УДК 518.12

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ КУБИЧЕСКОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В.Л.Мирошниченко

Многие задачи численного анализа сводятся к решению систем линейных уравнений с трехдиагональными матрицами. При этом нас, как правило, интересуют условия невырожденности таких матриц и оценки норм обратных матриц. В полной мере вышесказанное относится к теории кубической сплайн-интерполяции.

Предлагаемая статья состоит из четырех параграфов. В §1 устанавливаются необходимые и достаточные условия невырожденности некоторых трехдиагональных матриц и оцениваются нормы обратных матриц. В §2 эти результаты используются при решении задачи существования и сходимости кубической сплайн-интерполяции на равномерной сетке при общих граничных условиях. Аналогичные вопросы для неравномерной сетки рассмотрены в §3. В последнем параграфе обсуждаются вопросы, связанные с численной реализацией алгоритма построения кубического сплайна.

§ 1. Несколько результатов для трехдиагональных матриц

Рассмотрим симметричную $N \times N$ – матрицу:

$$A_N = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & & & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Согласно критерию Адамара [I], для невырожденности A_N доста-точно выполнить условие $|\alpha|>2$. При этом нетрудно также пока-зать [2], что

$$\|A_N^{-1}\|_1 = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}^N| = \|A_N^{-1}\|_2 = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}^N| \le \frac{1}{|\alpha|-2}. \qquad (I)$$

ТЕОРЕМА I. Матрица A_N невырождена тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\alpha + 2\cos\frac{2\pi k}{N} \ne 0, \quad k=0,1,\dots,N-1. \qquad (2)$$

Если $|\alpha|>2$, то

$$\frac{1}{|\alpha|-2} + \alpha_N \le \|A_N^{-1}\|_1 \le \frac{1}{|\alpha|-2}, \qquad (3)$$

где $\alpha_N = 0$ при $N=2\ell$, $|\alpha|>2$,
$\alpha_N = 0$ при $N=2\ell+1$, $\alpha<-2$,

$$\alpha_N = -\frac{2+2\cos\frac{\pi(N-1)}{N}}{(\alpha-2)\left[\alpha+2\cos\frac{\pi(N-1)}{N}\right]} \quad \text{при} \quad N=2\ell+1, \alpha>2.$$

Если $|\alpha|\le 2$, то не существует оценки вида $\|A_N^{-1}\|_1 \le C$ с константой C, не зависящей от N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица A_N относится к тому типу матриц, которые обычно называют циркулянтами. Одним из замечательных свойств таких матриц является простота вычисления собственных чисел [3, стр. 96]. В частности, для A_N собственные числа находятся по формуле

$$\lambda_k = \alpha + \varepsilon^k + \varepsilon^{(N-1)k}, \quad k=0,1,\dots,N-1, \qquad (4)$$

где $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ - корень N-й степени из единицы. Из (4)

$$\lambda_k = \alpha + 2\cos\frac{2\pi k}{N}, \quad k=0,1,\dots,N-1. \qquad (5)$$

Необходимость и достаточность условий (2) теперь следует из того, что $|A_N| \ne 0$ тогда и только тогда, когда все собствен-ные числа матрицы A_N отличны от нуля.

Спектральной нормой матрицы A называется величина

$$\|A\|_\lambda = \max_k |\lambda_k|,$$

где λ_k - собственные числа матрицы A. Очевидно,

$$\|A^{-1}\|_\lambda = \left(\min_k |\lambda_k|\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Известно [4], что для эрмитовой матрицы A среди всех воз-можных норм $\|A\|$, согласованных с некоторой нормой векто-ра, спектральная норма $\|A\|_\lambda$ принимает минимальное значение. Ис-пользуя этот факт и оценку (I), для матрицы A_N^{-1} при $|\alpha|>2$ имеем

$$\left(\min_k |\lambda_k|\right)^{-1} \le \|A_N^{-1}\|_1 \le \frac{1}{|\alpha|-2}.$$

Отсюда легко получается (3), если учесть (5). Заметим, что (3), по сути дела, означает неулучшаемость оценки (I). Последнее утверждение теоремы докажем от противного. Пусть $|\alpha|\le 2$ и $\|A_N^{-1}\|_1 \le C$, где C не зависит от N. Из формулы (5) при $|\alpha|\le 2$ следует, что найдется такое N_0, при котором A_{N_0} имеет соб-ственное число $\tilde\lambda$, удовлетворяющее условию $|\tilde\lambda| < C^{-1}$. Исполь-зуя (6) и свойство минимальности спектральной нормы, имеем $\|A_N^{-1}\|_1 > C$, что противоречит сделанному первоначально пред-положению. Теорема доказана.

Если матрица A_N^{-1} существует, то она так же, как и A_N, яв-ляется циркулянтом и имеет вид:

$$A_N^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1^N & \alpha_2^N & \dots & \alpha_N^N \\ \alpha_N^N & \alpha_1^N & \dots & \alpha_{N-1}^N \\ \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_2^N & \alpha_3^N & \dots & \alpha_1^N \end{bmatrix}.$$

Кроме того, в силу симметричности A_N, имеет место соотношение $\alpha_i^N = \alpha_{N+2-i}^N$, $i=1,\dots,N$. Поэтому для полного определения матрицы A_N^{-1} достаточно вычислить не более $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ различных элементов. Особенно просто это сделать при $|\alpha|>2$. Действительно, α_i^N, очевидно, удовлетворяют системе:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\,\alpha_1^N + \alpha_2^N + \alpha_N^N = 1, && (7.1)\\ &\alpha_{i-1}^N + \alpha\,\alpha_i^N + \alpha_{i+1}^N = 0, \quad i=2,\dots,N-1, && (7.i)\\ &\alpha_1^N + \alpha_{N-1}^N + \alpha\,\alpha_N^N = 0. && (7.N)\end{aligned}\right.$$

Решение разностного уравнения (7.i) можно представить [5] в виде

$$\alpha_i^N = C_1(\omega_1)^i + C_2(\omega_2)^i,$$

где ω_1, ω_2 – корни характеристического уравнения $\omega^2+\alpha\omega+1=0$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Выберем их так, чтобы удовлетворялись уравнения (7.1) и (7.N). Это дает

$$\alpha_i^N = \frac{\omega_1^{i-1} + \omega_1^{N-i+1}}{\sqrt{\alpha^2-4}\,(1-\omega_1^N)}, \quad i=1,2,\dots,N, \tag{8}$$

причем ω_1 – это тот из корней характеристического уравнения, который по модулю меньше единицы, т.е.

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}\right), \quad \text{если} \quad \alpha>2,$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}\right), \quad \text{если} \quad \alpha<-2.$$

Перейдем к изучению трехдиагональной $N\times N$ – матрицы вида

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть α удовлетворяет условию (2). Для того чтобы матрица $\tilde{A}_N$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_N = \left[1+\alpha_2^N(\alpha-2)\right]\left[1+\alpha_2^N(\beta-2)\right] - \left[\alpha_1^N+\alpha_3^N(1-\alpha)\right]\left[\alpha_1^N+\alpha_3^N(1-\beta)\right] \neq 0, \tag{9}$$

где α_i^N – элементы матрицы A_N^{-1}. Если $|\alpha|>2$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N=\sigma\neq 0$, то для всех достаточно больших N

$$\|\tilde{A}_N^{-1}\|_1 \leq C\,\|A_N^{-1}\|_1, \tag{10}$$

где постоянная C не зависит от N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы матрицы $\tilde{A}_N^{-1} = [\tilde{\alpha}_{ij}^N]$ можно найти путем решения уравнения

$$\tilde{A}_N^{-1}\,\tilde{A}_N = E. \tag{11}$$

Записывая (11) в развернутом виде и перенося при этом некоторые члены в правую часть, получим

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\,\tilde{\alpha}_{i1}^N + \tilde{\alpha}_{i2}^N + \tilde{\alpha}_{iN}^N = \delta_{i1} + \tilde{\alpha}_{iN}^N,\\ &\tilde{\alpha}_{i1}^N + \tilde{\alpha}_{i2}^N\alpha + \tilde{\alpha}_{i3}^N = \delta_{i2} + (1-\alpha)\tilde{\alpha}_{i1}^N,\\ &\tilde{\alpha}_{ij-1}^N + \alpha\,\tilde{\alpha}_{ij}^N + \tilde{\alpha}_{ij+1}^N = \delta_{ij} \ (j=3,4,\dots,N-3),\\ &\tilde{\alpha}_{iN-2}^N + \alpha\,\tilde{\alpha}_{iN-1}^N + \tilde{\alpha}_{iN}^N = \delta_{iN-1} + (1-\beta)\tilde{\alpha}_{iN}^N,\\ &\tilde{\alpha}_{i1}^N + \tilde{\alpha}_{iN-1}^N + \alpha\,\tilde{\alpha}_{iN}^N = \delta_{iN} + \tilde{\alpha}_{i1}^N.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Найдем из (12) элементы $\tilde{\alpha}_{i1}^N, \tilde{\alpha}_{iN}^N$, $i=1,\dots,N$, пользуясь тем, что матрица этой системы совпадает с A_N. Получим

$$\left\{\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_{i1}^N\left[1+\alpha_2^N(\alpha-2)\right] - \tilde{\alpha}_{iN}^N\left[\alpha_1^N+(1-\beta)\alpha_3^N\right] = \alpha_i^N,\\ &-\tilde{\alpha}_{i1}^N\left[\alpha_1^N+\alpha_3^N(1-\alpha)\right] + \tilde{\alpha}_{iN}^N\left[1+\alpha_2^N(\beta-2)\right] = \alpha_{N+1-i}^N,\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$i=1,2,\dots,N$$

Очевидно, вопрос о существовании $\tilde{A}_\nu^{-1}$, а следовательно, и невырожденности $\tilde{A}_\nu$ эквивалентен вопросу об однозначности разрешимости системы (I3), т.е. вопросу неравенства нулю ее определителя. Но этот определитель совпадает с σ_ν. Таким образом, условие (9) является необходимым и достаточным для невырожденности $\tilde{A}_\nu$.

Вычислим элементы $\tilde{a}^\nu_{ij}$. Из (I3) имеем

$$\tilde{a}^\nu_{i1} = \frac{1}{\sigma_\nu}\left\{a_i^\nu[1+a_2^\nu(\beta-2)] + a^\nu_{\nu+1-i}[a_1^\nu + a_3^\nu(1-\beta)]\right\},$$

$$\tilde{a}^\nu_{i\nu} = \frac{1}{\sigma_\nu}\left\{a^\nu_{\nu+1-i}[1+a_2^\nu(\alpha-2)] + a_i^\nu[a_1^\nu+a_3^\nu(1-\alpha)]\right\}, \qquad (I4)$$

$$i=1,2,\dots,\nu.$$

Из системы (I2)

$$\tilde{a}^\nu_{ij} = \tilde{a}^\nu_{i1}[a^\nu_{\nu-j+3}(1-\alpha)+a^\nu_{\nu-j+1}] + \tilde{a}^\nu_{i\nu}[a^\nu_{\nu-j+2}+a^\nu_{\nu-j}(1-\beta)] + a^\nu_{\nu+i-j+1}, \qquad (I5)$$

причем $a^\nu_{\nu+k}=a^\nu_k$.

Далее имеем

$$\|\tilde{A}_\nu^{-1}\|_1 \le \max_i \sum_{j=1}^{\nu}\left\{|\tilde{a}^\nu_{i1}|\,|a^\nu_{\nu-j+3}(1-\alpha)+a^\nu_{\nu-j+1}| + |\tilde{a}^\nu_{i\nu}|\,|a^\nu_{\nu-j+2}+a^\nu_{\nu-j}(1-\beta)| + |a^\nu_{\nu+i-j+1}|\right\} \le$$

$$\le \|A_\nu^{-1}\|_1 \max_i\left\{1+|\tilde{a}^\nu_{i\nu}|(1+|1-\beta|)+|\tilde{a}^\nu_{i1}|(1+|1-\alpha|)\right\}.$$

При $|a|>2$ из формул (8) следует, что $|a_i^\nu|$ ограничены величиной, не зависящей от ν. Поэтому из (I4)

$$|\tilde{a}^\nu_{i1}| \le \frac{C_0}{\sigma_\nu}, \quad |\tilde{a}^\nu_{i\nu}| \le \frac{C_0}{\sigma_\nu},$$

где C_0 не зависит от ν. Следовательно,

$$\|\tilde{A}_\nu^{-1}\|_1 \le \left[1+\frac{C_0}{\sigma_\nu}(2+|1-\beta|+|1-\alpha|)\right]\|A_\nu^{-1}\|_1.$$

Отсюда вытекает оценка (I0). Теорема доказана. В рамках настоящей работы мы не будем заниматься решением задачи о вычислении более или менее точных значений постоянной C в оценке (I0).

Укажем только, что при конкретных значениях величин a, α, β, это не представляет труда, ввиду наличия явных выражений (I5) для $\tilde{a}^\nu_{ij}$. Заметим также, что проверка условия $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sigma_\nu=\sigma\ne0$ весьма проста. Достаточно учесть, что в силу (8)

$$\lim_{\nu\to\infty} a_1^\nu = \frac{1}{\sqrt{a^2-4}}; \quad \lim_{\nu\to\infty} a_2^\nu=\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-4}}; \quad \lim_{\nu\to\infty} a_3^\nu = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{a^2-4}}. \qquad (I6)$$

§ 2. Существование и сходимость кубической сплайн-интерполяции на равномерной сетке

Пусть на промежутке $[a,b]$ в узлах $x_i=x_0+ih$, $x_0=a$, $x_\nu=b$ заданы значения функции $y(x_i)=y_i$. При решении задачи интерполяции требуется построить кубический сплайн $S_\nu(y;x)\in C^2[a,b]$, удовлетворяющий условиям $S_\nu(y;x_i)=y_i$, $i=0,1,\dots,\nu$ и двум граничным условиям [2]. Для наиболее общих граничных условий эта задача может быть сведена к решению системы уравнений вида

$$\begin{cases} 4M_0+\alpha M_1 = e_0, \\ M_{i-1}+4M_i+M_{i+1} = e_i, \quad i=1,\dots,\nu-1, \\ \beta M_{\nu-1}+4M_\nu = e_\nu, \end{cases} \qquad (I7)$$

где $M_i=S''_\nu(y;x_i)$ и α, β определяются в зависимости от граничных условий.

ТЕОРЕМА 3. *Для существования единственного кубического интерполяционного сплайна $S_\nu(y;x)$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$[\alpha-4(2+\sqrt{3})][\beta-4(2+\sqrt{3})]-(\sqrt{3}-2)^{2\nu-4}[\alpha-4(2-\sqrt{3})][\beta-4(2-\sqrt{3})]\ne 0. \qquad (I8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица системы (I7) представляет собой не что иное, как $\tilde{A}_{\nu+1}$ (§I), при $a=4$. Проверяя теперь условие (9) из теоремы 2, положив при этом в формулах (8) $a=4$, $\omega_1=(-2+\sqrt{3})$, после несложных преобразований приходим к (I8).

Теорема 3 дает полное решение вопроса о существовании кубического сплайна. В случае симметричных граничных условий, т.е. когда $\alpha=\beta$, (I8) сводится к требованию

$$\alpha \neq 4\frac{(2+\sqrt{3}) \pm (2-\sqrt{3})^{N-1}}{1 \pm (2-\sqrt{3})^{N-2}} \quad \text{при} \quad N>2;$$

$$\alpha \neq 8 \quad \text{при} \quad N=2.$$

Перейдем к вопросу о сходимости интерполяции. Сразу оговоримся, что мы будем рассматривать только согласованные граничные условия. Поясним этот термин. Например, если граничное условие задано в виде $M_0+\alpha M_1=e_0$, то это означает, что либо такое же равенство имеет место для самой функции $y(x)$, либо для $y(x)$ оно выполняется с таким порядком погрешности относительно h, что это не приводит к снижению порядка погрешности интерполяции для функций такого класса, к которому принадлежит $y(x)$. Из дальнейшего будет ясно, что если $y(x)\in C^{\nu}[a,b]$, $\nu=0,1,2,3$, то достаточно, чтобы граничное условие выполнялось с погрешностью $O(h^{\nu-2})\,\omega(y^{(\nu)};h)$, если $y(x)\in C^4[a,b]$, то порядок погрешности должен быть не ниже $O(h^2)$.

ТЕОРЕМА 4. *Если одновременно*

$$\alpha \neq 4(2+\sqrt{3}), \quad \beta \neq 4(2+\sqrt{3}), \tag{I9}$$

то для всех достаточно больших $N \geq N_0$ кубические интерполяционные сплайны $S_N(y;x)$ существуют и при $y\in C^{\nu}[a,b]$, $\nu=0,1,2,3$

$$\| S_N^{(p)}(y;x)-y^{(p)}(x)\|_C \leq K_{\nu p}\,h^{\nu-p}\,\omega(y^{(\nu)};h), \quad p<\nu. \tag{20}$$

При $y\in C^2[a,b]$ и $y(x)\in C^4[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\dots,N$,

$$\| S_N^{(p)}(y;x)-y^{(p)}(x)\|_C \leq K_{4p}\,h^{4-p}\max_{x\in[a,b]}|y^{(4)}(x)|, \quad p<4. \tag{2I}$$

Здесь $\omega(y^{(\nu)};h)$ – модуль непрерывности функции $y^{(\nu)}(x)$; $K_{\nu p}, K_{4p}$ – постоянные, не зависящие от N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование сплайнов следует из теоремы 3 в силу того, что при выполнении (I9) условие (I8) будет выполняться при достаточно больших N, так как $|\sqrt{3}-2|\approx 0{,}28<1$. Для получения оценок (20), (2I) достаточно воспользоваться методикой работ [2],[6],[7] и учесть при этом (I0).

Часто предполагают, что величины α,β, входящие в граничные условия, зависят от N, т.е. в системе (I7) первое и последнее уравнения имеют вид: $4M_0+\alpha_N M_1=e_0$; $\beta_N M_{N-1}+4M_N=e_N$. Очевидно, теорема 4 остается справедливой и в этом случае, если вместо (I9) потребовать выполнения условий

$$|\alpha_N-4(2+\sqrt{3})|>æ, \quad |\beta_N-4(2+\sqrt{3})|>æ,$$

где $æ$ не зависит от N.

α	N_0
(−∞;11]	3
[11;14,5]	5
[14,5;14,8]	6
[15,1;15,5]	6
[15,5;19]	5
[19;+∞)	3

Читателя не должно вводить в заблуждение присутствующее в формулировке теоремы 4 выражение "для всех достаточно больших $N \geq N_0$", ибо на самом деле в подавляющем числе случаев N_0 невелико. Приведем таблицу значений N_0 в случае симметричных граничных условий ($\alpha=\beta$). В первом столбце таблицы указаны интервалы изменения α, во втором – соответствующие значения N_0. Число N_0 становится действительно большим только при α очень близких к $4(2+\sqrt{3})\approx 14{,}928$. Так, при $\alpha=4(2+\sqrt{3})\pm 0{,}1$ $N_0=6$; при $\alpha=4(2+\sqrt{3})\pm 0{,}01$ $N_0=8$; при $\alpha=4(2+\sqrt{3})\pm 0{,}001$ $N_0=10$; и только при $\alpha=4(2+\sqrt{3})\pm 10^{-10}$ $N_0=20$.

§3. Существование и сходимость кубической сплайн-интерполяции на неравномерной сетке

Пусть в узлах разбиения $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ заданы значения функции $y(x_i)=y_i$. Задача построения интерполяционного кубического сплайна $S_N(y;x)$ при общих граничных условиях сводится [2] к решению системы вида:

$$\begin{cases} 2M_0+\lambda_0 M_1 = e_0, \\ (1-\lambda_i)M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1} = e_i \quad (i=1,2,\dots,N-1), \\ \lambda_N M_{N-1}+2M_N = e_N, \end{cases} \tag{22}$$

где $M_i = S''_N(y;x_i)$, $i=0,1,\dots,N$; $\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$, $i=1,2,\dots,N-1$, $h_i = x_i - x_{i-1}$; λ_0, λ_N зависят от граничных условий и, вообще говоря, могут принимать любые значения. Матрицу системы (22) будем обозначать через $D(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)$. Пусть B_N-матрица вида:

$$B_N = \begin{bmatrix} 2 & (1-\lambda_1) & & & & \\ 0 & 2 & (1-\lambda_2) & & 0 & \\ & \lambda_1 & 2 & (1-\lambda_3) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{N-3} & 2 & (1-\lambda_{N-1}) & \\ & 0 & & \lambda_{N-2} & 2 & 0 \\ & & & & \lambda_{N-1} & 2 \end{bmatrix}$$

Так как $0<\lambda_i<1$, $i=1,2,\dots,N-1$, то согласно критерию Адамара имеем $|B_N| \neq 0$. Справедлива также оценка

$$\|B_N^{-1}\|_2 \leq 1. \tag{23}$$

ТЕОРЕМА 5. Для существования единственного кубического интерполяционного сплайна $S_N(y;x)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Omega_N = [1+\lambda_0 b_{01}][1+\lambda_N b_{N,N-1}] - \lambda_0\lambda_N b_{0N-1} b_{N1} \neq 0, \tag{24}$$

где $b_{01}, b_{N,N-1}, b_{0,N-1}, b_{N1}$ – элементы матрицы $B_N^{-1} = [b_{ij}]$ $(i,j=0,\dots,N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы, очевидно, следует рассмотреть вопрос об условиях невырожденности матрицы системы (22). Мы применим, с небольшими изменениями, метод, использованный в §I. Элементы d_{ij} $(i,j=0,1,\dots,N)$ матрицы $D^{-1}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)$ можно определить из матричного уравнения

$$D^{-1}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)\cdot D(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N) = E, \tag{25}$$

которое эквивалентно следующим системам:

$$\begin{aligned} &2d_{i0} + (1-\lambda_1)d_{i1} = \delta_{i0}, \\ &2d_{i1} + (1-\lambda_2)d_{i2} = \delta_{i1} - \lambda_0 d_{i0}, \\ &\lambda_{j-1}d_{ij-1} + 2d_{ij} + (1-\lambda_{j+1})d_{ij+1} = \delta_{ij}, \ (j=2,\dots,N-2) \\ &\lambda_{N-2}d_{iN-2} + 2d_{iN-1} = \delta_{iN-1} - \lambda_N d_{iN}, \\ &\lambda_{N-1}d_{iN-1} + 2d_{iN} = \delta_{iN}, \\ &(i=0,1,\dots,N). \end{aligned} \tag{26}$$

Матрица систем (26) совпадает с B_N. Так как $|B_N| \neq 0$, то разрешая (26) относительно d_{i0}, d_{iN}, получим

$$\begin{cases} (1+\lambda_0 b_{01})d_{i0} + \lambda_N b_{0N-1} d_{iN} = b_{0i} \\ \lambda_0 b_{N,1} d_{i0} + (1+\lambda_N b_{N,N-1})d_{iN} = b_{N,i}. \end{cases} \quad (i=0,\dots,N) \tag{27}$$

Определитель этих систем совпадает с Ω_N. Отсюда и следует необходимость и достаточность условия (24) для невырожденности матрицы $D(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)$.

Достоинство условия (24) состоит в том, что в подавляющем большинстве случаев оно весьма просто может быть проверено. Мы укажем сейчас несколько достаточных критериев, гарантирующих выполнение (24).

ТЕОРЕМА 6. Если

$$|1+\lambda_0 b_{01}|\,|1+\lambda_N b_{N,N-1}| > |\lambda_0\lambda_N|\, 4^{-N}\cdot 3^{2-N}, \tag{28}$$

то условие (24) выполняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко получить

$$b_{0,N-1} = 2\frac{(-1)^{N+1}}{|B_N|}\prod_{i=1}^{N-1}(1-\lambda_i), \quad b = 2\frac{(-1)^{N+1}}{|B_N|}\prod_{i=1}^{N-1}\lambda_i.$$

Поэтому

$$\lambda_0\lambda_N b_{0N-1} b_{N1} = \frac{4\lambda_0\lambda_N}{|B_N|^2}\prod_{i=1}^{N-1}\lambda_i(1-\lambda_i). \tag{29}$$

Имеем $|B_N| = 4|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})|$. Пользуясь рекуррентным равенством

$$|D(\lambda_i,\ldots,\lambda_j)| = 2|D(\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_j)| - \lambda_i(1-\lambda_{i+1})|D(\lambda_{i+2},\ldots,\lambda_j)|,$$

где $j>i$, нетрудно получить оценку

$$|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})| \geq 3^{\frac{N-2}{2}}.$$

Следовательно, $|B_N| \geq 4\cdot 3^{\frac{N-2}{2}}$, и из (29)

$$|\lambda_0\lambda_N b_{0N-1} b_{N1}| \leq \frac{|\lambda_0\lambda_N|}{4\cdot 3^{N-2}} \max_{0\leq\lambda_i\leq 1} \prod_{i=1}^{N-1}\lambda_i(1-\lambda_i) = 4^{-N}3^{2-N}|\lambda_0\lambda_N|. \quad (30)$$

Полученная оценка показывает, что действительно при выполнении (28) условие (24) будет выполнено. Доказательство завершено.

В силу весьма быстрого стремления к нулю величины $4^{-N}3^{2-N}|\lambda_0\lambda_N|$ при $N\to\infty$, практически для больших N можно ограничиться проверкой выполнения условий $1+\lambda_0 b_{01}\neq 0$, $1+\lambda_N b_{N,N-1}\neq 0$. При больших $|\lambda_0|$, $|\lambda_N|$ вместо (28) удобнее проверять условие

$$\left|\frac{1}{|\lambda_0|}+\frac{\lambda_0}{|\lambda_0|}b_{01}\right|\left|\frac{1}{|\lambda_N|}+\frac{\lambda_N}{|\lambda_N|}b_{N,N-1}\right| \geq 4^{-N}\cdot 3^{-N+2}.$$

Практически при достаточно больших $|\lambda_0|$, $|\lambda_N|$, N можно ограничиться проверкой условий $b_{01}\neq 0$, $b_{N,N-1}\neq 0$.

Укажем формулы для вычисления b_{01}, $b_{N,N-1}$, входящих в (28). Очевидно,

$$b_{01} = -\frac{(1-\lambda_1)}{2}\cdot\frac{|D(\lambda_2,\ldots,\lambda_{N-1})|}{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})|},$$

$$b_{N,N-1} = -\frac{\lambda_{N-1}}{2}\cdot\frac{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-2})|}{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})|}. \quad (31)$$

Для практических вычислений очень удобно представление отношений определителей в (31) через цепные дроби, а именно:

$$\frac{|D(\lambda_2,\ldots,\lambda_{N-1})|}{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})|} = \cfrac{1}{2-\cfrac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{2-\cfrac{\lambda_2(1-\lambda_3)}{2-\cfrac{\ldots}{2-\cfrac{\lambda_{N-2}(1-\lambda_{N-1})}{2}}}}} \quad (32)$$

$$\frac{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-2})|}{|D(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N-1})|} = \cfrac{1}{2-\cfrac{\lambda_{N-1}(1-\lambda_{N-2})}{2-\cfrac{\lambda_{N-2}(1-\lambda_{N-3})}{2-\cfrac{\ldots}{2-\cfrac{\lambda_2(1-\lambda_1)}{2}}}}} \quad (33)$$

Вычисления по формулам (32), (33) представляют собой циклический, устойчивый относительно накопления вычислительных погрешностей процесс. К тому же, ввиду быстрой сходимости цепных дробей (32),(33), нет нужды считать их целиком. Достаточно, вообще говоря, подсчитать лишь небольшие куски этих дробей. Так, например, если вместо b_{01} использовать величину

$$\tilde{b}_{01} = -\frac{1-\lambda_1}{2}\cdot\cfrac{1}{2-\cfrac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{2-\cfrac{\ldots}{2-\cfrac{\lambda_{k-1}(1-\lambda_k)}{2}}}}, \quad k<N,$$

то нетрудно получить оценку $|b_{01}-\tilde{b}_{01}| < 4^{-k}$.

В монографии [2] невырожденность матрицы $D(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ исследовалась при предположении $0\leq\lambda_i\leq 1$ $(i=1,\ldots,N-1)$. Но в силу того, что при решении задачи построения кубического сплайна все λ_i $(i=1,\ldots,N-1)$ отличны от нуля и единицы, то, нам кажется, более естественным при исследовании матрицы $D(\lambda_0,\ldots,\lambda_N)$ предполагать

$$0<z\leq\lambda_i\leq q\leq 1 \quad (i=1,2,\ldots,N-1). \quad (34)$$

Сформулируем один вспомогательный результат. Пусть имеется дробно-линейная функция $\varphi(\lambda)=\frac{a+\lambda b}{c+\lambda d}$, где a,b,c,d – некоторые постоянные, и $\lambda\in[z,q]$.

ЛЕММА. Если $c+\lambda d\neq 0$ при $r\le\lambda\le q$, то экстремальные значения функции $\varphi(\lambda)$ достигаются в точках $\lambda=r$, $\lambda=q$. При этом

$$\min_{r\le\lambda\le q}\varphi(\lambda)=\frac{a+qb}{c+qd},\quad \max_{r\le\lambda\le q}\varphi(\lambda)=\frac{a+rb}{c+rd},\ \text{если } ad-bc>0,$$

$$\min_{r\le\lambda\le q}\varphi(\lambda)=\frac{a+rb}{c+rd},\quad \max_{r\le\lambda\le q}\varphi(\lambda)=\frac{a+qb}{c+qd},\ \text{если } ad-bc<0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ТЕОРЕМА 7. Пусть имеет место (34). Тогда если выполнено одно из условий

$$\lambda_0<\frac{2(1+\sqrt{1-r(1-r)})}{1-r},\quad \lambda_0>\frac{2(1+\sqrt{1-q(1-q)})}{1-q} \tag{35}$$

и одно из условий

$$\lambda_N<\frac{2(1+\sqrt{1-r(1-r)})}{1-r},\quad \lambda_N>\frac{2(1+\sqrt{1-q(1-q)})}{1-q}, \tag{36}$$

то при всех достаточно больших $N\ge N_0$ будет выполняться (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, (28) будет выполнено для достаточно больших N, если

$$\lim_{N\to\infty}\min_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]>0 \ \text{или}\ \lim_{N\to\infty}\max_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]<0 \tag{37}$$

и

$$\lim_{N\to\infty}\min_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_N b_{NN-1}]>0 \ \text{или}\ \lim_{N\to\infty}\max_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_N b_{NN-1}]<0. \tag{37.I}$$

Используя лемму, из (3I), (32) имеем

$$\min_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]=1-\frac{\lambda_0}{2}\cdot\cfrac{1-r}{2-\cfrac{r(1-r)}{2-\cfrac{r(1-r)}{2-\dots\cfrac{}{2-\cfrac{r(1-r)}{2}}}}} \tag{38}$$

$$\max_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]=1-\frac{\lambda_0}{2}\cdot\cfrac{1-q}{2-\cfrac{q(1-q)}{2-\dots\cfrac{}{2-\cfrac{q(1-q)}{2}}}} \tag{39}$$

Устремляя в (38),(39) N к бесконечности и подсчитывая соответствующие бесконечные цепные дроби, получаем

$$\lim_{N\to\infty}\min_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]=1-\frac{\lambda_0(1-r)}{2(1+\sqrt{1-r(1-r)})},$$

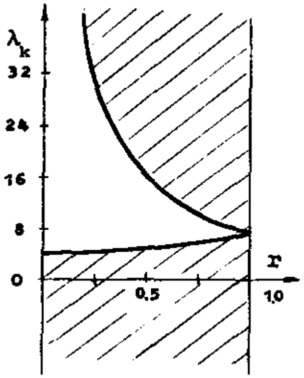
$$\lim_{N\to\infty}\max_{r\le\lambda_i\le q}[1+\lambda_0 b_{01}]=1-\frac{\lambda_0(1-q)}{2(1+\sqrt{1-q(1-q)})}.$$

Отсюда следует, что при выполнении одного из условий (35) будет иметь место одно из неравенств (37). Совершенно аналогично можно показать, что при выполнении одного из неравенств (36) будет иметь место одно из неравенств (37.I). Таким образом, действительно при всех достаточно больших $N\ge N_0$ (28) будет выполняться. Справедливость теоремы 7 теперь следует из теоремы 6.

Положим в (34) $q=1-r$. Согласно доказанной теореме 7, если λ_0,λ_N находятся в области, определяемой неравенствами

$$\lambda_k<\frac{2(1+\sqrt{1-r(1-r)})}{1-r},\quad \lambda_k>\frac{2(1+\sqrt{1-r(1-r)})}{r},\quad k=0,N,$$

то при достаточно больших N будут существовать кубические сплайны. На рисунке эта область заштрихована. Заметим, что в монографии [2] существование сплайна показано только при $\lambda_k<4$, $(k=0,N)$. В случае равномерного разбиения ($r=q=\frac{1}{2}$) для существования сплайна достаточно выполнения условий $\lambda_k\neq 2(2+\sqrt{3})$, $k=0,N$. Это согласуется с результатом теоремы 4, если учесть коэффициент пропорциональности между системами уравнений (I7) и (22).



ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть вместо (34) выполняется $0<r\le\lambda_i\le q<1$, $i=1,2,\dots,k$; $i=N-\ell,\dots,N-1$; $k<N-\ell$. Тогда теоре-

ма 7 остается в силе, если потребовать, чтобы k и ℓ были велики. Таким образом, при решении вопроса о существовании сплайна существенно только расположение тех узлов x_i, которые находятся вблизи концов промежутка $[a,b]$. Важный случай подобной ситуации рассматривает следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть разбиение Δ промежутка $[a,b]$ таково, что

$$h_0=h_1=\ldots=h_{k-1}=h, \quad h_{\nu-\ell}=h_{\nu-\ell+1}=\ldots=h_{\nu-1}=H, \quad k<\nu-\ell.$$

Если $\lambda_0\neq 2(2+\sqrt{3})$, $\lambda_\nu\neq 2(2+\sqrt{3})$, то при достаточно больших k и ℓ условие (24) будет выполнено.

Для доказательства этой теоремы достаточно в формулах (31), (32), (33) положить $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{k-1}=\frac{1}{2}$, $\lambda_{\nu-\ell}=\lambda_{\nu-\ell+1}=\ldots=\lambda_{\nu-1}=\frac{1}{2}$, затем заменить конечные цепные дроби бесконечными и, подсчитав их значения, воспользоваться теоремой 6.

Теоремы 6–8 позволяют решать вопрос о существовании сплайна практически при любых граничных условиях. Только в очень редких случаях может потребоваться непосредственная проверка условия (24), т.е. вычисление элементов $b_{01}, b_{0,\nu-1}, b_{\nu,\nu-1}, b_{\nu 1}$ матрицы B_ν^{-1}. Для этой цели с успехом может быть применен метод прогонки, так как B_ν – матрица с диагональным преобладанием.

Пусть на $[a,b]$ задана последовательность разбиений $\Delta_k: a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\ldots<x_{\nu_k}^{(k)}=b$ $(k=0,1,\ldots)$. Величины, введенные нами ранее для разбиения Δ – $h_i, \lambda_i, \ldots$, будем снабжать дополнительным индексом (k) и считать при этом, что они относятся к разбиению Δ_k. Так, например, $h_i^{(k)}=x_i^{(k)}-x_{i-1}^{(k)}$ $(i=1,\ldots,\nu_k)$. Обозначим

$$h_{(k)}=\min_{1\le i\le \nu_k} h_i^{(k)}, \quad H_{(k)}=\max_{1\le i\le \nu_k} h_i^{(k)}, \quad K=\max_k H_{(k)}\cdot h_{(k)}^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $y(x)\in C^\nu[a,b]$ $(\nu=0,1,2,3)$ и существует такое k_0, что

$$\inf_{k\ge k_0}|1+\lambda_0^{(k)}b_{0,1}^{(k)}|\cdot|1+\lambda_{\nu_k}^{(k)}b_{\nu_k,\nu_k-1}^{(k)}|\ge\Omega>0. \tag{40}$$

Если имеет место по крайней мере одно из условий

$$\inf_{k\ge k_0}|\lambda_{\nu_k-1}^{(k)}|>0, \quad \sup_{k\ge k_0}|\lambda_{\nu_k}^{(k)}|<\infty$$

и одно из условий

$$\sup_{k\ge k_0}|\lambda_0^{(k)}|<\infty, \quad \sup_{k\ge k_0}|\lambda_1^{(k)}|<1,$$

то при всех достаточно больших $k\ge k^*\ge k_0$ кубические интерполяционные сплайны $S_{\nu_k}(y;x)$ будут существовать и

$$\|S_{\nu_k}^{(p)}(y;x)-y^{(p)}(x)\|_C\le C_{\nu p}H_{(k)}^{\nu-p}\omega(y^{(\nu)};H_{(k)}), \quad p\le\nu, \tag{41}$$

где постоянные $C_{\nu p}$ $(\nu=1,2,3;\ p=0,1,2)$ не зависят от $H_{(k)}$ и лишь C_{00}, C_{33} зависят от K (в этом случае последовательность Δ_k нужно выбирать так, чтобы выполнялось условие $K<\infty$). Если $y(x)\in C^2[a,b]$, $y(x)\in C^4[x_{i-1}^{(k)},x_i^{(k)}]$ $(i=1,2,\ldots,\nu_k;\ k=0,1,\ldots)$, то

$$\|S_{\nu_k}^{(p)}(y;x)-y^{(p)}(x)\|_C\le C_{4p}H_{(k)}^{4-p}\max_{a\le x\le b}|y^{IV}(x)|, \quad p<4, \tag{42}$$

где C_{4p} $(p=0,1,2)$ не зависят от $H_{(k)}$, но C_{43} зависит от K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основную трудность при доказательстве такого рода теорем представляет установление оценки для $\|D^{-1}(\lambda_0^{(k)},\lambda_1^{(k)},\ldots,\lambda_{\nu_k}^{(k)})\|_1$. Получим эту оценку. Индекс (k) в дальнейших выкладках будем опускать. Из системы (26) имеем

$$d_{ij}=b_{ij}-\lambda_0 b_{j1}d_{i0}-\lambda_\nu b_{j\nu-1}d_{i\nu} \quad (i,j=0,1,\ldots,\nu), \tag{43}$$

где $d_{i0}, d_{i\nu}$ легко находятся из (27);

$$\alpha_{i0} = \Omega_N^{-1}\,[(1+\lambda_N b_{N,N-1}) b_{0i} - \lambda_N b_{Ni} b_{0,N-1}],$$
$$d_{iN} = \Omega_N^{-1}\,[(1+\lambda_0 b_{01}) b_{N,i} - \lambda_0 b_{N,1} b_{0i}]. \qquad (44)$$

Используя (43), имеем

$$\|D^{-1}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)\|_1 \le \max_i \sum_{j=0}^{N} |b_{ij}| +$$
$$+ |\lambda_0| \max_i |\alpha_{i0}| \sum_{j=0}^{N} |b_{j1}| + |\lambda_N| \max_i |d_{iN}| \sum_{j=0}^{N} |b_{jN-1}| \le$$
$$\le [1+|\lambda_0| \max_i |d_{i0}| + |\lambda_N| \max_i |d_{iN}|]\cdot \|B_N^{-1}\|_2.$$

В силу (23)

$$\|D^{-1}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)\|_1 \le 1+|\lambda_0| \max_i |d_{i0}| + |\lambda_N| \max_i |d_{iN}|.$$

Очевидно, $|b_{ij}|<1 \quad (i,j=0,1,\dots,N)$. Поэтому, учитывая (44), получаем

$$\|D^{-1}(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_N)\|_1 \le 1+(|\lambda_0|+|\lambda_N|+4|\lambda_0\lambda_N|)|\Omega_N^{-1}|.$$

Легко видеть, что отсюда при выполнении условий теоремы следует

$$\|D^{-1}(\lambda_0,\dots,\lambda_N)\|_1 \le 1+L,$$

где L не зависит от N. Теперь для получения оценок (4I), (42) достаточно использовать методику работ [2,6,7].

Пусть для всех Δ_k выполняется (34). Пользуясь теоремой 7, нетрудно убедиться в том, что (40) будет заведомо выполнено, если для всех достаточно больших k будет иметь место одно из условий

$$\lambda_0^{(k)} \le \frac{2[1+\sqrt{1-r(1-r)}]}{1-r} - æ, \quad \lambda_0^{(k)} \ge \frac{2[1+\sqrt{1-q(1-q)}]}{1-q} + æ$$

и одно из условий

$$\lambda_N^{(k)} \le \frac{2[1+\sqrt{1-r(1-r)}]}{1-r} - æ, \quad \lambda_N^{(k)} \ge \frac{2[1+\sqrt{1-q(1-q)}]}{1-q} + æ,$$

где $æ>0$ не зависит от k.

Иногда при исследовании сходимости на последовательность Δ_k накладывают ограничение, отличное от $k<\infty$, а именно, требуют, чтобы $\max\limits_{|i-j|=1} \frac{h_i^{(k)}}{h_j^{(k)}} \le \rho,\ k=0,1,\dots$ Однако даже для простых граничных условий вопросы сходимости при этом исследованы недостаточно полно [6,8,9]. Мы не будем рассматривать этот случай.

§4. Алгоритмы построения кубических сплайнов

Для построения кубического сплайна на неравномерной сетке необходимо решить систему (22). Если $|\lambda_0|\le 2$, $|\lambda_N|\le 2$, то для нахождения решения можно применять метод прогонки, который в этом случае устойчив. При невыполнении этого условия непосредственное применение метода прогонки к системе (22) может привести к неверным результатам. Преобразуем систему (22) к виду

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0; \qquad (45.0)$$

$$\begin{cases} \left[2-\frac{\lambda_0(1-\lambda_1)}{2}\right] M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \frac{d_0(1-\lambda_1)}{2}; \\ (1-\lambda_i) M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i; \\ (1-\lambda_{N-1}) M_{N-2} + \left[2-\frac{\lambda_N \lambda_{N-1}}{2}\right] M_{N-1} = d_{N-1} - \frac{d_N \lambda_{N-1}}{2}; \end{cases} \qquad (45)$$

$$\lambda_N M_{N-1} + 2M_N = d_N. \qquad (45.N)$$

Величины $M_1,\dots,M_{N-1}$ можно найти из системы (45). Условия устойчивости прогонки для нее имеют вид

$$\left|2-\frac{\lambda_0(1-\lambda_1)}{2}\right| \ge \lambda_1, \quad \left|2-\frac{\lambda_N \lambda_{N-1}}{2}\right| \ge 1-\lambda_{N-1}.$$

Если выполнено (34), то отсюда приходим к ограничениям на λ_0, λ_N, при которых прогонка устойчива:

$$\lambda_0 \le 2+\frac{2}{1-r} \quad \text{или} \quad \lambda_0 \ge 2+\frac{2}{1-q};$$
$$\lambda_N \le 2+\frac{2}{q} \quad \text{или} \quad \lambda_N \ge 2+\frac{2}{r}. \qquad (46)$$

Таким образом, если выполняются условия (46), то M_i $(i=1,\dots,N-1)$ находятся методом прогонки из системы (45), M_0 и M_N вычисляются затем из уравнений (45.0) и (45.N).

Наконец рассмотрим случай, когда (46) не выполнено. Поступаем следующим образом.

1. Вычисляем элементы матрицы B_ν^{-1}: $b_{j0}, b_{j1}, b_{j\nu-1}, b_{j\nu}$ $(j=0,1,\dots,\nu)$. Это не представляет труда, ибо сводится к решению четырех систем с трехдиагональной матрицей B_ν, обладающей доминирующей главной диагональю.

2. По формулам (24), (44) находим $\alpha_{00}, \alpha_{\nu\nu}, \Omega_\nu$.

3. Используя (43), вычисляем $\alpha_{0j}, \alpha_{\nu j}$ $(j=0,1,\dots,\nu)$.

4. Неизвестные M_0, M_ν определяем по формулам:

$$M_0 = \sum_{j=0}^{\nu} \alpha_{0j} e_j, \quad M_\nu = \sum_{j=0}^{\nu} \alpha_{\nu j} e_j.$$

5. Исключая из системы (22) M_0, M_ν, для определения остальных неизвестных $M_1,\dots, M_{\nu-1}$ имеем систему с диагональным преобладанием, которую решаем методом прогонки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Когда Ω_ν мало, следует, во избежание значительного накопления вычислительной погрешности, последовательность вычислений в пп. 2,3,4 организовать так, чтобы операция деления на Ω_ν выполнялась в последнюю очередь.

Заметим, что при равномерном разбиении для вычисления M_0, M_ν из (17) удобно использовать явные выражения для элементов обратной матрицы этой системы (формулы (8),(9),(14),(15) при $\alpha=4$, $\omega_1=-2+\sqrt{3}$). В этих выражениях при большом ν можно пренебречь членами вида ω_1^s $(s>>1)$, что приводит к следующим формулам:

$$M_0 = \frac{1}{\alpha\omega_1+4}\left[\alpha\sum_{j=1}^{\nu}\omega_1^j e_j + e_0\right],$$

$$M_\nu = \frac{1}{\beta\omega_1+4}\left[e_\nu + \beta\sum_{j=1}^{\nu}\omega_1^{\nu-j} e_j\right],$$

которые очень удобны для практического использования. При использовании этих формул нет необходимости выполнять суммирование для j от 1 до ν. Достаточно ограничиться небольшим числом слагаемых.

Литература

1. ГАНТМАХЕР Ф.О. Теория матриц. М., "Наука", 1966.

2. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

3. МАРКУС М., МИНК Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., "Наука", 1972.

4. КОЛЛАТЦ Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., "Мир", 1969.

5. ГЕЛЬФОНД А.О. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1967.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 23-73.

7. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполировании кубическими сплайнами. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.56. Новосибирск,1973, с. 18-22.

8. MARSDEN M. Cubic spline interpolation of continuous functions.- "J.Approx.Theory",1974,v.10, N 2,p.103-111.

9. LYCHE T., SCHUMAKER L.L. On the convergence of cubic interpolating splines. - In:Spline functions and approximation theory. Ed.A.Meir, A.Sharma. Birkhauser Verlag, Basel und Stuttgart, 1973, p.169-189.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 июня 1975 года