 1$
06010	-10 I6	6I62	000I	$T+1: B_{-1} = 0$
06011	-10 I6	6I62	0002	$T+2: D_{-1} = 0$
06012	-3I 00	6I20	6I20	ПУ НА Б (3)
06013	-20 I6	6067	6I70	ЦИКЛ ПО $i = 1, 2, \dots, N-1$
06014	-3I 00	6042	6I20	ПУ НА Б (4)
06015	-30 00	6I22	0000	ПУ НА Б (5)
06016	05 I4	0000	0000	$\langle x \rangle -1$ - ПРИЗНАК?
06017	-32 00	6020	6026	Б (3)
06020	I0 00	004I	00I4	$i_1: N-1, \langle x \rangle + N-1,0000$
06021	I0 00	004I	00I5	$i_2: 0000, \langle y \rangle + N-1,0000$
06022	-3I 00	606I	6066	
06023	20 00	004I	00I4	$i_1: N-1, \langle x \rangle -1,0000$
06024	20 00	004I	00I5	$i_2: 0000, \langle y \rangle -1,0000$
06025	-30 00	6070	0000	ПУ НА Б (3)
06026	-10 00	6I62	0040	$r_0: 0$
06027	05 I4	0000	0000	$\langle x \rangle -1$ - ПРИЗНАК?
06030	-34 00	6033	603I	
06031	-10 I5	0000	0043	$r_3: 0$
06032	-30 00	6070	0000	ПУ НА Б (3)
06033	-10 I5	0000	0044	$r_4: y_0, \frac{1}{2} y_{-1}$
06034	7I I4	0000	6I6I	
06035	-34 00	6040	6036	
06036	-10 00	6I62	004I	$r_1: 0$
06037	-30 00	6I04	0000	ПУ НА Б (3)

\*) См. блок-схему I.

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	AI	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06040	-II 00	6I63	004I	$r_1: -1$
0604I	-30 00	6I04	0000	ПУ НА Б (3 <sup>n</sup> )
06042	05 I4	0002	0000	$\langle x_N \rangle + 1$ - ПРИЗНАК Б (4)
06043	-32 00	6I2I	6044	
06044	IO 00	6I70	00I6	$i_3: 0000, 0000, T + 3N$
06045	-IO 00	6I62	004I	
06046	-IO I5	0002	0044	$r_4: y'_N$ ИЛИ $y''_N$ ИЛИ $\frac{1}{2}y''_{N+1}$
06047	05 I4	0002	0000	$\langle x_N \rangle + 1$ - ПРИЗНАК?
06050	-34 00	6053	605I	
0605I	-3I 00	606I	6066	
06052	-30 00	6075	0000	
06053	7I I4	0002	6I6I	
06054	-34 00	6057	6055	
06055	-IO 00	6I62	0040	$r_0: 0$
06056	-30 00	6I04	0000	
06057	-II 00	6I65	0040	$r_0: -1$
06060	-30 00	6I04	0000	
0606I	05 I4	000I	0000	
06062	26 I4	0000	0040	$r_0: h_{i-1}$ Б (3 <sup>n</sup> )
06063	05 I5	000I	0000	
06064	27 I5	0000	0000	
06065	46 00	0040	0043	$r_3: f(x_{i-1}, x_i)$
06066	+00 00	0000	0000	ЯОС
06067	-3I 00	606I	6066	
06070	05 I4	0002	0000	
0607I	26 I4	000I	004I	$r_i: h_i$
06072	05 I5	0002	0000	
06073	27 I5	000I	0000	
06074	46 00	004I	0044	$r_4: f(x_i, x_{i+1})$
06075	I5 00	0040	004I	
06076	06 00	0000	0042	$r_2: h_{i-1} + h_i$
06077	25 00	0043	0044	

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	AI	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06I00	47 00	0042	0000	
06I0I	36 00	6I65	0044	$r_4: q_i$
06I02	44 00	0042	0040	$r_0: \alpha_i$
06I03	44 00	0042	004I	$r_1: \beta_i$
06I04	35 I6	0040	000I	
06I05	I6 00	6I64	0042	
06I06	-II 00	0042	0042	$r_2: -(2 + \alpha_i \beta_{i-1})$
06I07	35 I6	0040	0000	
06IIO	46 I6	0042	0003	$T+i+3: A_i$
06III	45 00	0045	004I	
06I12	06 I6	0000	0004	$T+i+4: B_i$
06I13	35 I6	0040	0002	
06I14	27 00	0044	0000	
06I15	46 I6	0042	0005	$T+i+5: D_i$
06I16	IO 00	0I67	00I4	$i_1: N-1, \langle x \rangle + i, 0000$
06I17	IO 00	6I67	00I5	$i_2: 0000, \langle y \rangle + i, 0000$
06I20	+00 00	0000	0000	ЯОС
06I2I	20 00	6I66	0045	$r_5: N-2, 0000, 0000$ Б (5)
06I22	20 00	6I70	00I6	$i_3: 0000, 0000, T+3(N-1)$
06I23	62 00	6I40	00I4	
06I24	I3 00	00I6	00I4	
06I26	I2 00	0045	00I6	$i_3: N-1, T+3(N-1), T+3(N-1)$
06I26	I4 I6	0003	0004	$[T+3(N-1)]: q_{N-1}$
06I27	35 I6	0005	000I	
06I30	I6 I6	0002	0002	$[T+3(N-1)]+2: p_j$
06I3I	35 I6	0004	000I	
06I32	I6 I6	0000	000I	$[T+3(j+1)]+1: q_j$
06I33	-20 I6	6I27	6I6I	ЦИКЛ ПО $j = N-2, \dots, 0, -1$
06I34	7I 00	6I60	00I6	
06I35	I2 00	00I4	00I4	$i_1: 0000, T+3(N-1), T$
06I36	IO 00	0045	00I6	$i_3: N-1, T, T$
06I37	35 I4	0007	0004	

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	A1	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06I40	I7 I4	0006	00I4	
06I4I	26 00	6I60	0040	$r_0: B_{N-0} + A_{N-1}$
06I42	35 I4	0007	0005	
06I43	I7 I4	00I0	0000	
06I44	46 00	0040	0040	$r_0: -a_2^{(N)}$
06I45	-II 00	0040	0000	
06I46	37 I6	0004	0000	
06I47	I6 I6	0005	0000	$[T+1]: a_2^{(i)} = p_1 + q_1 a_2^{(N)}$
06I50	-20 I6	6I45	6I7I	ЦИКЛ ПО $i = 0, 1, \dots, N-1$
06I5I	70 00	6I60	00I6	$i_3: 0000, 0000, T+N-1$
06I52	-II I6	0040	000I	$[T+N]: a_2^{(N)}$
06I53	60 00	6I40	00I4	$i_1: T+3(N-1), T, 0000$
06I54	I0 00	00I6	00I4	$i_1: T+3(N-1), T, T+N-1$
06I55	-I0 I4	0000	0002	
06I56	-30 I7	0002	0000	ВЫХОД ИЗ ЦИ
06I57	77 77	0000	0000	
06I60	00 00	0000	7777	КОНСТАНТЫ
06I6I	20 00	7775	7775	
06I62	00 00	0000	0I77	
06I63	40 00	0000	000I	
06I64	40 00	0000	0002	
06I65	60 00	0000	0002	
06I66	00 0I	0000	0000	
06I67	00 00	000I	0000	
06I70	00 00	0000	0003	
06I7I	00 00	0003	000I	
06I72	00 00	7777	0000	
06I73	00 00	0000	0000	
06I74	00 00	0000	0000	
06I75	00 00	0000	0000	
06I76	00 00	0000	0000	
06I77	00 00	0000	0000	

СТАНДАРТНАЯ ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ  
 $s(x^*), s'(x^*), s''(x^*)$  КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	A1	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06000	-I0 I7	0000	00I4	$i_1: N-1, (x), 0000$
0600I	73 00	6053	0000	
06002	I2 I7	000I	00I6	$i_3: N-1, (y), T$
06003	72 00	6057	00I5	$i_2: 0000, (y), 0000$
06004	20 00	00I5	00I6	$i_3: N-1, 0000, T$
06005	25 I4	0000	0040	
06006	06 00	0000	004I	$r_1: x^* - x_i$
06007	-32 00	60I0	60I6	
060I0	25 I4	000I	0040	
060II	-34 00	60I2	60I7	
060I2	-32 00	60I3	60I7	
060I3	I0 00	6056	00I4	$i_1: N-1, (x)+1, 0000$
060I4	I0 00	6056	00I5	$i_2: 0000, (y)+1, 0000$
060I5	-20 I6	6005	6053	$\emptyset$ ПО $i = 0, 1, \dots, N-1$
060I6	-00 00	0000	0000	
060I7	05 I4	000I	0000	
06020	26 I4	0000	0043	$r_3: h_i$
0602I	05 I6	0000	0000	
06022	06 00	0000	0045	$r_5: a_2^{(i)}$
06023	36 00	6054	0044	$r_4: 2a_2^{(i)}$
06024	I5 I6	0044	000I	
06025	37 00	0045	0000	
06026	46 00	6055	0044	$r_4: \frac{1}{3} (2a_2^{(i)} + a_2^{(i+1)}) h_i$
06027	05 I5	0000	0000	
06030	27 I5	000I	0000	
0603I	47 00	0043	0000	
06032	I6 00	0044	0044	$r_4: -a_1^{(i)}$
06033	25 I6	0045	000I	
06034	46 00	0043	0046	$r_6: 3a_3^{(i)}$
06035	37 00	004I	0000	
06036	I6 00	0045	0042	$r_2: 3a_3^{(i)}(x^* - x_i) + a_2^{(i)}$
06037	36 00	6054	0043	$r_3: s''(x^*)$

АДРЕС ЯЧЕЙКИ	КОД ОПЕРАЦИИ	A1	A2	ПОЯСНЕНИЯ
06040	15 00	0045	0042	
06041	37 00	0041	0000	
06042	26 00	0044	0042	$r_2: S'(x^*)$
06043	35 00	0041	0046	
06044	47 00	6055	0000	
06045	17 00	0045	0000	
06046	37 00	0041	0000	
06047	27 00	0044	0000	
06050	37 00	0041	0000	
06051	16 15	0000	0041	$r_1: S(x^*)$
06052	-30 17	0002	0000	ВЫХОД ИЗ СП
06053	77 77	0000	0001	] КОНСТАНТЫ
06054	40 00	0000	0002	
06055	60 00	0000	0002	
06056	00 00	0001	0000	
06057	00 00	7777	0000	