

УДК 518.61

СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.К. Королев

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, записанного в скалярной или векторной форме:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (I)$$

Большинство методов численного решения задачи (I) строятся так, чтобы по известным значениям  $y$  в  $k$  предыдущих точках  $t_{m-1}, \dots, t_{m-k}$  можно было вычислить решение  $y$  в точке  $t_m = t_{m-1} + h$  ( $h$  — шаг интегрирования). При  $k=1$  мы имеем одношаговый метод, при  $k>1$  — многошаговый. Одношаговые методы несколько раз вычисляют правую часть уравнения (I) на интервале  $[t_{m-1}, t_m]$ . Многошаговые методы оперируют лишь с узловыми точками  $\{t_m\}$ . Существуют и промежуточные или смешанные методы, использующие как предыдущие, уже рассчитанные значения, так и значения  $y$  и  $f$  во внешаговых точках, например,  $t_{m-1} + \theta h$ ,  $0 < \theta < 1$ .

К преимуществам методов первой группы следует отнести их самостартуемость, в то время как методы второй и третьей группы требуют специального разгона. Зато по сравнению с одношаговыми многошаговые и смешанные методы требуют, как правило, меньшего числа вычислений правой части уравнения, то есть более экономичны по времени счета.

Погрешность метода численного интегрирования на одном шаге оценивается величиной  $O(h^{p+1})$ ; число  $p$  при этом называется порядком метода и связано с числом разгонных точек следующим образом:

$p = k$  ( $p = k+1$ ) — для явных ( неявных ) многошаговых методов,  
 $p = 2k + 1$  — для смешанных ( см. ниже ).

Кроме погрешности метода, существенной оказывается погрешность округления, неизбежно возникающая из-за представления чисел конечным числом разрядов. По самой специфике задачи Коши, когда все вычисляемые величины используют приближенные предыдущие значения, ясно, что погрешность при решении этой задачи любым численным методом может накапливаться. Опасность накопления ошибок тем больше, чем длиннее интервал интегрирования.

Приведем, например, выражение для оценки полной погрешности многошагового метода  $p$ -го порядка [1]:

$$|y_m - y(t_m)| \leq \frac{G}{1-hL} \left[ (1+hL)\theta + t_m \left( \frac{\delta}{h} + k h^p \right) \right] e^{Mt_m}. \quad (2)$$

Здесь  $y(t_m)$  — точное, а  $y_m$  — приближенное решение в точке  $t_m$ ;  $G, L, k, M$  — константы, зависящие от метода и уравнения, но не зависящие от  $h$  при малых  $h$ ;  $\theta$  определяется погрешностями в начальных данных;  $\delta$  связано с ошибками округления.

Опыт практических расчетов (в соответствии с оценкой (2)) показывает, что 1) полная погрешность может возрасти настолько, что заглушит решение; 2) при повышении точности начальных данных ( $\theta \rightarrow 0$ ) и увеличении порядка метода  $p$  полная погрешность уменьшается; 3) уменьшение шага  $h$  может привести к росту ошибок округления (если не увеличивать разрядную сетку представления чисел), так что неверно весьма распространенное мнение о том, что за счет неограниченного уменьшения шага интегрирования можно получить решение, сколь угодно близкое к истинному.

Оценки типа (2) носят теоретический (качественный) характер и весьма грубы. Поэтому на практике при использовании того или иного метода полезен своего рода численный эксперимент для реального сравнения имеющихся методов. Если два метода обеспечивают удовлетворительную точность, то предпочтительнее тот, который либо требует меньшего объема памяти, либо работает быстрее. Часто второе условие оказывается главным критерием при оценке эффективности метода. Время работы метода или, вернее, отношение этих времен для сравниваемых методов можно с достаточной степенью точности оценить заранее и независимо от применяемого вычислительного оборудования. Эта величина определя-

ется, в основном, числом вычислений правой части дифференциального уравнения, и тем точнее, чем сложнее уравнение.

Проведение предварительных расчетов с целью выбора наиболее эффективного метода, вероятно, не оправдано для не слишком сложной задачи, либо если речь идет об однократном ее решении. Если же одно и то же дифференциальное уравнение требуется интегрировать многократно (так, при решении задачи оптимизации параметров число таких интегрирований может достигать нескольких сотен), то становится ясным, насколько остро встает вопрос об эффективности численного метода.

Практическое сравнение методов интегрирования можно организовать по-разному. Например, можно пытаться построить в каком-то смысле "универсальную" систему тестов. Другим способом проверки методов может служить решение упрощенного варианта рассматриваемой задачи, для которого можно получить точное решение. Возможен и иной подход: не упрощая задачи, применять численный метод высокого порядка и вести счет с малым шагом при двойной точности. Можно надеяться, что затраты на такое предварительное исследование стоят уверенности в том, что истинное решение близко к найденному, с которым можно затем сравнивать остальные приближенные решения, получаемые другими, более простыми способами.

### I. Некоторые методы численного интегрирования

Для проведения численного эксперимента выбраны методы достаточно высокого порядка:  $\rho = 4, 5, 6, 7$ . Мы считаем, что методы более низкого порядка не обеспечивают удовлетворительной точности для более или менее сложных задач, а методы более высокого порядка слишком громоздки, что ведет к росту ошибок округления и не увеличивает точности. Рассмотрены методы всех трех групп, о которых говорилось выше: одношаговые, многошаговые и смешанные.

Из первой группы взяты 4 метода:

- 1) Рунге-Кутта,  $\rho = 4$ ,
- 2) и 3) Мерсона,  $\rho = 4$  и  $\rho = 5$  ("условно" см. ниже),
- 4) Скрейтона.  $\rho = 4$ .

Представителями многошаговых методов могут служить методы типа Адамса, в частности, комбинация явного - для прогноза - и неявного - для коррекции. Выбраны 4 метода:

- 1) Адамса-Башфорта,  $\rho = 4$  (прогноз) и Адамса-Мултона  $\rho = 5$  (коррекция),
  - 2) те же пары,  $\rho = 5$  и  $\rho = 6$ ,
  - 3) и 4) те же, но с двукратной коррекцией.
- Наконец, из группы смешанных взяты два метода Батчера 5-го и 7-го порядков.

Ниже приводятся формулы, по которым работают все эти методы для решения задачи (I).

Перечисленные методы достаточно полно характеризуют состояние численных методов решения задачи Коши. Мы не рассматриваем здесь распространения многошаговых методов на неравномерные сетки, предложенного Стукало [2], поскольку оно не содержит новых идей и практических рекомендаций, например, по выбору шага. Далее, не упомянуты методы повышенной точности Ламберта [3], так как, с нашей точки зрения, они не практичны, ибо требуют дифференцирования правой части уравнения. Наконец, неявные (в том числе сплайновые) методы, появившиеся сравнительно недавно [4, 5], можно считать частным случаем методов типа "предиктор-корректор".

I.I. Одношаговые методы используют лишь значение  $y$  в одной предыдущей точке  $t_{m-1}$ . Последовательно, в промежуточных точках вычисляются функции  $k_i$ , через которые линейно представляется приращение решения.

Метод Рунге-Кутта (RK) [6]:

$$k_1 = hf(t_{m-1}, y_{m-1}),$$

$$k_2 = hf(t_{m-1} + \frac{1}{2}h, y_{m-1} + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = hf(t_{m-1} + \frac{1}{2}h, y_{m-1} + \frac{1}{2}k_2),$$

$$k_4 = hf(t_{m-1} + h, y_{m-1} + k_3),$$

$$y_m = y_{m-1} + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5).$$

Метод Мерсона (М4) [6]:

$$k_1 = hf(t_{m-1}, y_{m-1}),$$

$$k_2 = hf(t_{m-1} + \frac{1}{3}h, y_{m-1} + \frac{1}{3}k_1),$$

$$k_3 = hf(t_{m-1} + \frac{2}{3}h, y_{m-1} + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2),$$

$$k_4 = hf(t_{m-1} + h, y_{m-1} + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3),$$

$$k_5 = hf(t_{m-1} + h, y_{m-1} + \frac{1}{3}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4),$$

$$y_m = y_{m-1} + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^5).$$

Если правая часть уравнения линейна по  $t$  и по  $y$ , то можно выделить главный член ошибки:

$$E = \frac{1}{15}k_1 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{15}k_4 - \frac{1}{30}k_5 + O(h^6).$$

Это позволяет получить процесс "условно 5-го порядка" (для линейного уравнения), если  $\Delta y_m = y_m - y_{m-1}$  взять в виде:

$$\Delta y_m = \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 - E = \frac{1}{10}k_1 + \frac{3}{10}k_3 + \frac{2}{5}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^6).$$

Метод Скрейтона (S) [6]:

$$k_1 = hf(t_{m-1}, y_{m-1}),$$

$$k_2 = hf(t_{m-1} + \frac{2}{9}h, y_{m-1} + \frac{2}{9}k_1),$$

$$k_3 = hf(t_{m-1} + \frac{1}{3}h, y_{m-1} + \frac{1}{12}k_1 + \frac{1}{4}k_2),$$

$$k_4 = hf(t_{m-1} + \frac{3}{4}h, y_{m-1} + \frac{3}{128}(23k_1 - 81k_2 - 90k_3)),$$

$$k_5 = hf(t_{m-1} + \frac{9}{10}h, y_{m-1} + \frac{9}{10000}(-345k_1 + 2025k_2 - 224k_3 + 544k_4)),$$

$$y_m = y_{m-1} + \frac{17}{162}k_1 + \frac{81}{170}k_3 + \frac{32}{135}k_4 + \frac{250}{1377}k_5 + O(h^5).$$

Для этого метода возможно выделение главного члена ошибки при любой правой части. Именно, если положить

$$q = -\frac{1}{18}k_1 + \frac{27}{170}k_3 - \frac{4}{15}k_4 + \frac{25}{153}k_5,$$

$$r = \frac{29}{24}k_1 - \frac{27}{8}k_2 + \frac{57}{20}k_3 - \frac{4}{15}k_4,$$

$$s = k_4 - k_1,$$

то ошибка

$$E = -\frac{q^2}{3} + O(h^6),$$

так что метод Скрейтона становится методом 5-го порядка, если  $\Delta y_m$  взять в виде:

$$\Delta y_m = \frac{17}{162}k_1 + \frac{81}{170}k_3 + \frac{32}{135}k_4 + \frac{250}{1377}k_5 + \frac{q^2}{3} + O(h^6).$$

1.2. Многошаговые методы. Для применения  $k$ -шагового метода интегрирования нужно иметь значения  $y$  в  $k$  предыдущих точках; в этих точках вычисляется правая часть  $f$ , и очередное значение  $y$  выражается в виде линейной комбинации этих величин.

Метод Адамса - Бэшфорта (АВ4) [7]:

$$y_m = y_{m-1} + \frac{h}{24}(-9f_{m-4} + 37f_{m-3} + 59f_{m-2} + 55f_{m-1}) + O(h^5).$$

Это явный или экстраполяционный метод; в методах типа "предиктор-корректор" он используется в качестве предиктора (прогноза).

Метод Адамса - Мултона (АМ5) [7]:

$$y_m = y_{m-1} + \frac{h}{920}(-19f_{m-4} + 108f_{m-3} - 264f_{m-2} + 646f_{m-1} + 251f_m) + O(h^6).$$

Это неявный или интерполяционный метод: искомая величина  $y_m$  входит как аргумент в  $f_m$ . Если этот метод используется как самостоятельный, то уравнение относительно  $y_m$  приходится решать итеративно. В паре с предиктором (например, с методом АВ4) он используется как корректор, для уточнения  $y_m$ , найденного из предиктора. Эта коррекция может быть как одно-, так и многократной.

Мы рассматриваем пару методов (АВ4 + АМ5) как единый метод интегрирования (АБ5) типа "предиктор-корректор"; ту же

пару, но с двукратной коррекцией (АВ 4 + АМ 5 + АМ 5) назовем методом А 5<sub>2</sub>.

Метод Адамса - Бэшфорта (АВ 5) [7]:

$$y_m = y_{m-1} + \frac{h}{720} (251f_{m-5} - 1274f_{m-4} + 2616f_{m-3} - 2774f_{m-2} + 1901f_{m-1}) + O(h^6)$$

более высокого порядка может быть взят в качестве предиктора, а метод Адамса - Мултона (АМ 6) [7]:

$$y_m = y_{m-1} + \frac{h}{1440} (27f_{m-5} - 173f_{m-4} + 483f_{m-3} - 798f_{m-2} + 1427f_{m-1} + 475f_m) + O(h^7)$$

в паре с АВ 5 образуют метод А 6<sub>1</sub> "предиктор-корректор". При двукратной коррекции (АВ 5 + АМ 6 + АМ 6) получаем еще один метод - А 6<sub>2</sub>.

1.3. Смешанные методы носят черты как одно-, так и многошаговых. По значениям  $y$  и  $f$  в предыдущих (сеточных) точках вычисляются  $y$  и  $f$  в некоторой промежуточной точке; дальнейшая процедура аналогична паре методов типа "предиктор-корректор". Эти методы за счет использования внешаговой точки позволяют повысить точность доставляемого ими решения по сравнению с многошаговыми методами.

Метод Батчера (В 5) [8]:

$$y_{m-\frac{1}{2}} = y_{m-2} + \frac{h}{8} (3f_{m-2} + 9f_{m-1}),$$

$$y_m = \frac{1}{5} (-23y_{m-2} + 28y_{m-1}) + \frac{h}{15} (-26f_{m-2} - 60f_{m-1} + 32f_{m-\frac{1}{2}}),$$

$$y_m = \frac{1}{31} (y_{m-2} + 32y_{m-1}) + \frac{h}{93} (-f_{m-2} + 12f_{m-1} + 64f_{m-\frac{1}{2}} + 15f_m) + O(h^6).$$

Точность на два порядка выше дает другой метод Батчера (В 7) [8]:

$$y_{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{128} (153y_{m-3} + 200y_{m-2} - 225y_{m-1}) + \frac{h}{128} (45f_{m-3} + 300f_{m-2} + 225f_{m-1}),$$

$$y_m = \frac{1}{31} (-212y_{m-3} - 297y_{m-2} + 540y_{m-1}) + \frac{h}{155} (-309f_{m-3} - 2130f_{m-2} - 1395f_{m-1} + 384f_{m-\frac{1}{2}}),$$

$$y_m = \frac{1}{617} (-31y_{m-3} - 135y_{m-2} + 783y_{m-1}) + \frac{h}{3085} (-39f_{m-3} - 495f_{m-2} - 135f_{m-1} + 2304f_{m-\frac{1}{2}} + 465f_m) + O(h^8).$$

## 2. Численный эксперимент

В качестве теста для сравнения выбранных методов интегрирования выбрана следующая система уравнений (упрощенный вариант одной практической задачи):

$$\frac{dy}{dt} = y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 2Sy_1 - (\omega^2 - \alpha R + 2S^2)y,$$

$$\text{где } R = \frac{2}{\alpha t^2 - 2bt + 1}, \quad S = (\alpha t - b)R.$$

Начальные условия:

$$y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = -2b.$$

Точное решение этой задачи есть

$$y(t) = (\alpha t^2 - 2bt + 1) \cos \omega t.$$

Параметры  $\alpha$  и  $b$  ( $\omega$  фиксировано) будем задавать следующим образом. Если  $t = T$  - правый конец интервала интегрирования,  $t_1 = \frac{T}{2}$ , а  $\infty$  - варьируемая ордината параболы-огибкающей при  $t = t_1$ , то

$$b = \frac{1-\infty}{t_1}, \quad \alpha = \frac{b}{t_1}.$$

При  $\varepsilon = 1$  имеем линейную систему (решение есть "чистая" косинусоида); при  $\varepsilon < 1$  парабола выпукла (вниз), при  $\varepsilon > 1$  - вогнута (вверх). Функции  $y(t)$  при разных  $\varepsilon$  показаны на рис. 1.

Поскольку в данном примере известно точное решение, то можно построить функцию ошибки

$$E(t_m) = y(t_m) - y_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

На рис. 2-3 приведены кривые  $E(t)$  для  $\varepsilon = 0,5$ . Примерно в таком же соотношении находятся функции ошибки для различных методов и при всех других значениях  $\varepsilon$ : метод Скрейтона работает точнее метода Рунге-Кутты, а метод Мерсона - точнее метода Скрейтона. Многошаговые методы все примерно одинаковы и по точности уступают одношаговым, причем ни повышение порядка метода, ни двукратная коррекция не позволяют заметно повысить точность метода (в рассматриваемом примере). Выражение для главного члена ошибки дает возможность несколько уменьшить полную ошибку ( $M_5$  по сравнению с  $M_4$ , рис. 2).

Если подсчитать среднеквадратичную ошибку

$$\bar{E} = \int_0^T E^2(t) dt$$

(например, по методу Симпсона - единообразно для всех методов интегрирования), то обращает на себя внимание одна интересная особенность (см. рис. 4): многошаговые и смешанные методы значительно увеличивают точность в линейном случае, в то время как одношаговые методы слабо реагируют на такое свойство системы, как линейность.

"Улучшение" метода Мерсона при помощи главного члена ошибки, вообще говоря, имеет место, но не в линейном случае, как это должно быть по теории, а в случае близком к линейному. При малых  $\varepsilon$ , как это видно из рис. 4, точность "улучшенного" метода Мерсона даже ухудшается.

Отметим еще, что, как было установлено в данном примере, точность решения, получаемого с помощью многошагового метода, слабо зависит от выбора одношагового метода, используемого для разгона.

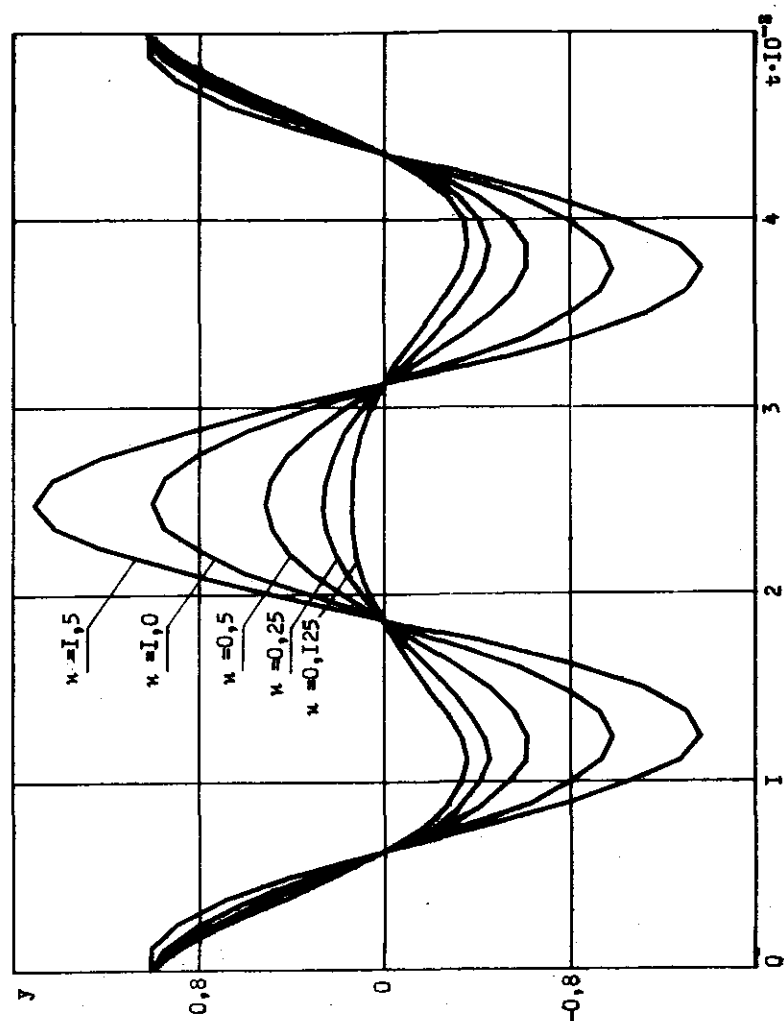


Рис. 1. Функции  $y(t)$  для разных  $\varepsilon$

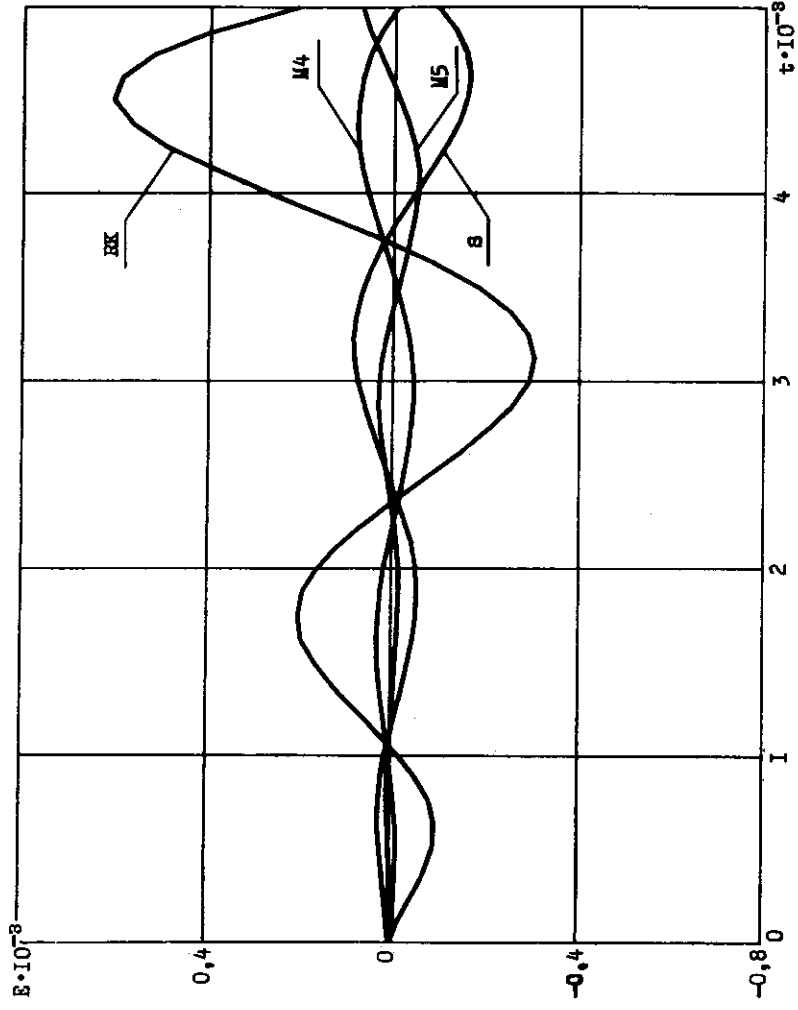


Рис. 2. Функции  $E(t)$ , полученные одношаговыми методами

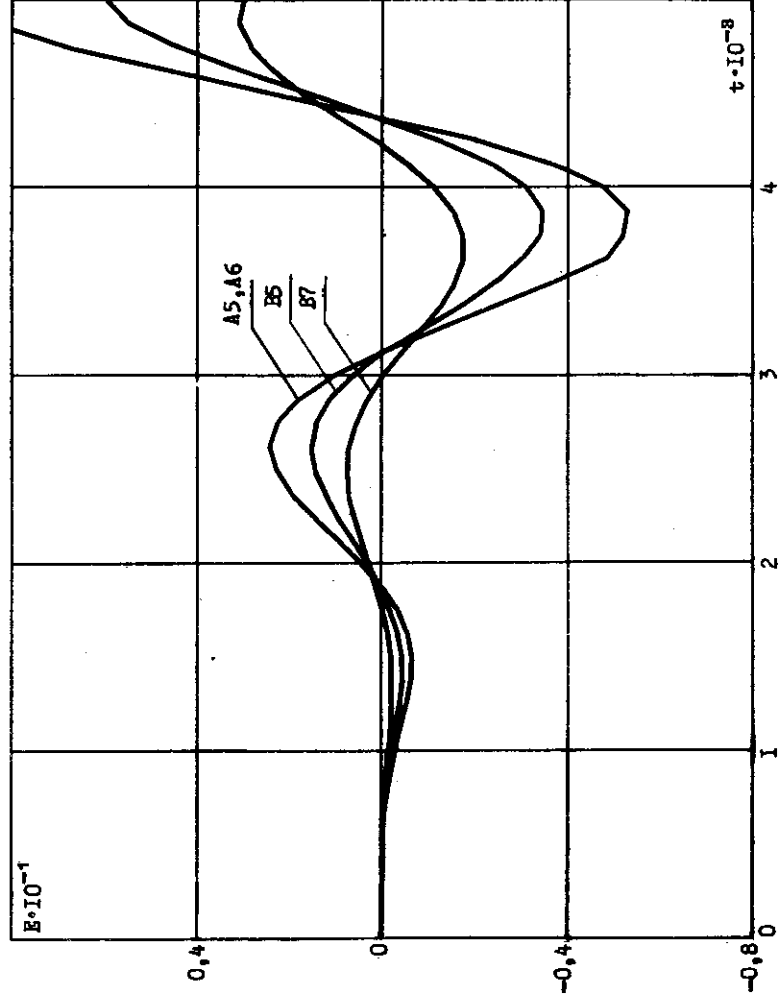


Рис. 3. Функции  $E(t)$ , полученные многошаговыми и смешанными методами

### 3. Программа КОМБАЙН

При проведении численного эксперимента, аналогичного описанному, было бы довольно громоздко и неудобно программировать и применять отдельно каждый метод. Поэтому имеет смысл объединить все сравниваемые методы в единой программе, состоящей из двух частей (назовем их РАЗГОН и ПРОДОЛЖЕНИЕ), из которых первая содержит все одношаговые, вторая – многошаговые и смешанные методы.

Методы RK, M4, M5 и S (см. п.1.1) в общем виде можно записать следующим образом:

$$k_1 = hf(t + \alpha_1 h, y),$$

$$k_2 = hf(t + \alpha_2 h, y + b_{21} k_1),$$

$$k_3 = hf(t + \alpha_3 h, y + b_{31} k_1 + b_{32} k_2),$$

$$k_4 = hf(t + \alpha_4 h, y + b_{41} k_1 + b_{42} k_2 + b_{43} k_3),$$

$$k_5 = hf(t + \alpha_5 h, y + b_{51} k_1 + b_{52} k_2 + b_{53} k_3 + b_{54} k_4),$$

$$\Delta y = c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4 + c_5 k_5$$

или в матричной форме:

$$t = t + A_i h, \quad i = 1, \dots, 5,$$

$$Y = Y + B \cdot K,$$

$$\Delta Y = C \cdot K,$$

где  $Y$  и  $\Delta Y$  – матрицы-столбцы ( $n \times 1$ ), матрица  $K$  имеет размерность ( $5 \times n$ ), а матрицы  $A, B$  и  $C$  приведены в таблице I.

Методы B5, B7, A5<sub>1</sub>, A5<sub>2</sub>, A6<sub>1</sub> и A6<sub>2</sub> (см. пп. 1.2 и 1.3) укладываются в следующую схему:

$$y_m = a_{i1} y_{m-5} + a_{i2} y_{m-4} + a_{i3} y_{m-3} + a_{i4} y_{m-2} + a_{i5} y_{m-1} +$$

$$h(e_{i1} f_{m-5} + e_{i2} f_{m-4} + e_{i3} f_{m-3} + e_{i4} f_{m-2} + e_{i5} f_{m-1} + e_{i6} f_{m-1} + e_{i7} f_m), \quad i = 1, 2, 3,$$

или в матричном виде:

$$Y = D \cdot YU + h \cdot E \cdot FU,$$

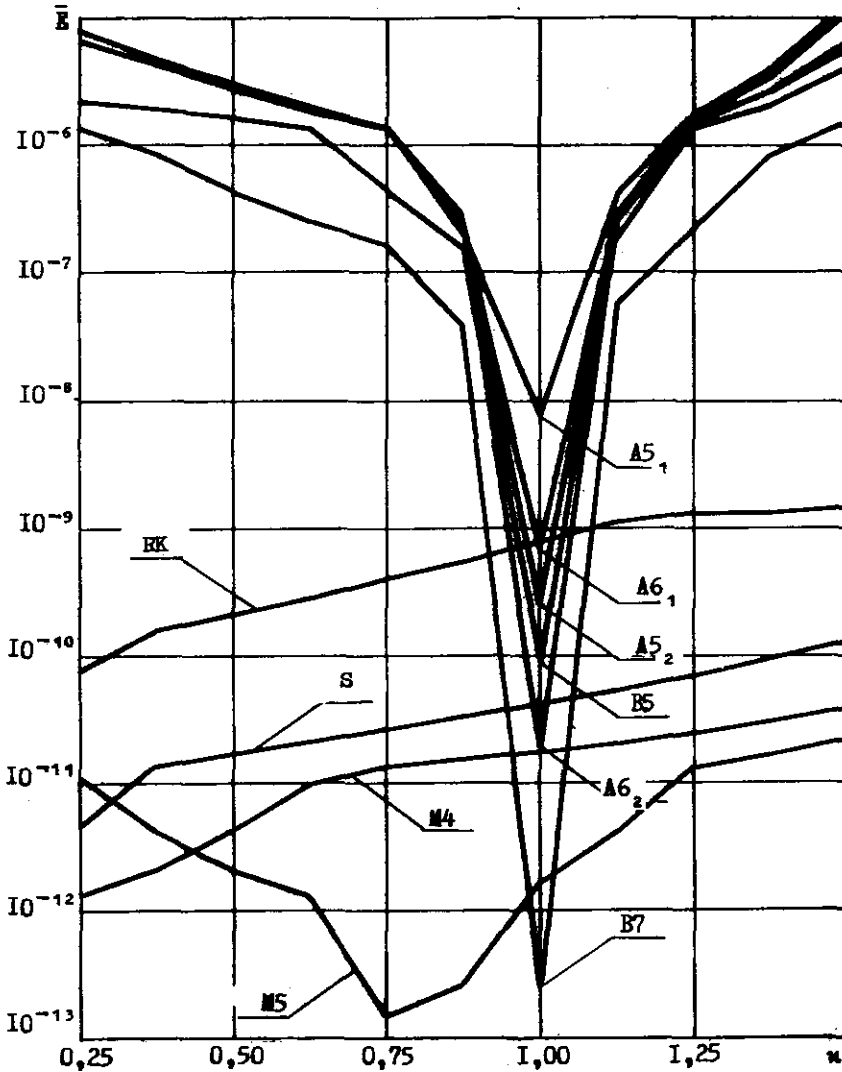


Рис. 4. Зависимость  $\bar{E}$  от  $h$  для различных методов

Таблица I

Матрицы А, В и С для одношаговых методов

Метод	А	В	С
РК	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
М4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 3/6 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
М5	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 3/6 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
В	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2/9 \\ 1/3 \\ 3/4 \\ 9/10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2/9 & 0 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 \\ 23 & -81 & 90 \\ -345 & 2025 & -1224 & 544 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 0 \\ 81 \\ 170 \\ 32 \\ 135 \\ 250 \\ 1377 \end{pmatrix}$

Таблица 2

Матрицы D и E для многошаговых и смешанных методов

Метод	D	E
B5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23 & 28 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 32 & 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & -60 & 32 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & 64 & 15 & 0 \end{pmatrix}$
B7	$\begin{pmatrix} 153 & 200 & -225 & 0 & 128 \\ -212 & -297 & 540 & 0 & 31 \\ -31 & -135 & 783 & 0 & 1617 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 45 & 300 & 225 & 0 & 0 \\ -309 & -2130 & -1395 & 384 & 0 \\ -39 & -495 & -135 & 2304 & 465 \end{pmatrix}$
A5 <sub>1</sub>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 37 & -59 & 55 & 0 \\ -19 & 106 & -264 & 646 & 0 \end{pmatrix}$
A6 <sub>1</sub>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 251 & -1274 & 2616 & -2774 & 1901 \\ 27 & -173 & 482 & -798 & 1427 \end{pmatrix}$
A5 <sub>2</sub>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 37 & -59 & 55 & 0 \\ -19 & 106 & -264 & 646 & 251 \\ -19 & 106 & -264 & 646 & 0 \end{pmatrix}$
A6 <sub>2</sub>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 251 & -1274 & 2616 & -2774 & 1901 \\ 27 & -173 & 482 & -798 & 1427 \\ 27 & -173 & 482 & -798 & 1427 \end{pmatrix}$



где матрицы  $YU$  и  $FU$  имеют размерности  $(5 \times n)$  и  $(7 \times n)$  соответственно, а матрицы  $D$  и  $E$  представлены в таблице 2.

Для выбора какого-либо определенного метода введены следующие признаки:

$PI = (1, 2, 3, 4)$  - для одношаговых методов (номер по порядку:  $RK, M4, M5, S$ );

$M = (1, 2, 3, 4)$  - для многошаговых и смешанных (номер метода:  $B5, B7, A5, A6$  и одновременно число разгонных точек; при  $M \geq 5$  работает только одношаговый метод);

$K2 = (1, 2)$  - для одно- или двукратной коррекции (в методах  $A5$  и  $A6$ );

$D$  - общее число точек сетки.

Количество и номера начальных точек, необходимых для работы многошаговых и смешанных методов и используемых в массивах  $YU$  и  $FU$ , приведены в таблице 3.

Таблица 3

Мас- слезы	B5	B7	A5	A6
YN	$m-2, m-1$	$m-3, m-2, m-1$	$m-1$	$m-1$
FN	$m-2, m-1$	$m-3, m-2, m-1$	$m-4, m-3, m-2, m-1$	$m-5, m-4, m-3, m-2, m-1$

Общая блок-схема алгоритма показана на рис. 5; блоки РАЗГОН и ПРОДОЛЖЕНИЕ представлены на рис. 6 и 7. Эти блок-схемы оперируют с векторными переменными  $Y, F, \dots$  (для простоты можно считать, что блок-схемы изображают алгоритм интегрирования скалярного уравнения (I)).

Программа КОМБАЙН, работающая по описанному алгоритму, составлена на языке АКИ для ЭВМ "Минск-2". Все расчеты, приведенные выше, выполнены с помощью этой программы.

Итак, отсутствие удовлетворительных практических способов оценки полной погрешности при численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вынуждает прибегать

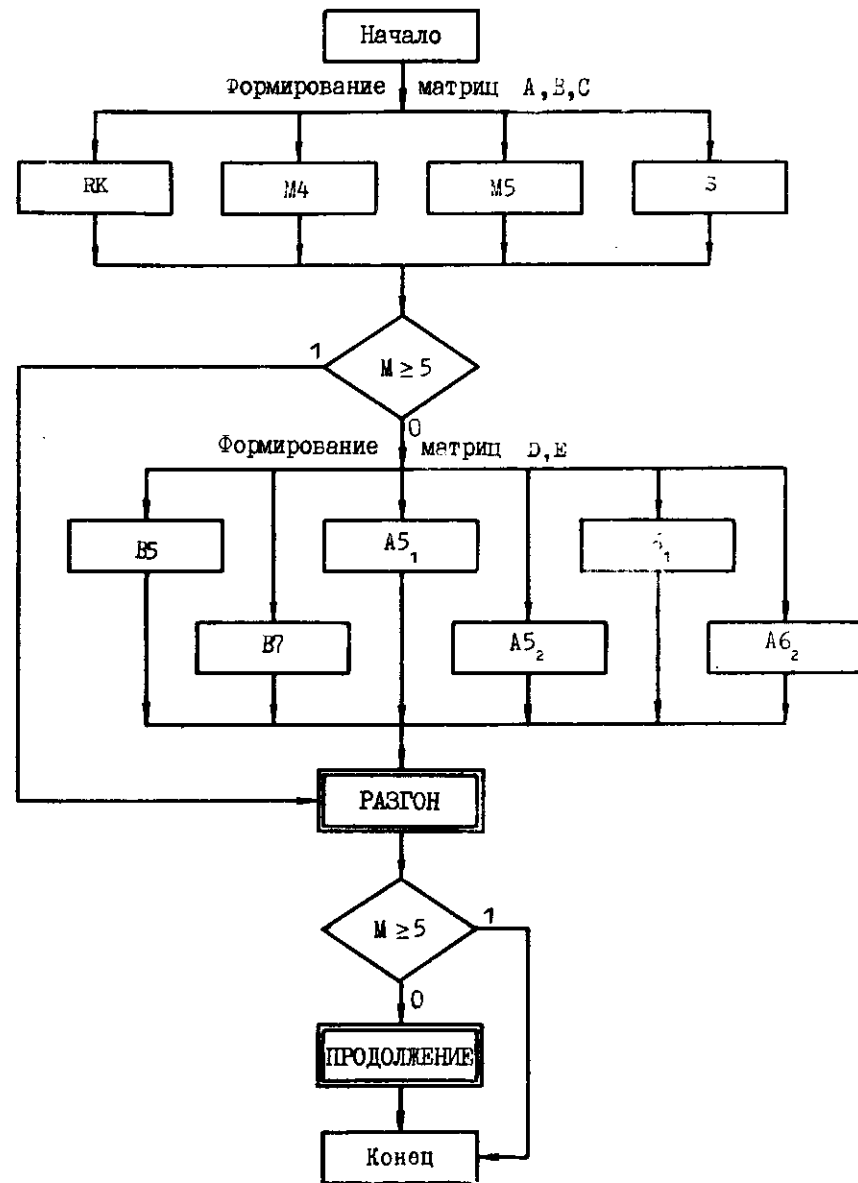


Рис. 5. Общая блок-схема алгоритма

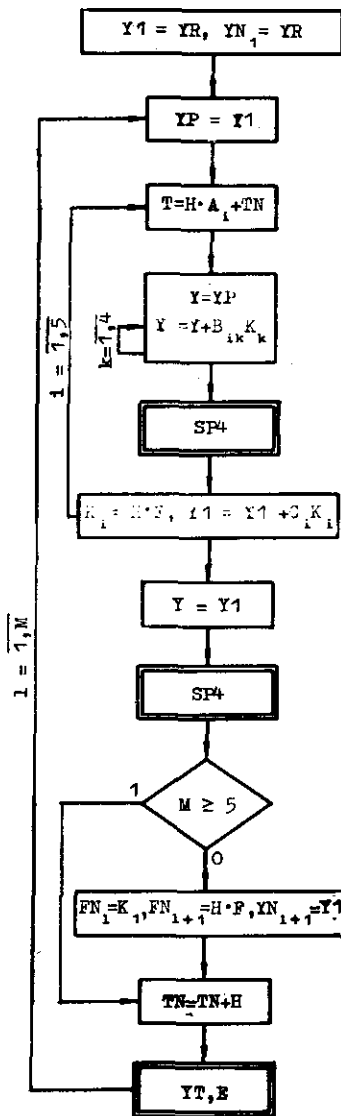


Рис. 6. Блок-схема блока РАЗГОН

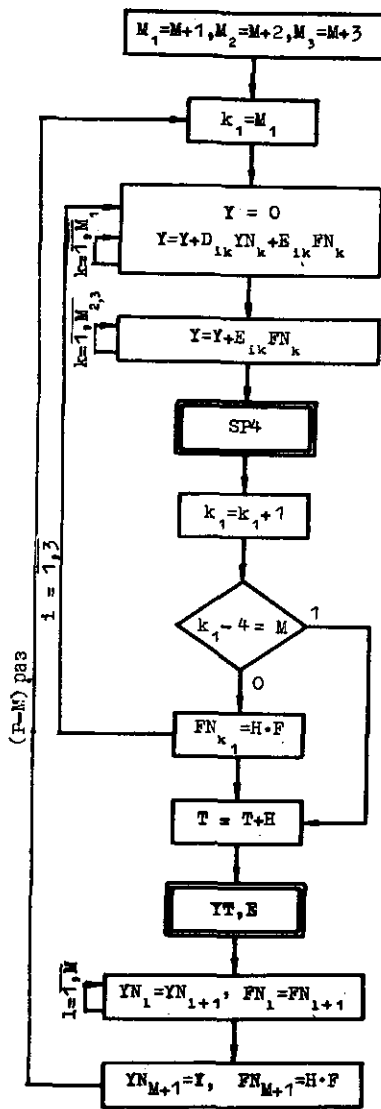


Рис. 7. Блок-схема блока ПРОДОЛЖЕНИЕ

к численным экспериментам, аналогичным описанному выше. Такой способ сравнения различных численных методов позволяет выяснить их возможности и особенности и для некоторого круга конкретных задач выбрать наиболее подходящий метод.

При реализации и сравнении различных численных методов интегрирования целесообразно и, как показано в данной работе, не столь сложно создать целую "библиотеку" методов в рамках единой программы.

#### Л и т е р а т у р а

1. БАБУШКА И. и др. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1955.

2. СТУКАЛО А.С. Некоторые обобщенные многошаговые методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - В кн.: Математическое обеспечение ЭВМ и эффективная организация вычислительного процесса. Вып.2, Киев, 1967.

3. LAMBERT T.D., MITCHELL A.R. On the solution of  $y'=f(x, y)$  by a class of high accuracy differential formulae of low order. - "ZAMP", 1962, v. XIII, N 3, p.223-231.

4. SHICHMAN H. Integration system of a nonlinear network analysis program. - "IEEE Trans. on Circ.Th.", 1970, v. CT-17, N 3, p.378-386.

5. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория слайдов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

6. SCRATON R.E. Estimation of the truncation error in Runge-Kutta and allied processes. - "Comput.J.", 1964, v.7, N 3, p.246-248.

7. HENRICI P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. New York, John Wiley and Sons, 1962.

8. BUTCHER J.C. A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations. - "J.ACM", 1965, v.12, N 1, p.124-135.

Поступила в ред.-изд.отд.  
6 мая 1975 года