УДК 519.1

АНАЛИЗ СВЯЗНОСТИ НЕОГРАФОВ

В.А. Скоробогатов

Задачу анализа связности неориентированных графов можно считать достаточно хорошо исследованной: известны работы [1-6], в которых предлагаются алгоритмы со сложностью $O(n^2)$ [2,6], $O[max(n,m)]$[4,5]. Однако во всех этих работах не проявляется специальной заботы о том, чтобы время решения задачи зависело от некоторых характеристик графа, что позволяло бы находить наилучший режим решения для каждого наперед заданного графа. Особенно это существенно, когда приходится иметь дело с классом графов, у которых имеется значительный разброс по упомянутым характеристикам. Такая ситуация имеет место, например, при оптимальном проектировании изделий "на заказ", когда требуется в каждом конкретном случае выполнить "заказ" наилучшим образом, а не получить оптимальный результат "для большинства" изделий из всего класса. Наиболее близкий подход описан в [2], где приводится алгоритм нахождения мостов, а необходимость исследования такого рода алгоритмов отмечается в [1].

В настоящей работе исследуется возможность построения алгоритма анализа связности неографов, который позволяет находить точки сочленения, мосты и блоки. Основное внимание уделено точкам сочленения. Мосты и блоки легко получаются попутно при реализации алгоритма на ЭВМ.

Пусть $G=(X,\Gamma)$ – неограф порядка n с m некратными ребрами без петель. Пусть $X_1 \subseteq X$ и $n_1 = |X_1|$.

В [7] рассматривалось разложение графа относительно некоторого подмножества $X_1 \subseteq X$, определяемое следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. $X_1 \in X;\ \hat{X}=\{X_i / i=\overline{1,k}\},\ X_i \cap X_j = \phi,\ i\neq j;\ \bigcup_{i=1}^{k} X_i = X;$ $x\in X_i <=> d(x_0,x)=i,\ x_0\in X_1,\ x\notin X_1$, где $d(x_0,x)$ – расстояние между вершинами x_0 и x (для любого x хотя бы одно x_0 всегда существует). Обозначим через $\hat{X}_\lambda(X_1)$ и $\hat{G}_\lambda(X_1)$ соответственно λ-разбиение множества вершин X графа G и λ-разложение графа относительно подмножества вершин X_1:

$$\hat{X}_\lambda(X_1)=\{X_1,\dots,X_i,\dots,X_n\},$$

$$\hat{G}_\lambda(X_1)=\{G_1(X_1),\dots,G_i(X_1),\dots,G_k(X_1)\}.$$

С в о й с т в о I. В λ-разложении $\hat G(X_1)$ связного графа G $\forall x\in X_i, \exists y\in X_{i-1}, i>0, (x \doteq y)$, где символ "$\doteq$" означает, что x смежно y.

В множестве $\mathscr{X}_\lambda(X)=\{\hat X_v\}, |\mathscr{X}_\lambda|=2^{n-1}$, выделим класс разбиений относительно отдельных вершин (класс единичных разбиений)

$$\mathscr{X}_{\lambda,1}(X)=\{\hat X_\theta \mid \theta=\overline{1,n}\}, \quad X=\{x_i \mid i=1,n\}.$$

Рассмотрим понятия, возникающие в связи с λ-разбиениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.

$$G_i(x)=[X_i(x), \Gamma_i(x)],\ \Gamma_i(x)\subseteq X_i\times X_i,\ i=\overline{1,k(x)},$$

где $k(x)$ – длина разложения $\hat G(x)$ и $\forall y\in X_i(x), d(x,y)=i$.

Подграф графа G в разложении $\hat G(x)$ обозначается $G_i(x)$.

Дальше, если речь будет идти только о разбиении относительно вершины x, то вместо $X(x), G(x), \Gamma(x)$ будем иногда писать X, G, Γ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подграф $G_{i-1,i}$ графа G в разложении $\hat G$ определим следующим образом:

$$G_{i-1,i}=[X_{i-1,i}, \overline{\Gamma}_{i-1,i}],\ i>1;$$

$$X_{i-1,i}=X_{i-1}\cup X_i;$$

$$\overline{\Gamma}_{i-1,i}=\Gamma_i\cup\Gamma_{i-1}\cup\Gamma_{i-1,i};$$

$$\Gamma_{i-1,i}\subseteq X_i\times X_{i-1}.$$

Компоненты связности в графе G_i обозначим через $C_{i,\ell}(x) = (X_{i,\ell}\,\Gamma_{i,\ell})$, $\ell=\overline{1,\xi_i}$. Разбиение X_i по связности G_i будем обозначать через $\hat X_i^C(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.

$$X_i(x)=P_i(x)\cup T_i(x),\ i=\overline{1,k(x)},\ P_i(x)\cap T_i(x)=\phi;$$

$$\forall z\in T_i(x),\ \neg\exists y\in X_{i+1}(x),\ (z\doteq y);$$

$$\forall z\in P_i(x),\ \exists y\in X_{i+1}(x),\ (z\doteq y).$$

Множества $T_i(x)$ назовем тупиковыми, а множества $P_i(x)$ – нетупиковыми. Очевидно, что $X_1(x)=x$ и поэтому $T_1(x)=\phi$, аналогично $X_k(x)=T_k(x)$, поэтому $P_k(x)=\phi$.

Точки сочленения будем искать при помощи некоторой рекуррентной процедуры разбиения множества $X_i(x)$.

Пусть $\hat X_i(x)=\{X_{i,\tau_i}(x)/\tau_i=\overline{1,\tau_i(x)}\}$ – некоторое произвольное разбиение $X_i(x)$. Определим разбиение $\hat X_{i-1}(x)$ через разбиение $X_i(x)$. Для этого определим $\hat P_{i-1}(x)$ в зависимости от $\hat X_i(x)$ *):

$$\hat P_{i-1}=\{P_{i-1,\tau_{i-1}}/\tau_{i-1}=\overline{1,\tau_{i-1}}\}, \qquad (I)$$

$$\hat P_{i-1}=\{\Gamma_{i-1,i}[X_{i,\tau_i}]/\tau_i=\overline{1,\tau_i}\}\ ^{**)} \qquad (2)$$

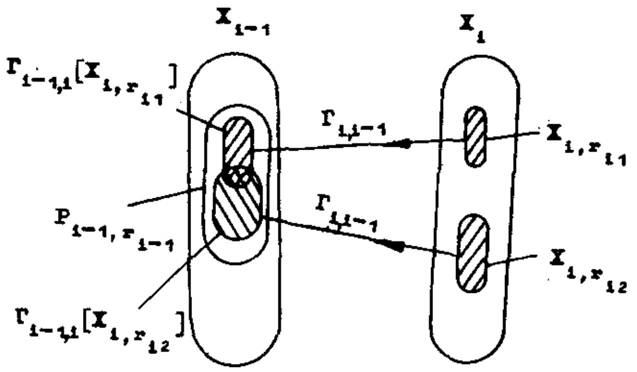
Следующие правила позволяют получить множества P_i из (I), (2) (см. рис. Iа,б).

Если $\{X_{i,\tau_i}\}$ – семейство множеств из X_i такое, что попарные пересечения множеств $\Gamma[X_{i,\tau_i}]$ непусты, то в P_{i-1} существует $P_{i-1,\tau_{i-1}}$, равное объединению этих множеств. (3)

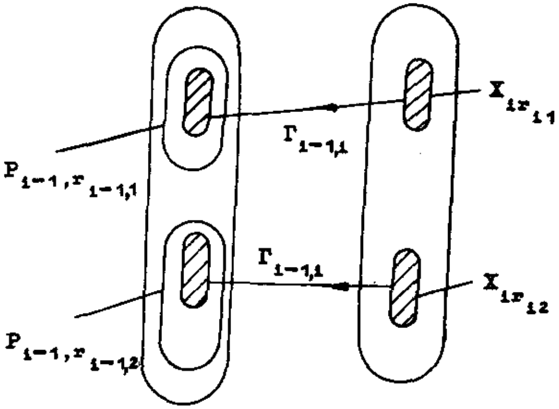
Если $\{X_{i,\tau_i}\}$ – семейство множеств из X_i такое, что попарные пересечения множеств $\Gamma[X_{i,\tau_i}]$ пусты, то в P_{i-1} существует семейство множеств $\{P_{i-1,\tau_{i-1}}\}$, где $P_{i-1,\tau_{i-1}}=\Gamma[X_{i,\tau_i}]$. (4)

*) Разбиение $\hat X(x)$ не порождает разбиения тупикового множества $T_{i-1}(x)$.

**) Запись $\Gamma_{i-1,i}[X_{i,\tau_i}]$ означает подмножество вершин множества X_{i-1}, каждая из которых смежна хотя бы одной вершине из X_{i,τ_i}. Это подмножество может быть названо образом X_{i,τ_i} в X_{i-1}.



а)



б)

Рис. I

Учитывая связность подграфа G_{i-1}, определим дальше $\hat{X}_{i-1}$ следующим образом:

$$\hat{X}_{i-1} = \Gamma_{i-1}[\hat{G}^{C}_{i-1},\ \hat{P}_{i-1}]. \qquad (5)$$

Здесь $\hat{G}^{C}_{i-1}$ – разбиение подграфа G_{i-1} на компоненты связности:

$$\hat{G}^{C}_{i-1}=\{C_{i-1,\ell_{i-1}} \,/\, \ell_{i-1}=\overline{1,s_{i-1}}\},$$

где $C_{i-1,\ell_{i-1}}$ есть ℓ_{i-1}-я компонента связности подграфа G_{i-1}, а $\hat{P}_{i-1}$ из (2).

Выражение (5) можно переписать в виде

$$\hat{X}_{i-1} = \Gamma_{i-1}[\{C_{i-1,\ell_{i-1}}\},\{P_{i-1,r_{i-1}}\}]. \qquad (6)$$

Рассмотрим последовательность множеств

$$Z=\{z_{\nu} \,/\, \nu=\overline{1,\ell_{i-1}+r_{i-1}}\}$$

такую, что в ней все z с четными (нечетными) индексами есть некоторые $C_{i-1,\ell_{i-1}}$, а все z с нечетными (четными) индексами есть $P_{i-1,r_{i-1}}$, причем различным индексам ν соответствуют различные индексы ℓ_{i-1} и r_{i-1}. Тогда z есть ц е п ь, соединяющая z_1 с $z_{\ell_{i-1}+r_{i-1}}$, если для любого ν, $1\le\nu\le\ell_{i-1}+r_{i-1}-1$, имеем $z_{\nu}\cap z_{\nu+1}\ne\emptyset$. Цепь может состоять из единственного элемента либо C, либо P. Совокупность множеств называется системой сцепленных множеств (сцепленной системой), если любые два множества, принадлежащие этой совокупности, могут быть соединены цепью. Множества $X_{i-1,r_{i-1}}(x)\in\hat{X}_{i-1}(x)$ из (6) могут быть получены объединением множеств, принадлежащих с ц е п л е н н ы м системам.

Разбиение $\hat{X}_{i-1}$ получено из разбиения $\hat{X}_i$, этим определен шаг рекуррентной по i процедуры. Чтобы задать процедуру полностью, определим начальное разбиение при $i=k$ следующим образом:

$$\hat{X}_k=\{C_{k,\ell_k} \,/\, \ell=\overline{1,s_k}\}. \qquad (7)$$

Начиная с $i=k$, при начальном разбиении из (7) можно получить разбиения всех множеств $X_k, X_{k-1},\dots, X_2$. Последнее множество X_1 всегда будет состоять из единственной вершины x.

ТЕОРЕМА I. П у с т ь Y – м н о ж е с т в о т о ч е к с о ч л е н е н и я, т о г д а

$$\forall i;\ i=\overline{2,k},\ Y\cap T_i=\emptyset.$$

Пусть $t\in T_i$, тогда вершина t либо висячая, либо не висячая. Если t висячая, то она не точка сочленения. Если t не висячая, то тогда любая $u\in X_i$, $u\ne t$, соединена с x по меньшей мере одной цепью, не проходящей через t (из свойства I). Таким образом, точки сочленения могут принадлежать только либо множествам нетупиковым, либо X_1, т.е. x может быть точкой сочленения.

Обозначим через T_G объединение тупиковых множеств по всему классу единичных разбиений и назовем его тупиковым множеством графа. Из теоремы I вытекает

СЛЕДСТВИЕ I. $Y \cap T_G = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2. Никакое $T' \subseteq T$ не есть множество сочленения.

Следует из определений I и 4.

ТЕОРЕМА 3. Для всех $i, z_i, i>1$ любое $P_{i,z_i} \in S$, где S – совокупность множества сочленения G.

Понятно, что любое $\Gamma_{i-1,i}[X_i, z_i]$ есть множество сочленения, так как $\Gamma_{k-1,k}[X_k, z_k]$ – множество тех и только тех вершин из X_{k-1}, которым смежны вершины из X_{k,z_k}. Аналогично, при любом $i>1$ множество X_{i,z_i} есть система сцепленных множеств, а $\Gamma_{i-1,i}[X_{i,z_i}]$ есть множество тех и только тех вершин в X_{i-1}, которым смежны вершины из X_{i,z_i}, поэтому при удалении $\Gamma_{i-1,i}[X_{i,z_i}]$ соответствующий подграф отделяется от остатка. Отсюда следует, что P_{i,z_i}, полученные из (4), есть множества сочленения.

Очевидно, что P_{i,z_i}, полученные из (3), также есть множества сочленения. Действительно, в данном случае P_{i,z_i} есть объединение множеств $\Gamma_{i+1,i}[X_{i+1,z_{i+1}}]$, пересечения которых пусты. Поскольку каждое множество, входящее в объединение, есть множество сочленения, то объединение их также есть множество сочленения. Значит, любое P_{i,z_i} есть множество сочленения.

Пусть $Z_i \subseteq X_i$ – система сцепленных множеств, состоящая из компонент C и множества P.

Рассмотрим подграф $G_{i,\dots,k} = (X_{i,\dots,k}\Gamma_{i,\dots,k})$, где $X_{i,\dots,k} = \bigcup_{j=i}^{k} X_j$, $\Gamma_{i,\dots,k} = \bigcup_{i=i}^{k} \Gamma_{i,i+1}$, а $\Gamma_{k+1} = \Gamma_{k,k+1} = \emptyset$.

ЛЕММА. Для любой пары вершин $x, y \in Z_i$ в графе $G_{i,\dots,k}$ существует цепь, соединяющая x с y.

Легко видеть, что при любом i все возможные ситуации исчерпываются следующим перечнем, вытекающим из определения сцепленной системы Z_i:

I. $x, y \in C$, $x, y \notin P$;

2. $x, y \in P$, $x, y \notin C$;

3. $x \in C$, $y \in P$, $C \cap P \neq \emptyset$;

а) $x, y \in C \cap P$;

б) $x \in C \setminus P$, $y \in P \setminus C$;

в) $x \in C \setminus P$, $y \in P \cap C$;

г) $x \in P \setminus C$, $y \in P \cap C$;

4. $x \in C'$, $y \in C''$, $C'' \neq C'$;

5. $x \in P'$, $y \in P''$, $P' \neq P''$;

6. $x \in C$, $y \in P$, $C \cap P \neq \emptyset$.

Все шесть пунктов (соответствующие диаграммы приведены на рис.2) можно разбить на две группы. Первая группа – это такие случаи, когда вершины x, y соединены цепью, принадлежащей сцепленной системе Z_i. К этой группе относятся пп.I, 3,а,в. Общее для них то, что обе вершины принадлежат одной компоненте и, значит, соединены цепью в Z_i (рис.2,а). Вторая группа – это такие случаи, когда вершины x, y в Z_i не соединены цепью. К этой группе относятся пп. 2,3б,г,4,5,6, и п.2 будет здесь основным.

Рассмотрим п.2, когда $x, y \in P$, $x, y \notin C$. Вершина x не смежна y. Множество P может быть получено из правил (3) и (4).

Пусть P получено из (4) (рис.2,в). Тогда, по определению P, существуют две цепи, проходящие через сцепленную систему Z_{i+1} из X_{i+1}. Если эти цепи пересекаются в Z_{i+1}, то x и y принадлежат одной цепи и лемма доказана, если цепи не пересекаются в Z_{i+1}, то возникает сочетание различных случаев, описанных выше пп. I–6.

Пусть P получено из (3) (рис.2,г) и $P = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Легко получить обобщение, если $P = \bigcup_j \Gamma_j$. Пусть $t \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$. Тогда существует цепь, соединяющая некоторые вершины из Z''_{i+1} и Z'_{i+1} и проходящая через t. Существуют также цепи, соединяющие вершину x с некоторой вершиной из Z'_{i+1}, и вершину y с какой-то вершиной из Z''_{i+1}. Если первая цепь пересекается со второй и третьей соответственно в Z'_{i+1} и в Z''_{i+1}, то лемма доказана, если не пересекается или пересекается в одной из систем Z'_{i+1} или Z''_{i+1}, то приходим к пп. I–6.

Таким образом, п.2 исчерпан.

Можно заметить, что случай пп.3г,б легко сводится к п.2 (рис.2,б). По определению сцепленной системы и в силу того, что $C \cap P \neq \phi$, существует $t \in C \cap P$ и, следовательно, в Z_i есть цепь, соединяющая t с x. Дальше рассуждения проводятся, как в п. 2 для вершин y, t.

Доказательство для случаев пп.4–6 будет существенно опираться на п.2.

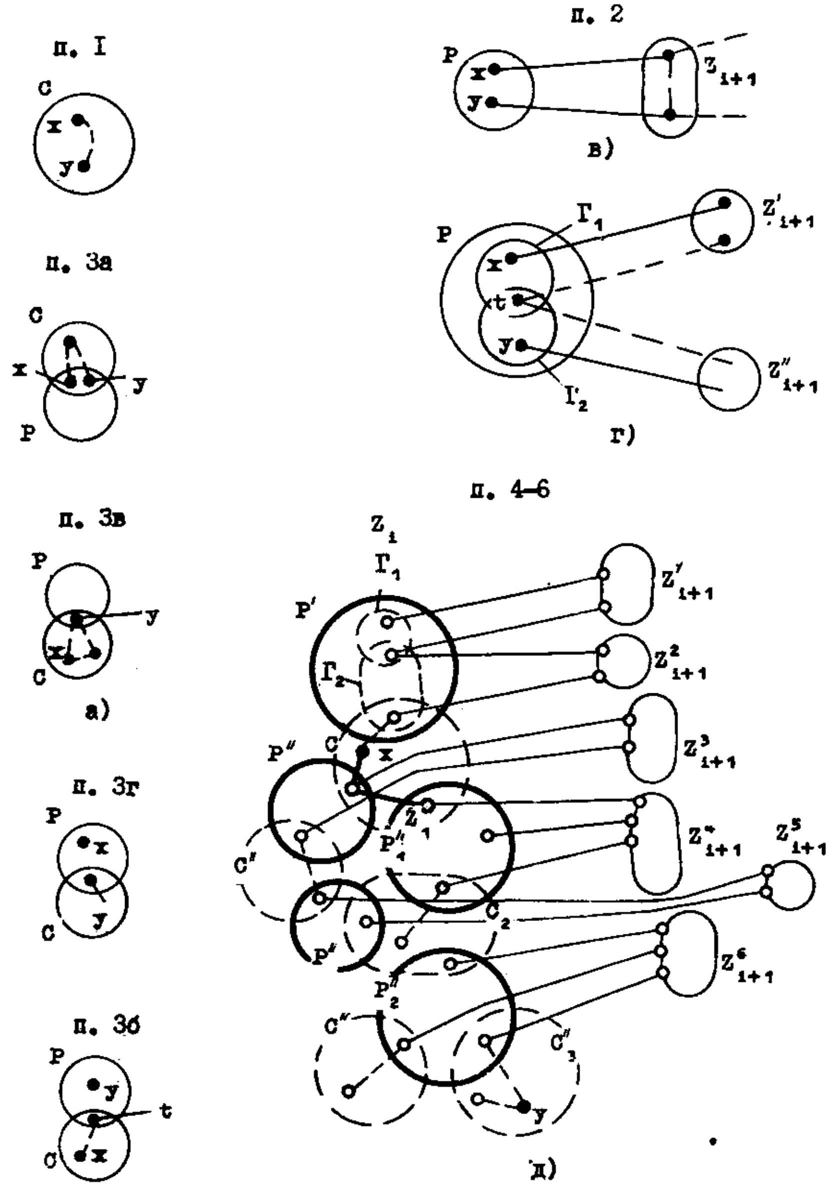
Рассмотрим пп. 4–6. Общим для всех этих случаев является то, что множества C и P принадлежат сцепленной системе Z_i и, следовательно, между ними существует цепь множеств (рис.2,д). Каждая цепь множеств состоит из пар пересекающихся множеств C, P или из единственного множества C или P. Поэтому легко видеть, что случаи, указанные в пп.4–6, сводятся к рассмотрению случаев, указанных в пп. I,2,3.

Рассмотрим п.4: $x \in C'_1$, $y \in C''_3$, $C' \neq C''$. Тогда существует цепь множеств $C'_1, P''_1, C_2, P''_2, C''_3$, состоящая из пар (рис.2,д) попарно-пересекающихся множеств $(C', P''_1)(P''_1, C_2), (C_2, P''_2)(P''_2, C''_3)$. Случай (C', P''_1). Существует вершина $t_1 \in C' \cap P''_1$ такая, что через нее проходит цепь, соединяющая вершину t_1 с вершинами из сцепленной системы Z^4_{i+1}, и для каждой вершины из P''_1 существуют цепи, соединяющие их с некоторыми вершинами из соответствующих сцепленных систем множества X_{i+1}. Если указанные цепи пересекаются в X_{i+1}, то лемма доказана, если нет, то приходим к пп. I–6 для сцепленных систем из множества X_{i+1}.

Аналогичные рассуждения могут быть выполнены для любой пары множеств C, P и, по сути, уже были выполнены выше.

Таким образом, при рассмотрении пп.I–6 получили следующий вывод

Вершины x, y (из Z_i) соединены цепью либо в X_i, либо в X_{i+1}, либо для множества X_{i+1} приходим к необходимости рассматривать пп. I–6.



б)

Рис. 2

Очевидно, аналогичная ситуация возникает на любом шаге $i=i,\ i+1,\dots,k-2,k-1$, если $T_G \setminus X_k = \phi$.

Рассмотрим шаг $k-2$ **при** $T_G / X_k \neq \phi$.

Очевидно, что сцепленные системы в множестве X_k состоят только из множества C и, значит, любая пара вершин из C соединена цепью в C, а все цепи имеют непустые пересечения. Точнее, все вершины из C принадлежат некоторому дереву, покрывающему C.

Таким образом, пп. I–6 для сцепленных систем $\mathcal{Z}_{k-1}$ из множества X_{k-1}, выглядят следующим образом:

п.2 $x,y \in P,\ x,y \notin C$, а $P=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, для каждого Γ существует своя компонента C из X_k, такая, что каждая вершина из Γ смежна некоторой вершине из C, и существует некоторая вершина $t \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, которая смежна вершинам из Γ_1 и Γ_2. И следовательно, лемма доказана.

Рассуждая аналогично, можно получить такой же результат и для остальных пунктов.

Заметим, что. если $T_G \setminus X_k \neq \phi$, то существуют непустые тупиковые множества и для $i<k$. Но тогда для соответствующих случаев при $i=j+1$, рассматривая пп. I–6 на шаге $i=j$, получим ситуацию, полностью аналогичную только что рассмотренной.

Таким образом, получаем, что для любой пары вершин $x,y \in \mathcal{Z}_i$ в графе $G_{i,\dots,k}$ существует цепь, соединяющая x с y, которая "замыкается" либо через сцепленные системы $\mathcal{Z}_i$, $i<k$, либо через тупиковые множества, сцепленные системы которых состоят из компонент связности. Лемма доказана.

Рассмотрим одно из свойств множеств $\Gamma_{i-1,i}[X_i, z_i]$. Будем обозначать последние через Γ_{i-1}.

ТЕОРЕМА 4. $\Gamma_i' \subset \Gamma$ н е я в л я е т с я м н о ж е с т в о м с о ч л е н е н и я.

Пусть $\Gamma_i' = \Gamma_i \setminus u,\ u \in X_i$. Удалим Γ_i', тогда u смежна некоторой вершине из сцепленной системы $\mathcal{Z}_{i+1}$. Но тогда, по лемме, она принадлежит некоторой цепи, соединяющей u с каждой вершиной из этой сцепленной системы, следовательно, Γ_i' не является множеством сочленения.

Очевидно, что любое объединение множеств Γ_i не является множеством минимальных сочленений. Отсюда следует, что P_i, полученные по (4), есть минимальные сочленения, а полученные по (3) не являются таковыми.

Пусть $S(\hat{X}_\lambda)=\{S_l(x)\}$ есть множество всех минимальных множеств сочленения, полученных из разбиения $\hat{X}_\lambda(x)$, а $S(G)=\{S_l\}$ есть множество минимальных сочленений графа G. Очевидно, что $S(\hat{X}_\lambda) \subset S(G)$. Из рис.3 понятно, что в общем случае $S(\hat{X}_\lambda) \neq S(G)$.

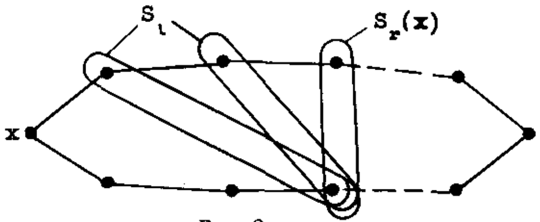


Рис.3

Аналогичный пример можно привести для доказательства того, что $S[\mathcal{X}_{\lambda,l}(X)] \subset S(G)$.

Поскольку никакое $S_l \notin T_G$, то вершины из S_l могут быть некоторым образом "распределены" по множествам Γ_i. Из минимальности S_l следует, что никакое его подмножество не есть множество сочленения. Отсюда никакие $\Gamma_i \notin S_l$, т.е. не имеет место строгое включение. Следовательно, точки сочленения не могут принадлежать множествам S_l таким, что $|S_l|>1$.

С другой стороны, все множества S_l, в том числе и такие, что $|S_l|=1$, "распределены" по множествам Γ_i. Из минимальности Γ_i следует, что никакие множества S_l не являются подмножествами Γ_i, т.е. $S_l \notin \Gamma_i$ (по теореме 4), кроме случая, когда $S_l=\Gamma_i$. Очевидно, что для каждого S_l, такого что $|S_l|=1$, существует Γ_i такое, что $|\Gamma_i|=1$ и $S_l=\Gamma_i$. Другими словами, любая точка сочленения принадлежит некоторому Γ_i. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 5. К а ж д а я т о ч к а с о ч л е н е н и я е с т ь н е к о т о р о е Γ_i т о г д а и т о л ь к о т о г д а, к о г д а $|\Gamma_i|=1$.

В алгоритме (рис.4) нахождения точек сочленения мостов и блоков используются приведенные ниже процедуры.

I. Построение единичного λ – разложения графа $\hat{G}(x)$, где x – любая вершина. Определение компонент связности графа производится попутно при построении λ – разложения. Легко установить, что сложность этой процедуры пропорциональна m, т.е. числу ребер графа G.

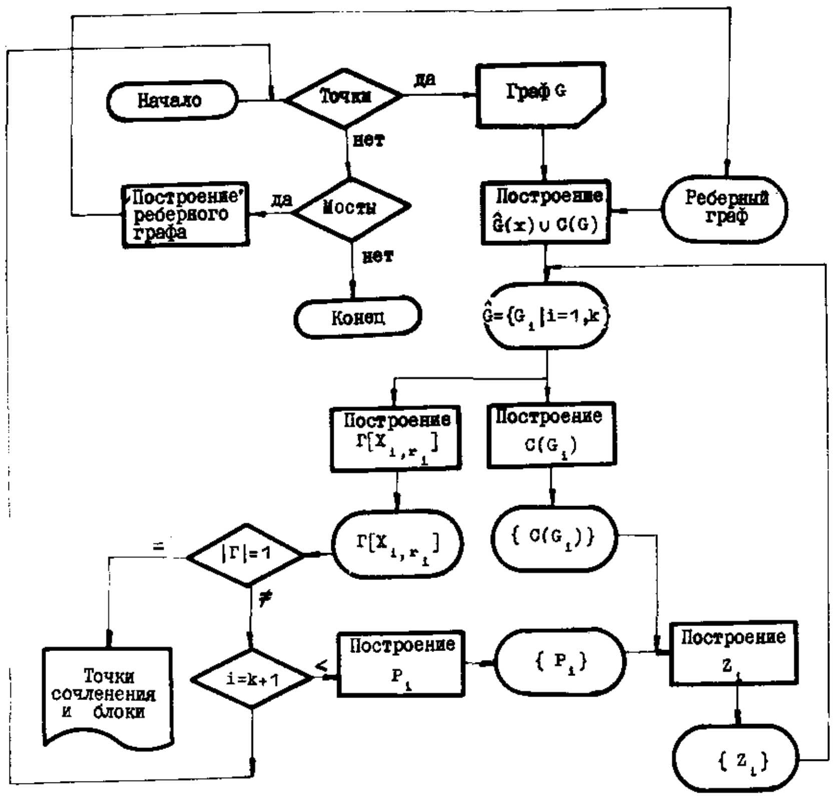


Рис. 4. Блок-схема алгоритма. Блоки находятся в процессе нахождения точек сочленения. Мосты находятся как точки сочленения в реберном графе

2. Определение компонент связности подграфов G_i производится со сложностью

$$\varphi(G_i) = \sum_{i=2}^{k} \varphi_i(G_i) = m - \sum_{i=2}^{k} m_{i,i-1}.$$

3. Определение множеств $\Gamma[X_{i,r_i}]$ легко осуществить со сложностью

$$\varphi(\Gamma) = \sum_{i=2}^{k} m_{i,i-1} \cong m - \sum_{i=2}^{k} m_i.$$

4. Построение множеств P осуществляется по (3) и (4). Чтобы найти все P_i в множестве X_i, необходимо выполнить $C^2_{r_j}$ операций проверки попарных пересечений множеств Γ_i, где r_j – число множеств Γ_i. Очевидно, что $r_j \leq min[n_i, \gamma_{i+1}]$, где $\gamma_{i+1} \leq n_{i+1}$ есть число множеств P_i, которое не больше числа систем сцепленных множеств в X_{i+1}, т.е. n_{i+1}, откуда $r_j \leq min[n_i, n_{i+1}]$. Учитывая сложность проверки одной пары множеств, можно получить, что

$$\varphi(P) = \sum_{i=2}^{k} \varphi(P_i) = \sum_{i=2}^{k} C^2_{r_j} \cdot O\left[\left(\frac{n_i}{r_j}\right)^2\right]$$

или

$$\varphi(P) \sim \sum_{i=2}^{k} (min[n_i, n_{i+1}])^2.$$

5. Построение систем сцепленных множеств Z сводится к проверке попарных пересечений множеств из разбиений $\hat{X}_i(C)$, $\hat{X}_i(P)$, где $|\hat{X}_i(C)| = \ell_i$, $|\hat{X}_i(P)| = \gamma_i$, $1 \leq \ell_i \leq n_i$, $1 \leq \gamma_i \leq n_i$, и из процедуры 4 $\gamma_i \leq n_{i+1}$, тогда

$$\varphi(Z) = \sum_{i=2}^{k} \varphi_i(Z) \sim \sum_{i=2}^{k} n_i^2.$$

Отсюда получаем, что функция сложности алгоритма имеет вид

$$\varphi \sim 2m + \sum_{i=2}^{k} \{[min(n_i, n_{i+1})]^2 + n_i^2\}$$

или

$$\varphi \sim C[m + \sum_{i=2}^{k} n_i^2],$$

если положить, что $n_i \cong n_{i+1}$. Очевидно, что если m не велико по сравнению с n (пусть $m = \mu n$, где для заданного графа $\mu = const$), то $m = O(n)$. Сложность алгоритма зависит от длины разбиения k: $min\,\varphi$ достигается, например, при $k = \delta(G)$, $\delta(G)$ – диаметр графа. Если положить $n_i = \frac{n}{k}$, то

$$\varphi_{min}(n) \sim C\left[O(n) + \frac{n^2}{\delta(G)}\right].$$

На рис. 5,6 в виде графиков приведены зависимости времени T работы алгоритма от n и k, полученные экспериментально, для графов при n, равном 341 и 494, а также вычисленные по формулам сложности. Легко видеть, что х а р а к т е р экспериментальной зависимости с достаточной точностью совпадает с теоретическими

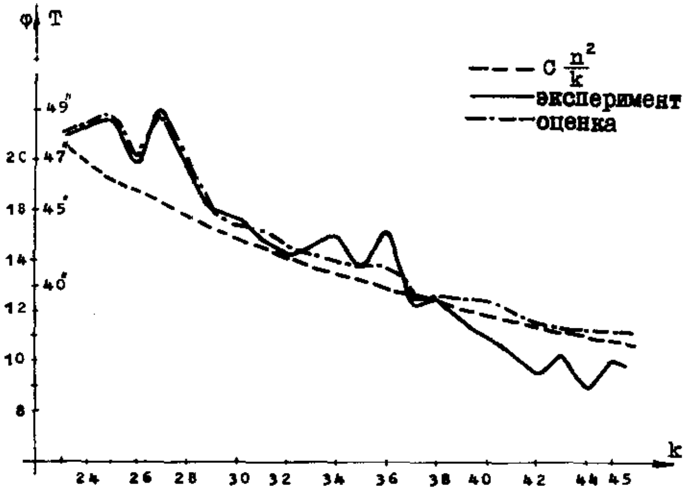


Рис. 5. Граф порядка $n(G) = 494$, $\delta(G) = 45$.

данными, полученными из оценок сложности алгоритма. Однако при определении величины сложности алгоритма не учитывалось время, требуемое на подготовку информации для работы алгоритма в условиях эксперимента, которое в реальных условиях эксплуатации алгоритма не потребуется, поэтому данные, полученные экспериментально были "приведенн" к теоретическим. На самом деле время, необходимое для работы с графом G, $n = 494$ будет меньше, чем это указанно на рис. 6 примерно на 12 сек для любой точки.

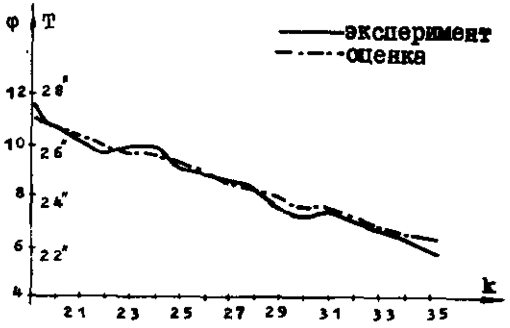


Рис.6. Граф порядка $n(G) = 341$, $\delta(G) = 35$.

В ряде случаев необходимо решать задачи на графах в следующих условиях. Исходные данные меняются слабо, т.е. исходный граф локально изменяется путем добавления или устранения малого количества вершин и ребер по сравнению с n и m, причем эти изменения не оказывают сильного влияния на метрические характеристики графа. Задачу требуется решать после каждых изменений. При этом можно существенно экономить машинное время за счет выбора наилучших условий решения. Поэтому целесообразно сначала найти эти условия (в данном случае ℓ - разбиение наибольшей длины) и затем повторять решение для этого разбиения. Как видно из примера, для графа порядка $n \sim 500$ разница во времени решения достигает примерно 10 сек. При большом числе повторов решения может быть получена существенная экономия машинного времени.

Л и т е р а т у р а

1. CORNEIL D.G. The analysis of Graph Theoretical Algorithms. Technical Report N 65. April 1974. Department of Computer Science. University of Toronto. Canada.

2. CORNEIL D.G. An n^2 algorithm for determining the bridges of a graph.-"Inf.Process.Lett.",1971,v.1, N 2,p.51-55.

3. КАРЗАНОВ А.В. Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. -В кн.: Труды 3-й Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, 1970, Вып. 2, М., 1970, с. 343-347.

4. TARJAN R.E. Depth-first search and linear graph algorithms. - "SIAM J.Comput.",1972, v.1, N 2, p.146-160.

5. HOPCROFT J.E., TARJAN R.E.Efficient algorithms for graph manipulation-Algorithm 447.-"Comm.ACM",1973,v.16,N 6,p.372-378.

6. PATON K. An algorithm for the blocks and cutnodes of a graph. - "Comm.ACM",1971, v.14, N 7, p.468-475.

7. СКОРОБОГАТОВ В.А. О распознавании изоморфизма неориентированных графов. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 33.Новосибирск, 1969, с. 34-36.

Поступило в ред.-изд.отд.
26 апреля 1975 года