

УДК 51:155.001.57

## О ЦИКЛИЧЕСКИХ ШКАЛАХ

Б.Я. Ковалерчук

Все методы распознавания образов оперируют результатами экспериментов над теми или иными эмпирическими объектами. Наиболее распространенным способом описания этих результатов является представление их в числовой форме (измерение эмпирических характеристик, признаков). Обращение к числам имеет не только свои преимущества, связанные с удобством оперирования с ними, но и свои недостатки. Так возникает один из аспектов проблемы исходного описания в распознавании образов. Обязательно должно указываться, как сопоставляются эмпирическим объектам числа, как устанавливается соответствие между эмпирическими и числовыми отношениями. В терминологии [1] должна решаться проблема представления в виде установления соответствующей теоремы представления. В этой же терминологии задача установления на них возможностей оперировать с этими числами и отношениями на них называется проблемой единственности.

Отсутствие должного внимания к этим вопросам может стать и уже становилось источником ошибок при распознавании. Простейшим примером этого может служить задача: если измеряются азимуты и мера сходства между азимутами в  $1^\circ$  и  $359^\circ$  вычисляется так же, как между длинами в 1 м и 359 м, то получается  $358^\circ$  вместо фактических  $2^\circ$ .

Отмеченные факты ведут к необходимости тщательного анализа типов измерений, используемых в распознавании, например, в связи с вычислением мер близости. В теории измерений [1], хотя и возникшей без непосредственной связи с проблематикой распознавания образов, изучено довольно много часто употребляемых ти-

пов измерений (шкалы отношений, интервалов и т.д.). В то же время не рассмотрены весьма употребительные нелинейные циклические измерения (сюда относятся уже упоминавшиеся азимуты). Данная работа посвящена именно этим циклическим измерениям. В ней вводится понятие циклической системы с отношениями. Приводятся интерпретации этой системы: математическая (циклические графы) и эмпирические (геологические: азимут падения и направление разлома). Устанавливается теорема представления для этой системы. Проблема единственности рассматривается в связи с требованием линейных преобразований для шкал, возникающим во многих прикладных задачах. Вводится понятие ослабленного допустимого преобразования, и показано, что для конструируемой здесь циклической шкалы линейные преобразования являются ослабленными допустимыми преобразованиями.

#### Циклические системы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Систему с отношением  $L(\dots)$ ,  $A = \langle A; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, L(\dots) \rangle$  будем называть **циклической**, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1.  $\forall x \exists a_i L(x, a_i, x, x)$ ;
2.  $\forall x, y, w, u, a_i [L(x, a_i, x, x) \& L(x, y, w, u)] \Leftrightarrow L(a_i, y, w, u)$ ;
3.  $\forall x, y, w, u, a_i [L(y, a_i, y, y) \& L(x, y, w, u)] \Leftrightarrow L(x, a_i, w, u)$ ;
4.  $\forall x, y, w, u, a_i [L(w, a_i, w, w) \& L(x, y, w, u)] \Leftrightarrow L(x, y, a_i, u)$ ;
5.  $\forall x, y, w, u, a_i [L(u, a_i, u, u) \& L(x, y, w, u)] \Leftrightarrow L(x, y, w, a_i)$ ;
6.  $\forall a_i, a_j, a_r, a_s L(a_i, a_j, a_r, a_s) \Leftrightarrow \rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_r, a_s)$ ;

$$\rho(a_i, a_j) = \begin{cases} |i - j|, & \text{если } |i - j| \leq \frac{k}{2}, \\ k - |i - j|, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (I)$$

Здесь  $k$  - число выделенных элементов.

Последняя аксиома есть сокращенная запись значений принимаемых  $L$  на выделенных элементах. Содержательный смысл аксиом станет понятен в дальнейшем из интерпретаций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.  $x \stackrel{L}{\sim} y \Leftrightarrow L(x, y, x, x)$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ I.  $\stackrel{L}{\sim}$  есть отношение эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1.  $x \stackrel{L}{\sim} x \Leftrightarrow L(x, x, x, x)$ . По требованиям 2-5,  $L(x, x, x, x) \Leftrightarrow L(a_i, a_i, a_i, a_i) \& L(x, a_i, x, x)$ . Последнее истинно, это следует из требования I и (I).

2.  $x \stackrel{L}{\sim} y, \& y \stackrel{L}{\sim} z \Rightarrow x \stackrel{L}{\sim} z$ ;

$$x \stackrel{L}{\sim} y, \& y \stackrel{L}{\sim} z \Leftrightarrow L(x, y, x, x) \& L(y, z, y, y) \Leftrightarrow L(a_i, a_j, a_r, a_s) \&$$

$$L(x, a_i, x, x) \& L(y, a_j, y, y) \& L(y, a_r, y, y) \& L(z, a_s, z, z) \& L(a_j, a_r, a_s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i \stackrel{L}{\sim} a_j \& a_j \stackrel{L}{\sim} a_r \Rightarrow a_i \stackrel{L}{\sim} a_r.$$

Это следует из (I) и требования I, так как  $L(a_i, a_j, a_i, a_i) \Leftrightarrow a_i \stackrel{L}{\sim} a_j$ .

3.  $x \stackrel{L}{\sim} y \Leftrightarrow y \stackrel{L}{\sim} x$ ;

$$x \stackrel{L}{\sim} y \Leftrightarrow L(x, y, x, x) \Leftrightarrow L(a_i, a_j, a_i, a_i) \& L(x, a_i, x, x) \& L(y, a_j, y, y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(a_j, a_i, a_j, a_j) \& L(x, a_i, x, x) \& L(y, a_j, y, y) \Leftrightarrow L(y, x, y, y) \Leftrightarrow y \stackrel{L}{\sim} x.$$

Здесь использовано  $L(a_i, a_j, a_i, a_i) \Leftrightarrow (a_j, a_i, a_j, a_j)$ .

Утверждение доказано.

Поскольку  $\stackrel{L}{\sim}$  является эквивалентностью, то  $A$  можно факторизовать по  $\stackrel{L}{\sim}$ . Возникает фактор-система  $A/\stackrel{L}{\sim}$  со следующими элементами - фактор-классами:  $[a_1] = \{x: x \stackrel{L}{\sim} a_1\}$ ,  $[a_2] = \{x: x \stackrel{L}{\sim} a_2\}$ , ...,  $[a_k] = \{x: x \stackrel{L}{\sim} a_k\}$ . Других фактор-классов нет (требование I).

Соответственно возникает отношение  $L$ :

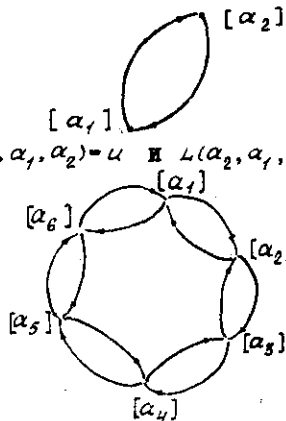
$$L([a_i], [a_j], [a_r], [a_s]) \Leftrightarrow L(x, y, w, u) \& x \stackrel{L}{\sim} a_i \& y \stackrel{L}{\sim} a_j \& w \stackrel{L}{\sim} a_r \& u \stackrel{L}{\sim} a_s.$$

Корректность такого определения следует из требований 2 - 5, тем самым  $\stackrel{L}{\sim}$  - даже конгруэнтность.

$$A/\stackrel{L}{\sim} = \langle \{[a_1], [a_2], \dots, [a_k]\}; [a_1], [a_2], \dots, [a_k], L(\dots) \rangle,$$

таким образом,  $A/\stackrel{L}{\sim}$  - конечная система, и во многих случаях удобно оперировать с ней, а не с  $A$ .

Интерпретация циклическими графами. Если  $[a_1], [a_2], \dots, [a_k]$  интерпретировать как вершины некоторого конечного ориентированного графа без петель таким образом, что наличие ориентированного ребра из вершины  $[a_i]$  в вершину  $[a_j]$ , отличную от  $[a_i]$ , определяется истинностью  $\forall a_x \neq a_i L(a_i, a_j, a_x, a_x)$ , то при  $k=1$  граф сведется к единственной вершине без всяких ребер, при  $k=2$



так как  $L(a_1, a_2, a_1, a_2) = \mu$  и  $L(a_2, a_1, a_2, a_1) = \mu$ . При  $k > 3$  будут графы вида

то есть ребра существуют лишь между  $[a_i]$  и  $[a_{i+1}]$ , а также  $[a_k]$  и  $[a_1]$ . Это легко усматривается из определения  $L$ . Очевидно, что это есть циклический граф.

Докажем строго цикличность описанного выше графа. Покажем, что существует ребро из  $[a_i]$  в  $[a_{i+1}]$ , то есть  $\forall a_x \neq a_i L(a_i, a_{i+1}, a_x, a_x) = \mu$ . Так как случаи  $k=1, 2$  уже рассмотрены, пусть  $k \geq 3$ . Здесь достаточно проверить  $\rho(a_i, a_{i+1}) \leq \rho(a_i, a_x)$  ( $i \neq x$ ). Имеем  $\rho(a_i, a_{i+1}) = 1$ , ввиду  $\frac{3}{2} \leq \frac{k}{2}$ .

Теперь убедимся, что  $\rho(a_i, a_x) \geq 1$  ( $x \neq i$ ). Если  $|i-x| \leq \frac{k}{2}$ , то так как  $(i \neq x) \Rightarrow |i-x| \geq 1$ , то  $\rho(a_i, a_x) \geq 1$ . В противном случае  $\rho(a_i, a_x) \geq 1$ , так как  $(k > i+1 \ \& \ k > x+1) \Rightarrow (k - |i-x| \geq 1)$ . Таким образом,  $\rho(a_i, a_{i+1}) \leq \rho(a_i, a_x) \Rightarrow L(a_i, a_{i+1}, a_i, a_x)$ . Повторением этих рассуждений доказывается существование ребер из  $[a_{i+1}]$  в  $[a_i]$ , из  $[a_k]$  в  $[a_1]$ , из  $[a_1]$  в  $[a_k]$ .

Осталось показать отсутствие ребер для  $a_i$  и  $a_j$ , таких что  $i \neq j, |i-j| \neq 1$ , и либо  $(i \neq k, j \neq 1)$ , либо  $(i \neq 1, j \neq k)$ , то есть  $\exists a_x \neq a_i L(a_i, a_j, a_i, a_x) = \lambda$ . Для этого достаточно взять  $x: |i-x|=1$ , здесь  $\rho(a_i, a_j) > 1$  и  $\rho(a_i, a_x) = 1$ . Таким образом,  $\rho(a_i, a_j) \not\leq \rho(a_i, a_x) \Rightarrow L(a_i, a_j, a_i, a_x) = \lambda$ , то есть ребра нет.

На этом графе  $\rho([a_i], [a_j])$  можно проинтерпретировать как длину кратчайшего маршрута из  $[a_i]$  в  $[a_j]$ . Само  $L([a_i], [a_j], [a_x], [a_x])$  истинно лишь в случае, когда кратчайший маршрут из  $[a_i]$  в  $[a_j]$  не больше кратчайшего маршрута из  $[a_x]$  в  $[a_j]$ .

Эмпирические интерпретации. Требуется указать прибор, реализующий  $L$  на объектах из некоторого эмпирического множества  $A$ .

Схему прибора  $L$  можно представить в виде двух блоков: блока идентификации и блока определения значения  $L$ .

Блок идентификации. Фиксируются  $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ . На вход прибора подаются  $x, y, w, u \in A$ . Каждому из них сопоставляется одно из  $a_i: a_1, a_2, \dots, a_k$ , причем всегда одно и то же, независимо от того, вместе с какими другими элементами он подан на вход. Например, так:  $x - a_i, y - a_j, w - a_x, u - a_s$ .

Блок определения значения  $L$ . Здесь определяется значение  $L(a_i, a_j, a_x, a_s)$ , и оно выделяется как значение  $L(x, y, w, u)$ . Значения же  $L(a_i, a_j, a_x, a_s)$  должны соответствовать требованию 6.

Рассмотрим геологические интерпретации.

1. Азимут падения. Пусть  $A$  - совокупность участков земной поверхности таких, что для каждого из них можно говорить о направлении наклона в какую-то определенную сторону, то есть об азимуте падения.  $\rho(x, y)$  здесь интерпретируется как величина меньшего из углов, образуемых направлениями

$x$  и  $y$  в пределах точности измерения, фиксируемой выделенными элементами.

Блок идентификации. В качестве  $a_1, a_2, \dots, a_k$  выберем, например, участки с азимутами падения  $\left(\frac{360}{k}\right)^0, \left(2\frac{360}{k}\right)^0, \dots, \left(i\frac{360}{k}\right)^0, \dots, 360^0$ . Если азимут падения для участка  $x$  между  $\left(\frac{360}{k}i\right)^0$  и  $\left(\frac{360}{k}(i+1)\right)^0$ , то идентифицируем его с  $\left(\frac{360}{k}i\right)^0$ . В конкретной задаче выбор  $a_i$  и способ идентификации определяются ее условиями.

Блок определения значения  $L$ . Значение присваивается в соответствии с выражением  $L(a_i, a_j, a_k, a_s) \Leftrightarrow p(a_i, a_j) \leq p(a_k, a_s)$ . Очевидно, что это находится в полном соответствии с требованием 6.

Технически эта схема может реализовываться самыми разными способами, в том числе с использованием компаса. Но эти вопросы выходят за рамки нашего рассмотрения. Содержательно, при данной интерпретации, значения  $L$  дают ответ на вопрос, для какой из пар участков земной поверхности азимуты падения сильнее отличаются.

2. Направление разлома. Пусть  $A$  - совокупность таких участков земной поверхности с разломами, что для каждого участка можно говорить о направлении разлома, причем в отличие от азимута падения противоположные направления: северное и южное, восточное и западное и т.д. — одни и те же. С учетом этого замечания выбираются  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Интерпретация  $L$  здесь аналогична предыдущей, поэтому её подробное рассмотрение опускается.

### Проблема представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Упорядоченная тройка  $\langle A, N, f \rangle$  называется шкалой, если система с отношениями  $A$  при помощи  $f$  гомоморфно отображается в систему с отношениями  $N$ , опорным множеством которой является множество всех вещественных чисел  $[I]$ .

Пусть задана числовая система с отношениями и выделенными элементами:

$$N_{n_1, \alpha} = \langle N; n_1, n_2, \dots, n_k, \mathcal{L}_{n_1, \alpha}(\dots) \rangle,$$

где  $N$  — множество вещественных чисел;  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — выделенные элементы.

$$\mathcal{L}_{n_1, \alpha}(n, m, p, q) \Leftrightarrow n = n_i \& m = n_j \& p = n_k \& q = n_s \& \tilde{p}(n, m) \leq \tilde{p}(p, q),$$

где

$$\tilde{p}(n, m) = \begin{cases} \frac{|n-m|}{|\alpha|}, & \text{если } \frac{|n-m|}{|\alpha|} \leq \frac{k}{2}, \\ \frac{|n-m|}{|\alpha|}, & \text{если } \frac{|n-m|}{|\alpha|} > \frac{k}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\forall i, n_{i+1} = n_i + \alpha$ , то есть  $n_i = n_1 + (i-1)\alpha$ . (3)

$f_{n_1, \alpha}: A \rightarrow N, \forall x \in [a_i] x = n_i$ . Очевидна корректность такого определения  $f_{n_1, \alpha}$ , так как  $\forall i, j (i \neq j) [a_i] \neq [a_j] \& \exists x (x \in [a_i] \& x \in [a_j])$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.  $\langle A, N_{n_1, \alpha}, f_{n_1, \alpha} \rangle$  — шкала для любых  $k, n_1, \alpha \neq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать

$$\forall i, j, r, s (L(a_i, a_j, a_r, a_s) \Rightarrow \mathcal{L}_{n_1, \alpha}(n_i, n_j, n_r, n_s)), \quad (4)$$

то есть наличие гомоморфизма  $A$  в  $N_{n_1, \alpha}$ . Воспользовавшись (3),  $\tilde{p}(n_i, n_j)$  можно представить в виде:

$$\tilde{p}(n_i, n_j) = \begin{cases} |i-j|, & \text{если } |i-j| \leq \frac{k}{2}, \\ k|i-j|, & \text{если } |i-j| > \frac{k}{2}, \end{cases}$$

сравнив  $\tilde{p}(n_i, n_j)$  с требованием 6, получим искомый результат. В терминологии [I] доказана теорема представления.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть  $N_{1,0} = \langle N; 1, 2, \dots, k, \mathcal{L}(\dots) \rangle$ , тогда  $\langle A, N_{1,0}, f_{1,0} \rangle$  — шкала.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть  $k = 360$ , тогда

$$\langle N; 0, 1, 2, \dots, 359, \mathcal{L}(\dots) \rangle = N_{0,1}$$

Здесь выделенные элементы можно интерпретировать как градусы.

### Ослабленные допустимые преобразования

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Шкала  $\langle A, N_{n_1, \alpha}, f_{n_1, \alpha} \rangle$  называется циклической.

У циклической шкалы нет линейных допустимых преобразований, кроме тождественного. В то же время многие, существующие методы распознавания образов ориентированы на линейные преобразования, связанные, например, с нормированием величин.

Выйти из этого положения можно, воспользовавшись следующим.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.** Отображение  $\varphi$  будем называть ослабленным допустимым преобразованием шкалы  $\langle A, N_1, f \rangle$  в шкалу  $\langle A, N_2, g \rangle$ , если  $g = \varphi(f)$ .

В отличие от определения допустимого преобразования [1] здесь, вообще говоря,  $N_1 \neq N_2$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Линейное отображение  $\varphi$  такое, что  $\varphi(n) = \gamma n + \delta$  ( $\gamma \neq 0$ ), является ослабленным допустимым преобразованием  $\langle A, N_{n_1, \alpha}, f_{n_1, \alpha} \rangle$  в  $\langle A, N_{\varphi(n_1), \beta}, f_{\varphi(n_1), \beta} \rangle$ ,  $\beta = \gamma \cdot \alpha$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Требуется показать, что  $f_{\varphi(n_1), \beta} = \varphi(f_{n_1, \alpha})$ , то есть  $\forall \alpha f_{\varphi(n_1), \beta}(\alpha) = \varphi(f_{n_1, \alpha}(\alpha))$ .

Пусть  $\alpha \in [a_i]$ , тогда  $\varphi(f_{n_1, \alpha}(\alpha)) = \varphi(f_{n_1, \alpha}(a_i)) =$

$$\varphi(n_i) = \gamma n_i + \delta = \gamma(n_1 + (i-1)\alpha) + \delta = \gamma n_1 + \delta + (i-1)\alpha \cdot \gamma = \varphi(n_1) + (i-1)\alpha \cdot \gamma$$

$$\text{и } f_{\varphi(n_1), \beta}(\alpha) = f_{\varphi(n_1), \beta}(a_i) = n_i = \varphi(n_1) + (i-1)\beta = \varphi(n_1) + (i-1)\gamma \cdot \alpha,$$

что и требовалось доказать.

**СЛЕДСТВИЕ.**  $N_{\varphi(n_1), \beta} = \langle N; \varphi(n_1), \varphi(n_2), \dots, \varphi(n_k), \mathcal{L}_{\varphi(n_1), \beta}(\dots) \rangle$ .

Таким образом, линейное преобразование переводит циклическую шкалу в циклическую. Но в отличие от случая, когда  $\varphi$ -допустимое преобразование, здесь  $\mathcal{L}_{\varphi(n_1), \beta} \neq \mathcal{L}_{n_1, \alpha}$ , то есть отображение заставляет переходить к другой формуле, соответствующей эмпирическому отношению  $L(\dots)$ .

**ПРИМЕР.** Пусть  $\mathcal{X}_1 = \langle N; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \mathcal{L}_{1,1}(\dots) \rangle$  и  $\mathcal{X}_2 = \langle N; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \mathcal{L}_{2,2}(\dots) \rangle$ , тогда  $\mathcal{L}_{1,1}(2, 8, 2, 6) = 1$ , а  $\mathcal{L}_{2,2}(2, 8, 2, 6) = 0$ .

### Л и т е р а т у р а

И. П. СУПНЕС, Дж. ЗИНЕС. Основы теории измерений. - В сб. "Психологические измерения", М., 1967.

Поступила в ред.-изд.отд.

12 апреля 1973 г.