ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 6I

УДК 5I:I55.00I.57

К ВОПРОСУ О МЕТОДЕ ВЫБОРА РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

Б.Я. Ковалерчук

В работе выдвигается и формализуется один из возможных методов предпочтения решающих правил в теории принятия решений и, в частности, в задачах распознавания образов. Предлагаемый метод основан на предпочтении тех решающих правил, которые меньше зависят от способа описания исходной информации.

Одной из центральных проблем теории принятия решений является проблема критерия предпочтения конкурирующих гипотез (закономерностей, решающих правил), которые правильно решают (распознают) на материале обучения,но по-разному предсказывают.

Нередко эту проблему просто обходят. Например,задачу распознавания образов сразу ставят как математическую оптимизационную с определенным критерием оптимальности, не обсуждая,почему выбран данный критерий. Либо критерий совсем не формулируется, а просто предлагается пользоваться таким-то решающим правилом. Недостатки такого подхода общеизвестны.

В настоящее время можно выделить три принципа обоснования:

а) экономический принцип (минимум затрат на реализацию данного решающего правила);

б) принцип простоты решающего правила;

в) принцип post factum (выбранное правило верно предсказало на материале контроля).

Заметим, что последний принцип не может обосновать выбор до того, как задача распознавания решена.

Ввиду того, что число известных принципов обоснования мало и они слабо разработаны, представляет интерес выдвижение новых принципов и их формализация.

В работе выдвигается и формализуется **п р и н ц и п н е з а в и с и м о с т и о т о п и с а н и я** (**п р и н ц и п о п и с а н и я**) – **п р е д п о ч и т а т ь т е р е ш а ю щ и е п р а в и л а, к о т о р ы е м е н ь ш е з а в и с я т о т н а ш и х с о г л а ш е н и й о т н о с и т е л ь н о с п о с о б а п р е д с т а в л е н и я р е з у л ь т а т о в э к с п е р и м е н т а.**

Указанный принцип может применяться как самостоятельно, так и совместно с другими, упомянутыми здесь принципами.

Ф о р м а л и з а ц и я п р и н ц и п а. Эта задача разбивается на три подзадачи:

I. Дать формальное понятие материала обучения (результатов эксперимента).

2. Дать формальное понятие решающего правила (закономерности, задающей решающее правило).

3. Дать формальный критерий предпочтения закономерностей на основе предлагаемого принципа.

Перейдем к последовательному рассмотрению этих задач.

I. Э к с п е р и м е н т понимается как упорядоченная пара $\langle \mathbf{A}, \mathbf{\Omega} \rangle$, где $\mathbf{A}$ – некоторое множество объектов; $\mathbf{\Omega} = \{ \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k \}$ – множество отображений из $\mathbf{A}$ или его декартовых произведений в $\{0, I\}$, каждое из которых фиксирует результаты измерений с помощью соответствующего прибора. Итак, каждому прибору и каждому множеству наблюдаемых объектов соответствует свое $\mathbf{P}_i$.

Протокол эксперимента формализуется как с и с т е м а с о т н о ш е н и я м и или м о д е л ь в терминологии [I] аналогично тому, как это сделано в [2,4]. Традиционное понимание протокола эксперимента вкладывается в такую трактовку. Итак, формально протокол эксперимента задается как упорядоченная пара $\langle A, \Omega \rangle$, где A – множество имен эмпирических объектов; $\Omega = \{ (P_1(,\ldots,), P_2(,\ldots,), \ldots, P_k(,\ldots,) \}$ – множество отношений на них. Можно сказать также, что предикатные символы $P_1, P_2, \ldots, P_k$ обозначают $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$,т.е. соответствующие эмпирические отношения. A называется носителем модели $\langle A, \Omega \rangle$.

Материалу обучения и материалу контроля в данном формализме соответствуют определенные протоколы. В протоколе, соответствующем материалу контроля, в отличие от протокола для материала обучения, отсутствует некоторый τ – местный предикат $S(,\ldots,)$, по поводу значений которого предстоит принять решение, предсказать его значение. В случае распознавания образов S может быть двуместным предикатом, определяющим принадлежность объектов контроля определенному образу. Заметим, что в этом случае $S(,)$ – отношение эквивалентности. S может быть также одноместным предикатом в случае двух образов.

Введем обозначения и определения:

$\mathbf{A}$ – объекты обучения;

$\mathbf{C}$ – объекты контроля;

$A \cup C = B$;

A и C множества имен объектов, соответственно, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$;

$\langle A, \Omega \rangle$ – материал обучения;

$\langle B, \Omega \setminus S \rangle$ – материал контроля.

Предполагается, что задание материала контроля подразумевает и задание того, как связаны между собой объекты обучения и контроля. Поэтому в качестве материала контроля взят протокол $\langle B, \Omega \setminus S \rangle$, а не $\langle C, \Omega \setminus S \rangle$. Итак, исходные данные – это пара $\langle A, \Omega \rangle, \langle B, \Omega \setminus S \rangle$: $\langle A, \Omega \setminus S \rangle \subset \langle A, \Omega \rangle$, $\langle B, \Omega \setminus S \rangle \supset \langle A, \Omega \setminus S \rangle$.

Н а ч а л ь н ы й п р о т о к о л – произвольный протокол $\rho\tau = \langle B, \Omega \rangle$ такой, что его ограничение на A является материалом обучения, т.е. протоколом $\langle A, \Omega \rangle$, и $\langle B, \Omega \setminus S \rangle$ также является подмоделью $\langle B, \Omega \rangle$.

Н а ч а л ь н а я г и п о т е з а Γ есть совокупность всех возможных начальных протоколов для данных $\langle A, \Omega \rangle$, $\langle B, \Omega \setminus S \rangle$.

Результаты одного и того же эксперимента могут быть выражены разными средствами. Пример: разные обозначения для объектов и приборов. Это формализуется через различные совокупности протоколов данного эксперимента в виде упомянутых уже моделей. Формально пример означает следующее. Пусть заданы: эксперимент $\langle \mathbf{B}, \mathbf{\Omega} \rangle$;его протокол $\langle B, \Omega \rangle$, полученный путем обозначения $\forall \mathbf{b} \in \mathbf{B}: \mathbf{b} \to b$, $\forall \mathbf{P}_i \in \mathbf{\Omega}: \mathbf{P}_i \to P_i$, $\bar{\mathbf{P}}_i \to \bar{P}$; множество $B_\varkappa$ такое, что $|B_\varkappa| = |B|$;взаимо-однозначное отображение $\varkappa: B \xrightarrow{1:1} B_\varkappa$, а также определен предикат $P_{\ell\varkappa}$, так что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in B_\varkappa$ имеет место

$$P_{\ell\varkappa}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s) = P_\ell(\alpha_1\varkappa^{-1}, \alpha_2\varkappa^{-1}, \ldots, \alpha_s\varkappa^{-1}).$$

Тогда возникают $\Omega_{æ} = \{P_{1æ}, P_{2æ}, \dots, P_{kæ}\}$, $\langle B_{æ}, \Omega_{æ} \rangle$. $p\tau = \langle B, \Omega \rangle$, $p\tau_{æ} = \langle B_{æ}, \Omega_{æ} \rangle$ - разные протоколы одного и того же эксперимента, все отличие которых состоит в именах объектов и приборов. Тогда $\{\langle B_{æ}, \Omega_{æ} \rangle\}$ – класс всех указанных моделей при произвольных $B_{æ}$ является некоторым классом протоколов данного эксперимента. Отметим, что этим не исчерпываются возможные способы задания протокола одного и того же эксперимента.

Укажем более широкое множество протоколов данного эксперимента. Предварительно приведем некоторые содержательные соображения по этому поводу. Если мы согласны считать некоторую систему с отношениями протоколом данного эксперимента, то и всякую другую систему с отношениями, полученную из данной нетворческим преобразованием, т.е. сохраняющим всю информацию и не вносящим новую, мы также должны считать протоколом данного эксперимента.

Указанные содержательные соображения находят свою формализацию в понятии взаимоопределимости систем с отношениями. Используемые ниже понятия сигнатуры, изоморфизма систем с отношениями и формул прикладного исчисления предикатов даны в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Две системы с отношениями $\langle B, P_1, P_2, \dots, P_k \rangle$ и $\langle D, Q_1, Q_2, \dots, Q_\ell \rangle$ называются взаимоопределимыми, если существуют система с отношениями $\langle B, Q_1, Q_2, \dots, Q_\ell \rangle$, изоморфная $\langle D, Q_1, Q_2, \dots, Q_\ell \rangle$, и формулы прикладного исчисления предикатов $\Phi_1(\Omega), \Phi_2(\Omega), \dots, \Phi_\ell(\Omega)$ сигнатуры $\Omega = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ такие, что

$$\forall x_1, x_2, x_3, \dots x_{s_i} \in B \quad Q_i(x_1, x_2, \dots, x_{s_i}) \Leftrightarrow \Phi_i(\Omega)(x_1, x_2, \dots, x_{s_i}),\ i = 1, 2, \dots \ell,$$

а также формулы прикладного исчисления предикатов сигнатуры $\Omega_1 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_\ell\}$ $\Psi_1(\Omega_1), \Psi_2(\Omega_1), \dots, \Psi_k(\Omega_1)$ такие, что

$$\forall x_1, x_2, x_3, \dots x_{\tau_i} \in B \ P_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\tau_i}) \Leftrightarrow \Psi(\Omega_1)(x_1, x_2 \dots x_{\tau_i}),\ i = 1, 2, \dots k.$$

Пусть $p\tau$ - протокол некоторого эксперимента $\langle B, \Omega \rangle$, тогда множество протоколов, взаимоопределимых с $p\tau$, будем называть множеством эквивалентных протоколов эксперимента $\langle B, \Omega \rangle$ и обозначать X_B.

Обозначим через $\tilde{X}_B$ множество классов, на которые разбивается X_B, отношением эквивалентности E таким, что $E(p\tau_1, p\tau_2)$

тогда и только тогда, когда $p\tau_1$ и $p\tau_2$ одной сигнатуры и изоморфны. Элементы $\tilde{X}_B$ будем обозначать $\tilde{p\tau}$.

2. Решающее правило. Пусть задано некоторое множество экспериментов h . Введем обозначение $X = \bigcup_h X_B$.

Пусть $R(p\tau)$ - функция, принимающая значения 0, I и 2 , определенная на X или некотором его подмножестве, $p\tau \in X$, причем два протокола как аргументы R считаются равными, если они одной сигнатуры и изоморфны, т.е. принадлежат одному E - классу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что указанная функция R является решающим правилом, если существуют $p\tau_1$ и $p\tau_2$ такие, что

$$R(p\tau_1) = 1, \qquad R(p\tau_2) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Протоколы, для которых $R(p\tau) = 1$, будем называть R - допустимыми, для которых $R(p\tau) = 0$ R - недопустимыми.

Если $R(p\tau) = 2$, то это интерпретируется как отказ R принимать решение на $p\tau$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только те решающие правила, которые задаются формулами прикладного исчисления предикатов, некоторой произвольной, но фиксированной сигнатуры Ω , т.е. $R(p\tau) = 1$ тогда и только тогда, когда замкнутая формула прикладного исчисления предикатов $\Phi(\Omega)$ сигнатуры Ω истинна на $p\tau$. Очевидно, что для таких решающих правил выполнено требование $R(p\tau) = R(p\tau_1)$, если $p\tau$ и $p\tau_1$ одной сигнатуры и изоморфны, и можно корректно определить $R(\tilde{p\tau}) \overset{df}{=} R(p\tau)$, $p\tau \in \tilde{p\tau}$.

Введенное понятие решающего правила - это аналог обычного решающего правила, оно утверждает, что возможны допустимые протоколы. Проиллюстрируем это на задаче распознавания образов. Пусть $p\tau_1$ и $p\tau_2 \in \Gamma$. Согласно первому, контрольный объект c относится к одному образу, согласно второму - к другому образу из двух возможных. Если $R(p\tau_1) = 1$ и $R(p\tau_2) = 0$, то это означает, что решающее правило решает в пользу отнесения к первому образу. И тем самым $p\tau_2$, согласно данному R, недопустим. Возможен случай, когда образов три и наше решающее правило допускает $p\tau_1$ и $p\tau_2$, но не допускает $p\tau_3$. Это означает, что

R позволяет сделать вывод, что c не относится к третьему образу и только, т.е. конкретно, к какому из первых образов принадлежит c, сказать нельзя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Решающее правило R будем называть **инвариантным**, если $\forall X_B \in \mathcal{X} \forall \rho\tau, \rho\tau' \in X_B$, $\rho\tau, \rho\tau'$ принадлежат области определения R и $R(\rho\tau) = R(\rho\tau')$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{X} \supset X_{B_1}, X_{B_2}, X_{B_1} \cap X_{B_2} \neq \Lambda \& \exists \rho\tau_1 \in X_{B_1}$, $\rho\tau_2 \in X_{B_2}: R(\rho\tau_1) \neq R(\rho\tau_2)$, то R на данном $\mathcal{X}$ не инвариантно.

Заметим, что если R не инвариантно, то оно как бы конкурирует с самим собой, т.е. например,

$$\exists \rho\tau, \rho\tau', \in X_B: R(\rho\tau) = 1 \ \& R(\rho\tau') = 0. \qquad (I)$$

Приняв, что все элементы X_B равноправные протоколы эксперимента $\langle B, \Omega \rangle$, мы оказываемся перед дилеммой: что считать значением R. В качестве примера приведем решающее правило, согласно которому в признаковом пространстве вычисляются евклидовы расстояния от контрольного объекта до эталонов соответствующих образов. Контрольный объект относится к тому образу, которому соответствует минимум этих расстояний. Если значения некоторого признака указаны в вольтах, а другого в дециметрах, то, указав эти значения соответственно, в милливольтах и в миллиметрах, мы ничего не изменим содержательно, но евклидовы расстояния могут существенно измениться, что может повлечь изменения принимаемого решения, т.е. привести к (I). В этом можно убедиться на таком простейшем примере. Пусть обучающая выборка первого образа при измерении одного параметра в дециметрах, другого – в вольтах, состоит из единственного элемента $X_1 = (0,1)$, обучающая выборка второго образа состоит из $X_2 = (2,0)$ и контрольный объект c равен (0,0). Тогда c, согласно данному решающему правилу, будет отнесено к первому образу. В случае же измерения в миллиметрах и милливольтах $X_1 = (0,1000)$, $X_2 = (200,0)$, $c = (0,0)$ и тем самым c будет отнесено ко второму образу, т.е. имеет место (I).

3. **Критерий предпочтения.** Пусть задано произвольное $R = \Phi(\Omega)$, оно может быть неинвариантным, и пусть M^1 – мощность множества классов протоколов $\tilde{\rho\tau} \in \tilde{X}_B$, таких, что $R(\tilde{\rho\tau}) = 1$, и M^0 – мощность множества классов протоколов $\tilde{\rho\tau} \in \tilde{X}_B$ таких, что $R(\tilde{\rho\tau}) = 0$.

Если $M^1 > M^0$, то примем значение R на X_B равным I и будем использовать обозначение $R(X_B) = 1$, в противном случае, т.е. при $M^1 < M^0$, $R(X_B) = 0$.

Равенству $M^0 = M^1$ соответствует отказ от принятия решения и $R(X_B) = *$. Пусть заданы решающие правила R_1 и R_2 такие, что $R_1(X_B) = 1$ и $R_2(X_B) = 0$ для данного X_B. Какое из этих решающих правил предпочесть при данном X_B?

В предположении конечной мощности $\tilde{X}_B$ критерий K может быть сформулирован так.

Если $\frac{M_1^1}{M_1^0} > \frac{M_2^0}{M_2^1}$, то отдадим предпочтение R_1 на X_B, в противном случае т.е. если $\frac{M_1^1}{M_1^0} < \frac{M_2^0}{M_2^1}$, R_2. В случае, когда $M_1^0 = 0$, $M_2^0 \neq 0$, предпочтение отдается R_1. Принятое здесь предположение конечной мощности $\tilde{X}_B$, удовлетворяется тем, что мы ограничили наше рассмотрение решающими правилами, выражаемыми формулами прикладного исчисления предикатов $\Phi(\Omega)$.

Теперь после того, как формализован критерий предпочтения, можно говорить об интерпретации его как принципа независимости от описания. Переход от одного протокола из X_B к другому – это переход к другим средствам описания. Введенное нами упорядочение решающих правил, например в случае для X_B и R_1, R_2, когда $\frac{M_1^1}{M_1^0} > \frac{M_2^0}{M_2^1}$, как раз и призвано выражать тот факт, что R_1 "меньше" зависит от конкретных средств описания, проявляет по отношению к ним "большую" инвариантность, "более" стабильно. Мы отдаем предпочтение тому решающему правилу, которое **меньше противоречит** "полному" принципу инвариантности относительно описания. Этот принцип выражен в определении инвариантного решающего правила. Можно обнаружить некоторую связь данного подхода с точкой зрения, распространенной в физике по отношению к разного рода инвариантам. Так Е.Вигнер в [3, стр. 22-23] по поводу конкурирующих законов пишет: "...можно сказать, что если бы мы знали все законы или один всеобъемлющий закон природы, то свойства инвариантности этих законов не давали бы нам ничего нового... Но если бы кто-нибудь предложил какой-то другой закон природы, то опровергать его мы могли бы более эффективно, если бы он противоречил нашему принципу инвариантности (разумеется, в предположении, что мы уверены в правильности этого принципа инвариантности)".

Литература

1. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. М., 1970.

2. ГАВРИЛКО Б.П., ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф. Уточнение гипотезы простоты. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.37. Новосибирск, 1969, с. 3-9.

3. ВИГНЕР Е. Этюды о симметрии. М., 1971.

4. САМОХВАЛОВ К.Ф. О теории эмпирических предсказаний. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 55. Новосибирск, 1973, с.3-35.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 ноября 1974 года