ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1974 год Выпуск 60

УДК 681.142.1.01:681.142.2:681.142.003

ПРОСТЕЙШИЕ СТРУКТУРЫ ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.А.Воробьев

Исследуется алгебраическая структура широкого класса конечных однородных сетей, допускающих простейшее параметрическое описание: рассматриваются их групповая классификация, абсолютная и относительная адресации элементов, изоморфизм. Даются ручной алгоритм перебора всех классов изоморфизма и эвристический метод их сокращенного перебора при поиске оптимальных двумерных структур однородных вычислительных систем (ОВС) [1].

1. В работе [2] предложена программа исследования структур однородных вычислительных систем. Приведены математическая модель структуры и ряд её характеристик, сформулированных в терминах теории осуществимости [3]. Выделен класс КАИС-структур, подлежащих первоочередному изучению, и приведены некоторые предварительные результаты. Настоящая статья выполнена в рамках той же программы, что освобождает автора от необходимости приводить длинный ряд определений и ссылок.

Цель работы – исследование некоторых классов КАИС-структур, допускающих простое параметрическое описание. Сюда входят:

1) групповая классификация;

2) выбор образующих групп автоморфизмов, обеспечивающий изоморфизм структуры и диаграммы Кэли для групп автоморфизмов;

3) параметрические описания структур менее общие, чем определяющие соотношения групп автоморфизмов, но простые и удобные для проектирования и программирования;

4) алгебраическая интерпретация абсолютной и относительной адресации элементов структуры.[4];

5) установление абсолютной адресации, обладающей полезными для программирования ОВС свойствами;

6) критерии изоморфизма простейших структур;

7) перебор всех классов изоморфизма;

8) выбор структуры минимального диаметра, обладающей согласно [2] высокой живучестью.

2. Рассмотрим КАИС-структуры ОВС, представляющие собой n-мерные евклидовы решетки с замкнутыми границами. Группа автоморфизмов E_n такой структуры представляет собой прямое произведение циклических подгрупп C_{ℓ_i} :

$$E_n = \bigotimes_{i=0}^{n-1} C_{\ell_i} ,$$

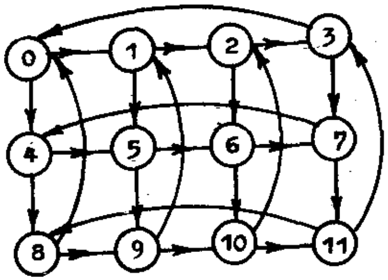

Рис.I. E_n-граф $C_3 \otimes C_4$

где ℓ_i – порядок i-й подгруппы; $\otimes$ – символ прямого произведения.

Будем называть такие структуры (рис.I) п р я м ы м и или E_n -графами. Число вершин или (ЭМ) E_n -графа есть $N = \prod_{i=0}^{n-1} \ell_i$.

Частными случаями E_n -графа являются п р а в и л ь н ы е E_n-графы, для которых $\ell_i = \ell$ при всех i , то есть порядки всех n образующих равны. Правильные E_n -графы, у которых $\ell = 2$, образуют n - мерный булевский куб и называются P_n-графами [I] (рис.2). В этом случае два ребра, соединяющие соседние вершины, вырождаются в одно.

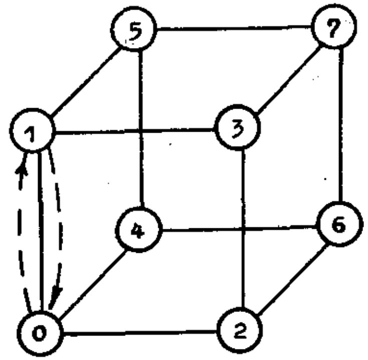

Рис.2. P_n-граф, $n = 3$

Отметками ребер E_n -графа являются символы образующих α_i нормальных циклических подгрупп C_{ℓ_i} группы E_n . Введем на ребрах E_n-графа положительное направление (направление стрелки на рис.I), которое соответству-

ет перемещению номера k при преобразовании структуры элементом $\alpha_i \in E_n$, и отрицательное – при обратном преобразовании $\alpha_i^{-1} \in E_n$.

Естественно, что при $\ell = 2$ оба направления по вырожденному ребру окажутся положительными (см. рис.2). Стрелка в этом случае отсутствует. Введенная таким образом асимметрия фиксирует лишь направление отсчета элементов структуры и никак не касается передач информации (напомним, что КАИС-структуры симметричны и изотропны).

Принятый способ изображения структуры E_n -графа приводит к полному её совпадению с диаграммой Кэли для группы E_n . Это позволяет нам в дальнейшем отождествить группу и структуру, образующую и связь, слово в группе и путь в графе структуры.

Параметрическое описание прямой структуры задается множеством чисел $\{ \ell_i / i = 0, 1, \ldots, n-1 \}$. В случае правильных E_n -графов достаточно два числа: N – число ЭМ и ℓ – порядок образующей или n -размерность и ℓ . P_n -граф однозначно задается числом n .

Максимальное расстояние между элементами прямой структуры, то есть её диаметр, есть

$$d = \sum_{i=0}^{n-1} \left] \frac{\ell_i}{2} \right[,$$

где $]x[$ – целая часть x . Частные случаи не менее очевидны.

Любая нумерация элементов структуры ОВС называется а б с о л ю т н о й а д р е с а ц и е й ЭМ.

Пусть ϑ_{ij} – автоморфизм, переводящий абсолютный адрес i в j . Набор степеней (в том числе и нулевых) всех образующих, входящих в слово ϑ_{ij} , называется о т н о с и т е л ь н ы м а д р е с о м $X_{ij} = \{ x_0^{ij}, x_1^{ij}, \ldots, x_{n-1}^{ij} \}$ элемента j относительно i . Очевидно, что если

$$(x_k^{ij})' = x_k^{ij} \pm t \ell_k ,$$

где $t = 0, I, \ldots$, то соответственно и $\vartheta'_{ij} = \vartheta_{ij}$. Отсюда

$$X_{ij} = \{ \bar{x}_0^{ij}, \bar{x}_1^{ij}, \ldots, \bar{x}_{n-1}^{ij} \} ,$$

где $\bar{x}_k^{ij}$ – класс x_k^{ij} по модулю ℓ_k .

Каждая компонента x_k^{ij} есть число дуг, помеченных именем k-й образующей группы E_n и входящих в кратчайший путь из вершины i в вершину j.

Понятие относительной адресации используется в [4] для аппаратурной организации коммутаций в E_n - графах. Очевидно, что для P_n - графов X_{ij} вырождается до булевского вектора и аппаратура, предлагаемая в [4], окажется предельно простой.

Естественно найти такой способ абсолютной адресации ЭМ, чтобы существовала явная и простая связь между адресами i и j и компонентами X_{ij}. Назовем е в к л и д о в о й такую адресацию, при которой номер i-го элемента однозначно фиксируется выбором нулевого элемента и указанием относительного адреса X_{0i} элемента i так, что

$$i = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_k^{0i} \prod_{\tau=0}^{k} \ell_{\tau-1} \right),$$

где x_k^{0i} - минимальный положительный вычет класса $\bar{x}_k^{0i}$ по модулю ℓ_k, а $\ell_{-1} = 1$.

Короче, относительный адрес X_{0i} есть представление е в к л и д о в а абсолютного адреса в позиционной системе счисления с набором оснований $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}\}$. В правильных E_n - графах получаются обычные позиционные системы с основанием ℓ.

Обратное преобразование, то есть вычисление X_{0i} по заданному евклидову адресу i, делается переводом числа i в систему счисления с основанием ℓ или набором оснований. Для этого число i, а далее его очередные частные последовательно делятся на $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_{n-1}$. Остатки от деления на ℓ_k есть x_k^{0i} - к о о р д и н а т ы i-го элемента.

Компоненты относительного адреса X_{ij} получаются по формуле:

$$x_k^{ij} = x_k^{0j} - x_k^{0i}.$$

В качестве представителя класса $\bar{x}_k^{ij}$ по модулю ℓ_k естественно выбирать минимальный по абсолютной величине вычет.

Интересно, что если последовательно перебирать евклидовы адреса i от 0 до $N-1$ и вычислять для них X_{0i}, то получится та же последовательность координат x_k^{0i}, которая имеет место в программировании при аналогичном переборе многомерных массивов с помощью вложений циклов в циклы. Это обстоятельство позволяет легко задавать евклидову адресацию элементов E_n - графа (рис.1).

Изоморфные E_n -графы имеют одинаковые параметры. Столь же тривиален и способ перебора E_n - графов для заданного N. Пусть $N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_\tau^{\alpha_\tau}$ - каноническое разложение числа N. Единственный одномерный E_n -граф имеет параметры $\ell = N$. Двумерных E_n -графов столько, сколько делителей числа N. Перебирая делители уже найденных $\{\ell_0^k, \ell_1^k\}$ для всех k и исключая повторяющиеся ситуации, найдем все трехмерные структуры и так далее, пока не получим единственную структуру максимальной размерности $n = \sum_{s=1}^{\tau} \alpha_s$.

3. Рассмотрим класс структур, определяемый следующим построением.

Пусть все N вершин пронумерованы, а i - абсолютный адрес $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

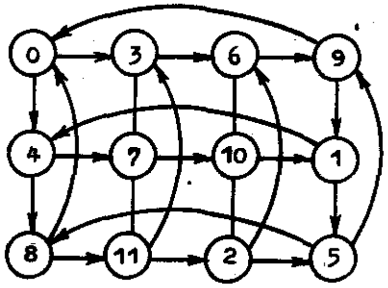

Рис.3. $\mathcal{D}_n$-граф {12;3;4}

Симметричная связь с отметкой s_k, где s_k - положительное целое, соединяет два элемента i и j, если и только если

$$(j - i) = s_k \pmod N. \qquad (1)$$

За положительное направление возьмем движение от i к j $(i<j)$. Если теперь задано число N и множество положительных числовых отметок

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\},$$

то полностью задана n -мерная структура, которую мы назовем диофантовой, или $\mathcal{D}_n$ -графом (будем говорить $\mathcal{D}_n$ -граф $\{N, S\}$). Нумерацию, отвечающую условию (I), назовем диофантовой адресацией. Последняя в $\mathcal{D}_n$-графах играет роль аналога евклидовой адресации элементов E_n -графа. На рис.3 дана диофантова адресация структуры, изображенной ранее на рис. I.

Непосредственно из (I) следует, что если элементы i и j $\mathcal{D}_n$ - графа связаны, то

$$\Delta_{ij} = (j - i) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k^{ij} \pmod N, \qquad (2)$$

где x_k^{ij} есть k -я компонента относительного адреса X_{ij}, имеющего тот же физический смысл, что для E_n -графа.

Для дальнейшего изложения напомним, что записи $(x_0\, x_1 \ldots, x_n)$ и $[x_0\, x_1, \ldots, x_n]$ означают соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Вопрос о связности $\mathcal{D}_n$ -графа решает следующая

ТЕОРЕМА I. Компоненты связности $\mathcal{D}_n$ - графа $\{N, S\}$ имеют порядок

$$\rho = N / (N, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}).$$

Действительно, компоненты X_{ij} есть решение сравнения (2). Последнее, в свою очередь, существует, если существует решение диофантова уравнения вида

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k^{ij} \qquad (3)$$

хотя бы для одного представителя класса $\bar{\Delta}_{ij}$ по модулю N. Как известно, уравнение (3) разрешимо для любого Δ_{ij}, если $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = 1$.

Если $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = d$ и $(N, d) = $ I, то $d\Delta'_{ij} \in \bar{\Delta}_{ij}$ и сравнение (2) можно привести к виду

$$\Delta'_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} (s_k / d)\, x_k^{ij} \pmod N,$$

после чего имеем предыдущий случай. Наконец, если $(N, s_0, \ldots, s_{n-1}) = d$,

то множество абсолютных адресов $\mathcal{I}$ распадается на d классов чисел вида $md + \ell$, где $m \in \{0, 1, \ldots, \frac{N}{d} - 1\}$; $\ell \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Расстояния между числами одного класса ($\ell = const$) имеют вид

$$\Delta_{ij} = (m_j - m_i)\, d = \Delta'_{ij}\, d,$$

и сравнение (2) приводится к уже известному виду, имеющему решение, по модулю N/d.

Расстояние между числами разных классов имеет вид

$$\Delta_{ij} = (m_j - m_i) d + (\ell_j - \ell_i) = m'_{ij}\, d + \ell'_{ij},$$

а в класс $\bar{\Delta}_{ij}$ по модулю N входят числа вида $Nt + m_{ij}\, d + \ell_{ij}$, где t - любое целое. Все они не делятся на d, и (3) не имеет решения. Теорема доказана.

Итак, если числа $\{N, S\}$ взаимно-просты, то $\mathcal{D}_n$ -граф связен. Очевидно, что вместо заданного Δ_{ij} можно взять класс $\bar{\Delta}_{ij}$ по модулю N, а группа классов по модулю N и есть группа автоморфизмов $\mathcal{D}_n$ -графа. Исследуем её подробнее.

Заметим, что в силу (2), любой элемент Δ_{ij} этой группы может быть представлен через s_k. Следовательно, множество S всех отметок ребер $\mathcal{D}_n$ -графа есть множество образующих. При этом, как принято при описании абелевых групп, естественно использовать аддитивную запись.

Транзитивную абелеву группу автоморфизмов порядка N с множеством образующих S обозначим символом $\mathcal{D}_n$. $\mathcal{D}_n$ -граф является диаграммой Кэли для группы $\mathcal{D}_n$, следовательно, изоморфизм $\mathcal{D}_n$ графов, сводится к изоморфизму $\mathcal{D}_n$ -групп.

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы I о связности $\mathcal{D}_n$ -графа.

ТЕОРЕМА 2. Порядок образующей s_k равен $\rho_k = \dfrac{N}{(N, s_k)}$.

Пусть теперь $(\alpha)_\rho$ - вычет класса $\bar{\alpha}$ по модулю ρ. Если $\alpha = \alpha(t)$, где t - некоторый номер класса, то сохраним принятое обозначение на всем множестве классов $\bar{\alpha}(t)$ при $t = 0, \mathrm{I}, 2, \ldots$.

Из теоремы 2 вытекает тривиальное соотношение между образующими $s_k\, \rho_k = s_\ell\, \rho_\ell \pmod{[\rho_k, \rho_\ell]}$.

Кроме того, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Соотношения между образующими группы $\mathcal{D}_n$ (помимо коммутативности) имеют вид:

$$s_k \left(\frac{[s_k, s_\ell]}{(s_k, s_\ell) s_k} t\right)_{\rho_k} \equiv s_\ell \left(\frac{[s_k, s_\ell]}{(s_k, s_\ell) s_\ell} t\right)_{\rho_\ell} (mod [\rho_k, \rho_\ell]),$$

где t – целое число и $0 < t < min\{\rho_k, \rho_\ell\}$.

Действительно, сравнение

$$s_k x_k \equiv s_\ell x_\ell (mod [\rho_k, \rho_\ell]), \qquad (4)$$

кроме тривиального решения: $x_k = \rho_k$, $x_\ell = \rho_\ell$, удовлетворяется системой решений диофантова уравнения:

$$s_k x_k - s_\ell x_\ell = 0.$$

Она имеет вид:

$$x_k = \frac{[s_k, s_\ell]}{(s_k, s_\ell) s_k} t, \quad x_\ell = \frac{[s_k, s_\ell]}{(s_k, s_\ell) s_\ell} t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом, имеется система классов $\bar{x}_k(t), \bar{x}_\ell(t)$ по модулю $[\rho_k, \rho_\ell]$, удовлетворяющих сравнению (4).

С другой стороны, все элементы этих классов принадлежат классам по модулю ρ_k и ρ_ℓ, соответственно. Следовательно, индекс t должен пробегать полную систему вычетов по модулю $\rho = min\{\rho_k, \rho_\ell\}$. Остальные его значения ничего не добавят. В этом и состоит утверждение теоремы 3.

Вопрос об изоморфизме $\mathcal{D}_n$ -графов важен прежде всего при переборе всех возможных структур. Без учета изоморфизма этот перебор потребовал бы столько построений, каково число сочетаний C_N^n из N по n.

Некоторое сокращение перебора дает условие симметрии КАИС-структур. Покажем, что число симметричных $\mathcal{D}_n$-графов не превышает $C^n_{]N/2[}$.

ТЕОРЕМА 4. $\mathcal{D}_n$ – графы с параметрами $\{N, s_0, \ldots, s_\ell, \ldots, s_{n-1}\}$ и $\{N, s_0, \ldots, (N-s_\ell), \ldots, s_{n-1}\}$ изоморфны.

Действительно, в силу симметрии структуры мы можем заменить $N-s_\ell$ на $s_\ell - N$; после чего (2) преобразуется в эквивалентное сравнение:

$$\Delta_{ij} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k^{ij} - N x_\ell^{ij} (mod N),$$

где $N x_\ell^{ij} \equiv 0 (mod N)$. Таким образом, замена s_ℓ на $N-s_\ell$ эквивалентна изменению направления отсчета по ребру с отметкой s_ℓ.

Дальнейшее сокращение числа $\mathcal{D}_n$ -графов дает

ТЕОРЕМА 5. Если $(N, d) = 1$, то $\mathcal{D}_n$ – графы $\{N, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ и $\{N, ds_0, ds_1, \ldots, ds_{n-1}\}$ изоморфны.

Действительно, если $\Delta_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k^{ij}$ пробегает полную систему вычетов по модулю N, то и

$$\Delta'_{ij} = d \sum_{k=0}^{n-1} s_k x_k^{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} (d s_k) x_k^{ij}$$

пробегает полную систему вычетов по модулю N при тех же значениях x_k^{ij}. Взаимно-однозначное соответствие Δ_{0j} и Δ'_{0j} для всех $j \in \mathcal{J}$ и есть требуемый изоморфизм.

Окончательное решение проблемы изоморфизма дает

ТЕОРЕМА 6. $\mathcal{D}_n$ – графы $\{N, S\}$ и $\{N, S'\}$ изоморфны, если и только если существует такое взаимно-однозначное соответствие между S и S', что порядки соответствующих образующих равны и выполняется любое из сравнений:

$$s'_k s_\ell - s_k s'_\ell \equiv 0 \, mod [\rho_k, \rho_\ell], \qquad (5)$$

$$s'_k s_\ell + s_k s'_\ell \equiv 0 \, mod [\rho_k, \rho_\ell] \qquad (6)$$

для всех $k \neq \ell$.

Действительно, при очевидном выполнении: $\rho_k = \rho'_k$, $\rho_\ell = \rho'_\ell$ видно, что условие (5) теоремы есть условие эквивалентности сравнений:

$$s_k x_k - s_l x_l = 0 (mod [p_k, p_l]),$$
$$s'_k x_k - s'_l x_l = 0 (mod [p_k, p_l]).$$

Условие (6) появляется при изменении знака одной из образующих, что, согласно теореме 4, сохраняет изоморфизм.

Пользуясь теоремой 6, можно по описанию $\mathcal{D}_n$ -графа $\{N, S\}$ вычислить все изоморфные ему описания. Особенно просто это делается для двумерных систем, где (по теореме 5) можно положить $(s_0, s_1) = 1$.

Решая сравнение $s'_0 s_1 - s_0 s'_1 \equiv 0 (mod N)$ относительно s'_0, s'_1, имеем

$$s'_0 = (s_0 t)_N \quad , \quad s'_1 = (s_1 t)_N \,, \tag{7}$$

где t - пробегает приведенную систему вычетов по модулю N , а в качестве s'_0 и s'_1, естественно, берутся минимальные по абсолютной величине вычеты. Отрицательными знаками можно пренебречь.

Полный перебор всех классов изоморфизма двумерных $\mathcal{D}_n$ -графов ($\mathcal{D}_2$ -графов) порядка N можно сделать, пользуясь следующим алгоритмом.

I. Выписать все числа s_k от I до $]\frac{N}{2}[$.

2. Разбить все эти числа на классы эквивалентности по величине (s_k, N), то есть по порядку соответствующей образующей. Классы обозначить K_p , где p -порядок образующей s_k, входящий в класс K_p .

Очевидно, что таких классов будет точно

$$\prod_i (\alpha_i + 1) - 1,$$

где α_i - степень i -го члена канонического разложения числа N :

$$N = \prod_i q_i^{\alpha_i} .$$

3. Выбрать все парасочетания $\langle K_p, K_r \rangle$ и вычеркнуть те из них, представители которых имеют общий делитель.

Естественно, что если в множестве K парасочетаний имеется $\langle K_p, K_r \rangle$, то нет смысла рассматривать $\langle K_r , K_p \rangle$.

p_l \ p_k		15				5		3
	s_l \ s_k	1	2	4	7	3	6	5
15	1		I	II	I	III	IV	V
	2				II	IV		V
	4				I	III		V
	7					IV	III	V
5	3							VI
	6							VI
3	5							

Рис.4

4. Выбрать из K очередную пару $\langle K_p, K_r \rangle$, если она есть, составить для нее декартово произведение $K_p \times K_r$ и вычеркнуть эту пару из K, иначе выполнить п.8.

5. В $K_p \times K_r$ вычеркнуть те пары, для которых $(s_{kp}, s_{lr}) \neq 1$ или $(s_{kp}, N - s_{lr}) \neq 1$.

6. Выписать пару $\langle s_{kp}, s_{lr} \rangle$ в качестве представителя класса изоморфизма, если она есть, иначе перейти к п.4.

7. По формулам (7) вычислить все $\langle s'_{kp}, s'_{lr} \rangle$ и вычеркнуть их из $K_p \times K_r$. Перейти к п. 6.

8. Конец.

При ручном использовании предложенного алгоритма удобно пользоваться квадратной таблицей, показанной на рис. 4 для $N = 15$. Возможности такого метода ограничены, пожалуй; только размерами таблицы, которая может стать необозримой. Однако при $N \leq 100$ полный перебор $\mathcal{D}_2$ -графов порядка N не представляет особого труда.

4. Следующие две теоремы касаются соотношения между $\mathcal{D}_n$ - и E_n-графами.

ТЕОРЕМА 7. Связный $\mathcal{D}_n$ - граф, удовлетворяющий условию

$$\prod_{k=0}^{n-1} p_k = N, \tag{8}$$

одновременно является E_n - графом вида:

$$E_n = \bigotimes_{k=0}^{n-1} C_{p_k} .$$

Условие (8) входит в определение прямого произведения. Учитывая утверждение теоремы 2, имеем

$$\prod_{k=0}^{n-1} (N, s_k) = N^{n-1}. \qquad (9)$$

Из условия связности $\mathcal{D}_n$-графа (теорема I) можно сделать вывод, что каждый член $q_s^{\alpha_s}$ канонического разложения N отсутствует хотя бы в одном s_k, а из (9) видно, что он есть во всех остальных $(n-1)$ отметках. Значит, $[s_k, s_\ell]$ делится и на ρ_k, и на ρ_ℓ, и все нетривиальные соотношения (теорема 3) между образующими $\mathcal{D}_n$-группы вырождаются:

$$s_k \cdot 0 \equiv s_\ell \cdot 0 (mod [\rho_k, \rho_\ell] .$$

Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 8. Правильный E_n-граф непредставим $\mathcal{D}_n$-графом, если $n>1$ и $\ell>2$ или $n>2$ и $\ell \geq 2$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 3 и симметричности рассматриваемых структур, вследствие которой C_2^2 может рассматриваться как C_4.

Таким образом, множества структур, представляемых E_n и $\mathcal{D}_n$ - графами, пересекаются. Очевидно, однако, что $\mathcal{D}_n$-графов гораздо больше, чем E_n- графов. Кроме того, $\mathcal{D}_n$-графы имеют ряд дополнительных ценных качеств:

I. Структуры с минимальным диаметром встречаются скорее среди $\mathcal{D}_n$-графов.

2. Диофантова адресация, в отличие от евклидовой, имеет то ценное качество, что полный перенос всего содержимого структуры на одно и то же расстояние Δ_{ij} сохраняет все свойства и адресацию любых подсистем. Так что, если i-я ЭМ выходит из строя, а j-я находится в резерве, достаточно изменить адресацию в системе по формуле $k' = k + (j-i)$ и соответственно передвинуть содержимое памяти всей системы. При этом в ОВС ничего не изменится, но ситуация будет выглядеть так, как будто бы из строя вышла резервная ЭМ.

Это свойство является следствием того, что группа $\mathcal{D}_n$ изоморфна абстрактной циклической группе C_N. Вообще для достижения аналогичного результата в любой КАИС-структуре достаточно применить соответствующий автоморфизм ϑ_{ij}, содержащийся в группе автоморфизмов. В частности, в E_n-графах это преобразование имеет более сложную структуру, чем в $\mathcal{D}_n$-графах.

3. $\mathcal{D}_n$-граф может быть построен при любом N, и изменение этого числа в дальнейшем не выводит структуру из этого класса, чего не скажешь о E_n-графе.

4. В $\mathcal{D}_n$-графах сохраняются и все возможности относительной адресации. Правда, получение X_{ij} по заданному Δ_{ij} связано с решением диофантовых уравнений, но зато обратный переход исключительно прост.

5. Рассмотрим эвристический метод синтеза структур минимального диаметра. Как уже отмечалось, для заданных величин N и n желательно выбрать структуру с минимальным диаметром. Для E_n-графов этот вопрос разрешается тривиально: наилучшими являются правильные структуры. Если же N таково, что правильный E_n-граф построить нельзя, то можно сформулировать следующее эвристическое правило.

ПРАВИЛО I. Наилучшей среди E_n- графов является структура, минимизирующая функцию

$$R_1 = \sum_{k=0}^{n-1} | \sqrt[n]{N} - \ell_k | .$$

При поиске двумерных $\mathcal{D}_n$-графов минимального диаметра можно исходить из следующих соображений. Идеальной структурой, реализующей возможность связи с максимальным числом вершин, находящихся на заданном расстоянии от исходной, является дерево. $\mathcal{D}_2$-граф будет больше всего походить на дерево, если пути, соответствующие различным словам $\mathcal{D}_2$-группы, будут как можно длиннее. В силу симметрии структуры, оптимальной длиной таких путей является величина $N/2$. Это означает, в свою очередь, что наилучший $\mathcal{D}_n$-граф обладает свойством: $[s_0, s_1] \approx \frac{N}{2}$.

Отсюда следует

ПРАВИЛО 2. При построении $\mathcal{D}_2$-графов необходимо стремиться к минимуму функции

$$\mathcal{L} = \left| \frac{N}{2} - [s_0, s_1] \right| .$$

Для $\mathcal{D}_2$-графов не теряет силу и правило I. При этом функция, которая минимизируется по правилу I, имеет вид:

$$R = \min_k \left| \sqrt{N} - \rho_k \right| .$$

На основе этих критериев поиск лучшего $\mathcal{D}_2$-графа можно провести по следующему сокращенному алгоритму.

I. Из множества K парасочетаний $\langle K_\rho, K_\tau \rangle$ выбрать несколько лучших по критерию R.

2. Из каждого выбранного парасочетания выбрать по критерию $\mathcal{L}$ лучшую пару $\langle s_{0\rho}, s_{1\tau} \rangle \in K_\rho \times K_\tau$.

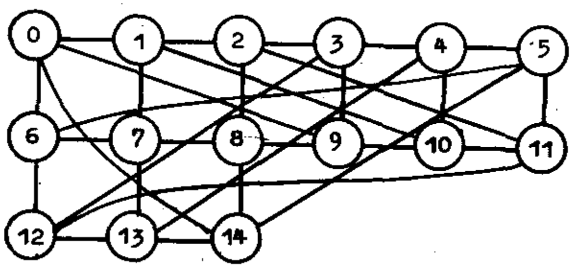

Рис. 5.

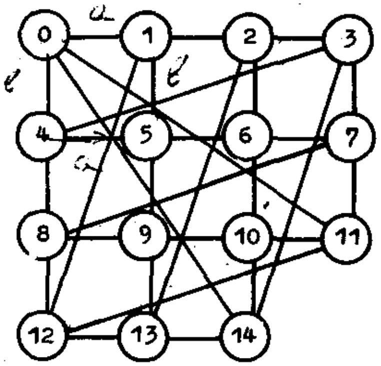

Рис. 6

3. Вычислить средний диаметр (среднее расстояние между вершинами) для каждого выделенного $\mathcal{D}_2$-графа:

$$d_{cp} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{d} i k_i ,$$

где k_i – число вершин $\mathcal{D}_n$-графа, находящихся на расстоянии i от нулевой вершины; d – диаметр структуры.

4. Выбрать $\langle s_0, s_1 \rangle$, дающую минимум d_{cp}, и по формулам (7) найти весь класс структур, изоморфных выбранной. В качестве представителя класса естественно взять описание с минимальными значениями s_0, s_1.

В большинстве случаев алгоритм дает оптимальную структуру. Так, для $N = 15$ конкурентоспособны $\mathcal{D}_2$- графы $\{15;\ 1, 6\}$ (рис. 5) и $\{15;\ 1,\ 5\}$. Лучшей по d_{cp} оказывается $\{15;\ 1,\ 6\}$. Полный перебор подтверждает этот вывод и дает еще одну структуру, не уступающую выбранной по качеству, а именно $\{15;\ 1,\ 4\}$ (рис.6)

Литература

I. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.

2. ВОРОБЬЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем.-Настоящий сборник, стр.3-16.

3. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Исследование функционирования однородных вычислительных систем. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Л., 1973, (ЛЭТИ).

4. ШУМ Л.С. О функциональной организации вычислительных систем. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 39. Новосибирск, 1970, стр. 81-88.

Поступила в ред.-изд.отд.
15 октября 1973 года