

УДК 681:3.06:621.391

АЛГОРИТМ ЭМПИРИЧЕСКОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

Е.Е.Витяев

Данная работа по тематике примыкает к [1,2,5]. Алгоритм в качестве входной информации использует не только обучающий материал, но и те априорные сведения о приборах, которые можно записать в виде универсальных аксиом. Эти априорные сведения вместе с их интерпретацией фиксируются с помощью эмпирической гипотезы. Обучающий материал может содержать данные, замеренные в любой шкале. Именно для обеспечения этого свойства рассматриваются предикаты произвольной местности и с любым набором универсальных аксиом, которым они должны удовлетворять. Данные могут иметь произвольное число пробелов, которые фиксируются с помощью значения "не определено". Для отбора тех логических формул, которые выражают некоторую закономерность в данных, используются вероятностные оценки, которые получаются, исходя из приведенной вероятностной модели.

В качестве входных данных алгоритма может быть взята произвольная пара $\langle H_0, \rho\tau_0 \rangle$, H_0 - эмпирическая гипотеза [2], которая является формальной записью априорных сведений о приборах из $Int \mathcal{Z}_{H_0}$.

$$H_0 = \langle \mathcal{V}_{H_0}, Int_{H_0}, \mathcal{T}_{H_0} \rangle,$$

$$\mathcal{V}_{H_0} = \{ P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_n(x_1, \dots, x_{m_n}) \},$$

$$Int_{H_0} = \{ P_1(x_1, \dots, x_m), \dots, P_n(x_1, \dots, x_{m_n}) \},$$

\mathcal{T}_{H_0} - тестовый алгоритм.

\mathcal{V}_{H_0} называется словарем гипотезы H_0 ; $P_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ - предикатным символом местности m_i ; Int_{H_0} - интенциональным базисом гипотезы H_0 ; $P_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ - интенциональной процедурой. По сравнению с [2] тестовый алгоритм удовлетворяет следующему дополнительному требованию:

Если $\{A_i\}_{H_0}$ - множество универсальных формул [3] в словаре \mathcal{V}_{H_0} , то $\mathcal{T}_{H_0}(\rho\tau) = 1$ в том и только в том случае, если все формулы из $\{A_i\}_{H_0}$ истинны на $\rho\tau$.

Так как, кроме значений "истина" и "ложь", допускается значение "не определено", то истинность универсальной формулы $\forall x_1, \dots, x_n A(x_1, \dots, x_n)$ проверяется только в случае, если все значения предикатов определены. Формула $\forall x_1, \dots, x_n A(x_1, \dots, x_n)$ считается истинной на $\rho\tau$, если она истинна на всех наборах $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, $\alpha_i \in B(\rho\tau)$; где она определена, если она нигде не определена, то она также считается истинной. $\rho\tau$ - диаграмма [3] модели $\mathcal{M} = \langle B(\rho\tau), \mathcal{V}_{H_0} \rangle$, где $B(\rho\tau)$ - некоторое множество символов объектов.

ПРИМЕР. $\mathcal{V}_{H_0} = \{ P(x, y) \}$, $Int_{H_0} = \{ P(x, y) \}$, где $P(x, y)$ есть полное описание процедуры измерения отношения "объект x весит не больше объекта y " с помощью данных аптекарских весов. Множество $\{A_i\}_{H_0}$, $i = 1, 2, 3$, есть:

1. $\forall x P(x, x)$,
2. $\forall x, y (P(y, x) \vee P(x, y))$,
3. $\forall x, y, z (P(x, y) \& P(y, z) \Rightarrow P(x, z))$.

Для двух символов объектов a, b протокол $\rho\tau = \{ P(a, b), \bar{P}(a, a), \bar{P}(b, b), \bar{P}(b, a) \}$ есть символическая запись ситуации (возможно, только лишь мыслимой), в которой объект с именем a весит не более объекта с именем b . Все формулы из $\{A_i\}_{H_0}$, $i = 1, 2, 3$, истинны на $\rho\tau$, следовательно, $\mathcal{T}_{H_0}(\rho\tau) = 1$.

Будем предполагать, что в результате какого-то случайного процесса выбрано множество B объектов $B = \{ a_1, \dots, a_m \}$ из генеральной совокупности U . Произведем всевозможные измерения значений $P_i(x_1, \dots, x_{m_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$, на объектах из B полу-

чим модель $\mathcal{M} = \langle B, \text{Int} \rangle_{H_0}$. Заменяя объекты a_i на символы этих объектов a_i $i = 1, 2, \dots, m$, элементы $P_i(a_1, \dots, a_{m_i})$ на $P_i(a_1, \dots, a_{m_i})$, получаем $\mathcal{M} = \langle B, \mathcal{U}_{H_0} \rangle$. Тогда $\rho\tau_0$ - это диаграмма модели \mathcal{M} . $\rho\tau_0$ - символическая запись результата эксперимента Int_{H_0} над B . Заметим, что не всякий $\rho\tau$ может быть получен как результат эксперимента.

Если $\mathcal{U}_{H_0}(\rho\tau_0) = 0$, т.е. одна из формул $\{A_i\}_{H_0}$ оказалась ложной, то эмпирическая гипотеза H_0 опровергнута, так как это означает, что, с точки зрения H_0 , $\rho\tau_0$ - всего лишь мыслительная ситуация, хотя $\rho\tau_0$ - результат эксперимента. В этом случае пара $\langle H_0, \rho\tau_0 \rangle$ не может служить входной информацией для алгоритма.

Пусть Φ - универсальная [3] не тождественно истинная формула $\Phi = \forall x_1, \dots, x_n A(x_1, \dots, x_n)$, где $A(x_1, \dots, x_n)$ - бескванторная формула. Тогда $A(x_1, \dots, x_n)$ не тождественно истинная формула исчисления высказываний, если $P_i(x_1, \dots, x_{m_i})$ рассматривать как булевы переменные.

Используем тождества:

$$c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n = \bar{c}_2 \& \bar{c}_3 \& \dots \& \bar{c}_n \Rightarrow c_1 = \bar{c}_1 \& \bar{c}_3 \& \dots \& \bar{c}_n \Rightarrow c_2 = \dots =$$

$$\bar{c}_1 \& \bar{c}_2 \& \dots \& \bar{c}_{n-1} \Rightarrow c_n, \quad (1)$$

$$(c_1 \vee c_2) \& c_2 = c_2, \quad (2)$$

$$\forall x_1, \dots, x_n A \& B \equiv \forall x_1, \dots, x_n A \& \forall x_1, \dots, x_n B, \quad (3)$$

где c_1, \dots, c_n - булевы переменные, A, B - формулы. Так как $A(x_1, \dots, x_n)$ не тождественно истинна, то ее можно привести к сокращенной (несовершенной) конъюнктивной нормальной форме (СККНФ) [4]. К конъюнктивному члену $c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n$ добавив произвольное количество (из имеющихся) новых дизъюнктивных членов, получим $c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n \vee c_{n+1} \vee \dots \vee c_k$. Для каждого конъюнктивного члена из СККНФ добавим к СККНФ новые конъюнктивные члены, которые можно получить из данного, указанным способом, добавляя дизъюнктивные члены. В силу тождества (2) полученная КНФ будет

тождественна исходной СККНФ. В полученной КНФ заменим каждый конъюнктивный член на конъюнкцию всех импликаций из (1) тождественных данному конъюнктивному члену согласно (1). В результате получим конъюнкцию членов вида $c_1^{E_1} \& \dots \& c_n^{E_n} \Rightarrow c_0^{E_0}$ (для $E = 0(1)$ переменная берется с отрицанием (без него)). Применяя тождество (3), получим конъюнкцию членов вида:

$$\forall x_1, \dots, x_n (P_1^{E_1}(x_1, \dots, x_{m_1}) \& \dots \& P_n^{E_n}(x_1, \dots, x_{m_n}) \Rightarrow P_0^{E_0}(x_1, \dots, x_{m_0})). \quad (4)$$

Полученное разложение формулы Φ обозначим $\{\Phi_i\}$, где каждый Φ_i - один из членов вида (4) разложения Φ . Разложение формул понадобилось по следующим причинам:

1) Для формул вида (4) подсчитывать различные оценки вероятности истинности довольно просто. При этом, ограничиваясь только формулами вида (4), мы можем совокупностью таких формул выразить любую зависимость, выразимую универсальной формулой.

2) Нам прежде всего интересовало, как по показаниям одних приборов из Int_{H_0} предсказывать показания других.

3) По построению разложения видно, что там много конъюнктивных членов тождественных между собой, а также много лишних членов, которые по (2) можно было бы отбросить. Эти добавки связаны с тем, что, хотя формулы и тождественны, в статистическом отношении они различны. Точная формулировка на стр. 32.

4) В дальнейшем будем предполагать, что все универсальные формулы $A_i \in \{A_i\}_{H_0}$ разложены до $\{A_j\}_i$. Обозначим $\cup \{A_j\}_i$ через $\{A_j\}_{H_0}$. Таким образом, будем считать, что все $A_j \in \{A_j\}_{H_0}$ вида (4).

Опишем процедуру, которая составляет элементарный акт анализа обучающей выборки. Для формул A вида

$$P_1^{E_1}(x_1, \dots, x_{m_1}) \& \dots \& P_n^{E_n}(x_1, \dots, x_{m_n}) \Rightarrow P_0(x_1, \dots, x_{m_0}) \quad (5)$$

подсчитаем условную частоту $h(c_A/\pi_A)$ истинности заключения $c_A = P(x_1, \dots, x_{m_0})$ при условии истинности посылки

$$\pi = P_1^{E_1}(x_1, \dots, x_{m_1}) \& \dots \& P_n^{E_n}(x_1, \dots, x_{m_n})$$

Пусть число различных переменных в формуле A равно k . Выделим из множества $B(\rho\tau_0) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ случайным образом максимальное число $L = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ групп по k объектов в каждой. Объект каждой группы $\langle \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \rangle_i$, $i = 1, 2, \dots, L$, в каждом из порядков их следования внутри группы будем подставлять вместо соответствующих переменных x_{i_1}, \dots, x_{i_k} в формулу A . Подсчитаем, сколько раз оказалась истинной Π_A при условии, что C_A не была не определена. Получим h_n^A . Подсчитаем также, сколько раз было истинно C_A при условии, что было истинно Π_A . Получим $h_c^A \leq h_n^A$. Числа h_c^A и h_n^A и есть результат процедуры.

Для различных формул разбиение может быть различным. Случайность разбиения B на группы можно обеспечить тем, что заранее, до получения объектов $B(\rho\tau_0)$, распределить, какие объекты с какими номерами составят какую группу. Каждой формуле A заранее сопоставить разбиение.

Для данной формулы A переменную x_{i_1} , встречающуюся в A , назовем связанной с переменной x_{i_n} из C_A , если найдутся переменные $x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{n-1}}$ из A (индексы не обязательно все различны) такие, что x_{i_1} и x_{i_2}, \dots, x_{i_k} и $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{n-1}}$ и x_{i_n} все попарно встречаются в каком-то одном, для каждой пары своем, предикатном символе из A . Ограничимся в дальнейшем рассмотрением только таких формул вида (5), в которых каждая переменная из послышки связана с какой-нибудь переменной из заключения.

Рассмотрим формулу A_1 вида (5). Используя тождество (1), выпишем все эквивалентные ей формулы A_1, A_2, \dots, A_n . Пусть дано n чисел, $0 \leq h_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда нетрудно доказать, что для формул $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ данного набора чисел и заданного $\varepsilon > 0$ существует $\langle N_0, \rho\tau_0 \rangle$ и разбиение множества $B(\rho\tau_0)$ такое, что $|h_c^{A_i} / h_n^{A_i} - h_i| \leq \varepsilon$; $i = 1, 2, \dots, n$. Это утверждение уточняет, в каком именно смысле логически тождественные формулы в статистическом отношении различны.

Приведем несколько примеров закономерностей вида (5), которые могут быть обнаружены при анализе $\rho\tau_0$.

1. $P_1(x) \& P_2(x) \Rightarrow P_0(x)$, где $P_1(x)$ - блице x упало; $P_2(x)$ - из данной точки на данную поверхность; $P_0(x)$ - блице x разбилось.

2. $P_1(x, y, z) \& P_2(x, z) \& P_2(y, z) \Rightarrow P_0(x, y, z)$, где $P_1(x, y, z)$ - ток в участке цепи z больше суммарного тока x и y ; $P_2(x, z)$ - сопротивление в z больше, чем в x ; $P_0(x, y, z)$ - напряжение в z больше суммарного напряжения в x и y . (Точный смысл этих слов зафиксирован в $\mathcal{I}nt_{H_0}$.)

Если для z известны сопротивление и ток, а x и y принадлежат обучающему материалу и, значит, для них известно напряжение, то можно найти оценку для напряжения в z .

3. $P_0(x) \& P_1(x, y) \Rightarrow P_0(y)$, где $P_0(x)$ - человек x болен; $P_1(x, y)$ - температура тела y больше, чем x ($x \in B(\rho\tau_0)$); и для него известно $P_0(x)$, а для y нет.

Алгоритм предназначен для предсказания значений одного или нескольких предикатных символов из \mathcal{U}_{H_0} . Обозначим это множество через $\mathcal{U}_{пр} \subset \mathcal{U}_{H_0}$, оставшиеся символы через $\mathcal{U}_{ост} = \mathcal{U}_{H_0} \setminus \mathcal{U}_{пр}$. Ограничимся рассмотрением только таких формул вида (5), в заключении которых стоит предикатный символ из $\mathcal{U}_{пр}$.

Пусть дано какое-то множество формул вида (5) в словаре \mathcal{U}_{H_0} . Под обучением алгоритма относительно M , или, по-другому, анализом $\rho\tau_0$ с точки зрения M будем понимать перебор всех формул из $A \in M \setminus \{A_j\}_{H_0}$ и подсчет для них чисел h_n^A , h_c^A .

Перебор всех формул вида (5), даже удовлетворяющих приведенным ограничениям, в практически интересных случаях невозможен. Надо определенным образом выбрать практически приемлемое множество. Выбор его зависит от специфики задачи, априорных предположений и гипотез, от возможностей вычислительной машины и т.д. От множества M будет зависеть та "точка зрения", с которой будет анализироваться $\rho\tau_0$, а не надежность предсказания, которая в основном будет зависеть от вероятностных оценок и их использования. Представляется наиболее удобным начинать перебор формул с простейших по количеству предикатных символов. Эта простота хорошо соответствует тому, что для более простых формул числа h_n^A и h_c^A больше, что дает возможность делать более уверенные вероятностные оценки.

Будем предполагать, что множество $M_{ос}$ формул вида (5), по которому будет проводиться обучение, зафиксировано до получения $\rho\tau_0$ на основе H_0 . После получения $\rho\tau_0$ проведем обучение

алгоритма относительно множества $M_{об}$. Фиксируем доверительный уровень 2β . По известным оценкам, используя h_n^A, h_c^A , найдем для каждой $A \in M_{об}$ доверительные границы P_{min}^A, P_{max}^A для вероятности $P(C_A | \Pi_A), P_{min}^A < P(C_A | \Pi_A) \leq P_{max}^A$. Если формула $A \in M_{об}$ и $A \in \{A_j\}_{H_0}$, то ей присваиваются границы $P_{min}^A = P_{max}^A = 1$. Если для $A \in M_{об}$ найдется в $\{A_j\}_{H_0}$ формула A_j такая, что $\Pi_A = \Pi_{A_j}$ и $C_A = \bar{C}_{A_j}$, то формуле A присваиваются границы $P_{min}^A = P_{max}^A = 0$.

Предположим, что из генеральной совокупности случайно выбрали объект b . По значениям известных отношений нам надо предсказать значения неизвестных, т.е. значения предикатных символов из $\mathcal{V}_{пр}$. Значения известных отношений определяются всевозможным применением интенсиональных процедур P_{i_1}, \dots, P_{i_n} . $P_{i_k} \in \mathcal{V}_{ост}$ к объектам $\alpha_1, \dots, \alpha_n, b$, т.е. известен протокол $\rho\alpha_b$ на множестве $\alpha_1, \dots, \alpha_n, b$ в словаре $\mathcal{V}_{ост}$. Проверим, не опровергается ли H_0 протоколом $\rho\alpha_b$.

Возьмем один предикатный символ $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}_{пр}$. Опишем процедуру предсказания для него, для остальных эта процедура аналогична. Обозначим через $M_{об}^P$ множество формул из $M_{об}$, в заключении которых стоит $P(x_1, \dots, x_n)$. Будем перебирать последовательно все возможные наборы вида $\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}} \rangle, \alpha_{i_k} \in B(\rho\alpha_0)$. Объекты из этого набора будем подставлять соответственно вместо переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Для фиксированного набора будем перебирать последовательно формулы из $M_{об}^P$. Для $A \in M_{об}^P$ смотрим, есть ли переменные из Π_A , не входящие в C_A . Если есть, то из $\rho\alpha_0$ случайно выберем столько объектов $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$, сколько таких переменных. Зафиксируем, какой объект подставлять вместо какой переменной. Подставим в Π_A объекты из наборов $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle, \langle \alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}} \rangle$. Проверим, истинна ли будет Π_A . Если нет, то переходим к следующей формуле. Если да, то смотрим, какое из чисел больше: $\frac{1}{2} - P_{min}^A$ или $P_{max}^A - \frac{1}{2}$. Если первое, то для $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ предсказываем значение "ложь", если второе, то значение "истина". Запомним, что для

набора $\langle \alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}} \rangle$ предсказывается значение истинности (ложности) на основании A, P_{min}^A, P_{max}^A . Переходим к другой формуле. После того как для каждого набора будут рассмотрены все формулы из $M_{об}^P$, перейдем к следующему этапу.

Дальнейшая работа состоит в максимальном избавлении от противоречивых предсказаний. Для каждого набора сделаем следующее. Предсказание истинности (ложности) на основании A, P_{min}^A, P_{max}^A назовем значимым, если $P_{min}^A > \frac{1}{2}$ ($P_{max}^A < \frac{1}{2}$). Проверим, есть ли два значимых предсказания, одно из которых предсказывает истинность $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$, а другое — ложность на основании A_1 и A_2 . Если нет, то переходим к другому набору. Если есть, то смотрим, есть ли предсказание на основании $A, P_{max}^A = P_{min}^A = 0$ или I. Если есть, то только его считаем действительным, остальные отбрасываем. Переходим к следующему набору. Если есть как $A_1, P_{min}^A = P_{max}^A = 1$, так и $A_2, P_{min}^A = P_{max}^A = 0$, то получаем противоречие с гипотезой H_0 — гипотеза H_0 опровергнута. Если нет предсказания $P_{max}^A = P_{min}^A = 0$ или I, берем произвольные два значимых предсказания, одно из которых предсказывает истинность на основании A_1 , а другое — ложность на основании $A_2, A_1 \equiv \Pi_{A_1} \Rightarrow P(x_1, \dots, x_n), A_2 \equiv \Pi_{A_2} \Rightarrow P(x_1, \dots, x_n)$. Переименуем переменные формул A_1 и A_2 так, чтобы все переменные из Π_{A_1} , не входящие в C_{A_1} , были отличны от переменных из Π_{A_2} , не входящих в C_{A_2} , а переменные из C_{A_1} и C_{A_2} были одни и те же. После этого построим новую формулу $A \equiv \Pi_{A_1} \& \Pi_{A_2} \Rightarrow P(x_1, \dots, x_n)$. Если $A \notin M_{об}^P$, то с ней надо проделать элементарный акт обучения и подсчитать $h_n^A, h_c^A, P_{min}^A, P_{max}^A$. Если предсказание на основании A значимо, то отбрасывается предсказание той из формул A_1, A_2 , которое противоречит предсказанию A . Если предсказание на основании A незначимо, то предсказания A_1 и A_2 несравнимы. Переходим к другой паре значимых противоречивых предсказаний. Отбрасывание предсказаний заканчивается, если любые два значимых противоречивых предсказания несравнимы. Переходим к другому набору.

Последним этапом работы алгоритма будет установление для каждого набора $\langle \alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}} \rangle$ окончательного решения: предсказывать ли, что $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ — истинно (ложно) или отказываться делать предсказание вообще. На этом этапе работа алгоритма должна зависеть от требуемой надежности предсказания, от априорных предположений (насколько независимы или зависимы и как именно значения предикатов из $\mathcal{V}_{ост}$).

Опишем два возможных варианта работы на этом этапе.

1. Осторожная стратегия. Для набора $\langle \alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}} \rangle$ смотрим: если есть противоречивые несравнимые значимые предсказания, то отказ; если вообще нет значимых предсказаний, тоже отказ; если есть только значимые предсказания истинности (ложности), то $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ истинно (ложно).

2. Если нет значимых предсказаний — отказ. $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ истинно (ложно), если среди значимых предсказаний самое "сильное" есть предсказание истинности (ложности). Предсказание, на основании A_1 сильнее, чем на основании A_2 , если $P_{min}^{A_1} > P_{min}^{A_2}$ и $P_{min}^{A_1} > 1 - P_{max}^{A_2}$.

На этом работа алгоритма заканчивается. Используя значения $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \alpha_{i_{n-1}})$, можно находить различные числовые оценки для b , если $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ — числовое отношение ($\alpha_1, \alpha_2 > b, \alpha > 3b$, и т.д.), если нет, то использовать предсказанные значения $P(\alpha_{i_1}, \dots, b, \dots, \alpha_{i_{n-1}})$ непосредственно.

Л и т е р а т у р а

1. ВИТЯЕВ Е.Е., ГАВРИЛКО Б.П., ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф. Требования к алгоритмам эмпирического предсказания. — В кн.: Вычислительные системы. Вып. 50. Новосибирск, 1972, с. 100–105.
2. САМОХВАЛОВ К.Ф. О теории эмпирических предсказаний. — В кн.: Вычислительные системы. Вып. 55. Новосибирск, 1973, с. 3–35.
3. МАЛЫЦЕВ А.И. Алгебраические системы. М., "Наука", 1970.
4. БРОДСКИЙ И.Н. Элементарное введение в символическую логику. Изд. ЛГУ, 1972 г.
5. ГАВРИЛКО Б.П., ЗАГОРУЙКО Н.Г. Универсальный алгоритм эмпирического предсказания. — В кн.: Вычислительные системы. Вып. 55. Новосибирск, 1973, с. 134–138.

Поступила в ред.-изд. отд.
27 июня 1974 года