ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 518.5

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНАХ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Б.И.Квасов

В заметке изучаются введенные в работе [I] эрмитовы сплайны первой степени дефекта I, обобщающие обычную кусочно-линейную интерполяцию. Исследуются их свойства сходимости, поведение при предельных положениях точек склейки сплайна, построены базисы из функций с конечными носителями, получена формула численного интегрирования. Отметим, что построенные сплайны содержат параметры, выбирая которые специальным образом, можно учесть различные особенности, присущие интерполируемой функции.

I. Постановка задачи. Пусть на отрезке $[a,b]$ имеется основная сетка $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}=b$ и дополнительная сетка $\delta=\{x_i+\alpha_1 h_i, x_i+\alpha_2 h_i\}$, где $0<\alpha_1<\alpha_2<1$, $h_i=x_{i+1}-x_i$, $i=0,\ldots,n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Функция $s(x)$ называется сплайном первой степени дефекта I с точками склейки на сетке δ, если

$$s(x)=cx+d+\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{n} c_{ki}(x-x_i+\alpha_k h_i)_+ , \qquad (1)$$

где $c_{ki}=s'(x_i+\alpha_k h_i+0)-s'(x_i+\alpha_k h_i-0)$ $(k=1,2;\ i=0,\ldots,n)$, $(E)_+=\max(E,0)$.

Множество сплайнов вида (I) обозначим через $S_{1,\delta}$.

Изучим свойства сплайнов из $S_{1,\delta}$, когда они решают задачу эрмитовой интерполяции, т.е. при выполнении условия

$$s^{(\alpha)}(x_i)=y_i^{(\alpha)} \quad \text{для} \quad x_i\in\Delta, \qquad (2)$$

где $y_i^{(\alpha)}$ – вещественные числа ($\alpha=0,1;\ i=0,\ldots,n+1$).

2. Формулы интерполяции. Случаи предельных положений точек склейки сплайна. Сплайн $s(x)$ из $S_{1,\delta}$, удовлетворяющий

условию (2), для $x\in[x_i,x_{i+1}]$ имеет вид

$$s(x)=y_i'(x-x_i)+y_i+c_{1i}(x-x_i-\alpha_1 h_i)_+ + c_{2i}(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+ , \qquad (3)$$

где

$$c_{1i}=\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\alpha_2 y_i'-(1-\alpha_2)y_{i+1}'\right],$$

$$c_{2i}(\alpha_1,\alpha_2)=c_{1i}(\alpha_2,\alpha_1).$$

Рассмотрим поведение сплайна $s(x)$, когда $\alpha_2-\alpha_1\to 1$ или $\alpha_2-\alpha_1\to 0$, то есть когда точки склейки сплайна совпадают с узлами сетки Δ или "схлопываются" во внутренних точках интервалов $[x_i, x_{i+1}]$.

Так как

$$(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+ \begin{cases} =0, & x\in[x_i, x_i+\alpha_2 h_i],\\ \leq(1-\alpha_2)h_i, & x\in[x_i+\alpha_2 h_i, x_{i+1}],\end{cases}$$

то при $\alpha_2-\alpha_1=1$ для $x\in[x_i,x_{i+1}]$ получаем

$$s(x)=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}(x-x_i)+y_i, \qquad (4)$$

т.е. мы имеем обычную кусочно-линейную интерполяцию.

С другой стороны, переписывая (3) в виде

$$s(x)=y_i'(x-x_i)+y_i+(\alpha_2-\alpha_1)h_i c_{1i}\frac{(x-x_i-\alpha_1 h_i)_+-(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+}{(\alpha_2-\alpha_1)h_i}+(c_{1i}+c_{2i})(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+$$

и учитывая, что

$$c_{1i}+c_{2i}=y_{i+1}'-y_i',$$

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 0}(\alpha_2-\alpha_1)h_i c_{1i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\alpha_1 y_i'-(1-\alpha_1)y_{i+1}',$$

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 0}\frac{(x-x_i-\alpha_1 h_i)_+-(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+}{(\alpha_2-\alpha_1)h_i}=\theta(x-x_i-\alpha_1 h_i)=\begin{cases}1, & x\geq x_i+\alpha_1 h_i,\\ 0, & x<x_i+\alpha_1 h_i,\end{cases}$$

при $\alpha_2=\alpha_1$ для $x\in[x_i,x_{i+1}]$ будем иметь

$$s(x)=y_i'(x-x_i)+y_i+\left(y_{i+1}-y_i-\frac{y_i'+y_{i+1}'}{2}\right)\theta(x-x_i-\alpha_1 h_i)+(y_{i+1}'-y_i')(x-x_i-\alpha_1 h_i)_+,$$

т.е.

$$s(x)=\begin{cases} y_i'(x-x_i)+y_i, & x\in[x_i,x_i+\alpha_1 h_i],\\ y_{i+1}'(x-x_{i+1})+y_{i+1}, & x\in[x_i+\alpha_1 h_i,\ x_{i+1}]. \end{cases}$$

Следовательно, при $\alpha_2=\alpha_1$ сплайн $s(x)$ будет состоять из отрезков прямых, никак не состыкованных между собой в точках $x_i+\alpha_1 h_i$, $i=0,\ldots,n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Слайны из $S_{1,\delta}$, удовлетворяющие условию (2), могут быть получены предельных переходом, исходя из кусочно-линейной интерполяции (4).

Действительно, для кусочно-линейной интерполяции на отрезке $[x_{j-1},x_{j+2}]$ имеем

$$s(x)=\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}(x-x_{j-1})+y_{j-1}+c_j(x-x_j)_++c_{j+1}(x-x_{j+1})_+, \qquad (5)$$

где

$$c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}},\quad i=j,j+1.$$

Считая теперь, что значения интерполируемой функции y_i $(i=j-1,\ldots,j+2)$ известны в точках $x_{j-1}+\beta_i h_{j-1}$ $(i=1,2;$ $0\le\beta_1<\beta_2\le 1)$, $x_{j+1}+\beta_i h_{j+1}$ $(i=3,4;\ 0\le\beta_3<\beta_4\le 1)$, перепишем (5) в виде

$$s(x)=\frac{y_j-y_{j-1}}{(\beta_2-\beta_1)h_{j-1}}(x-x_{j-1})+\frac{\beta_2 y_{j-1}-\beta_1 y_j}{\beta_2-\beta_1}+c_j(x-x_j)_++c_{j+1}(x-x_{j+1})_+, \qquad (6)$$

где

$$c_j=-\frac{1}{h_j}\left[\frac{y_j-y_{j-1}}{\beta_2-\beta_1}\,\frac{h_j}{h_{j-1}}+\frac{(1-\beta_1)y_j-(1-\beta_2)y_{j-1}}{\beta_2-\beta_1}+\frac{\beta_3 y_{j+2}-\beta_4 y_{j+1}}{\beta_4-\beta_3}\right],$$

а c_{j+1} симметрично с c_j относительно середины интервала $[x_j,x_{j+1}]$.

Отсюда при $\beta_2-\beta_1=\beta_4-\beta_3=0$, полагая

$$x_{j-1}+\beta_1 h_{j-1}=x_i;\ x_j=x_i+\alpha_1 h_i;\ x_{j+1}=x_i+\alpha_2 h_i;\ x_{j+2}+\beta_4 h_{j+1}=x_{i+1}$$

и

$$y_{j+\alpha}=y_{i+\alpha}(\alpha=0,1),\ \lim_{\beta_2-\beta_1\to 0}\frac{y_j-y_{j-1}}{(\beta_2-\beta_1)h_{j-1}}=y_i',\ \lim_{\beta_4-\beta_3\to 0}\frac{y_{j+2}-y_{j+1}}{(\beta_4-\beta_3)h_{j+1}}=y_{i+1}',$$

получаем (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если для каждого отрезка $[x_i,x_{i+1}]$ рассмотреть свои параметры α_{1i},α_{2i} $(i=0,\ldots,n)$, участвующие в определении сплайнов из $S_{1,\delta}$, то, переходя к пределу отдельно по $\alpha_{1i}\to 0$ или $\alpha_{2i}\to 1$, сплайны из $S_{1,\delta}$ можно применить также для решения смешанной задачи Лагранжа-Эрмита, когда значения производной интерполируемой функции известны лишь в некоторых узлах сетки Δ. Пусть, например,

$$s(x_{i+\alpha})=y_{i+\alpha},\ \alpha=-1,0,1;\ s'(x_{i\pm1})=y_{i\pm1}',$$

где $y_i^{(\alpha)}$ – вещественные числа, $\alpha=0,1$. Тогда при $1-\alpha_{2i-1}=\alpha_{1i}=0$ выражение (3) для сплайна $s(x)$ заменяется на

$$s(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_{2i}}\left[\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-(1-\alpha_{2i})y_{i+1}'\right](x-x_i)+y_i, & x\in[x_i,x_i+\alpha_{2i}h_i],\\ y_{i+1}'(x-x_{i+1})+y_{i+1}, & x\in[x_i+\alpha_{2i}h_i,\ x_{i+1}]. \end{cases}$$

3. Свойства сходимости. На отрезке $[a,b]$ введем последовательность сеток $\Delta_k: a=x_{k0}<x_{k1}<\ldots<x_{kn_k+1}=b$ и, полагая $\|\Delta_k\|=\max\limits_{0\le i\le n_k}(h_{ki})$, где $h_{ki}=x_{ki}-x_{ki-1}$ $(i=0,\ldots,n)$, потребуем, чтобы

$$\|\Delta_k\|\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty. \qquad (7)$$

Нам понадобится также условие

$$\beta^{-1}\le h_{ki}/h_{ki+\alpha}\le\beta\ (\beta\ge 1;\ \alpha=\pm1). \qquad (8)$$

В дальнейшем ради сокращения записи индекс сетки k всюду, кроме формулировок теорем, будет опущен.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы последовательность сеток Δ_k, удовлетворяющая условию (7), и функция $y(x)\in C^1[a,b]$. Тогда для сплайна $s_k(x)\in S_{1,\delta}$, интерполирующего $y(x)$ на сетке Δ_k и такого, что $s'(x_i)=y'(x_i)$ для $x_i\in\Delta_k$, имеем

$$s_k^{(p)}(x)-y^{(p)}(x)=\frac{o(\|\Delta_k\|^{1-p})}{(\alpha_2-\alpha_1)^p}\quad(p=0,1)$$

равномерно относительно x на $[a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$s'(x)=\begin{cases} y_i', & x\in[x_i,\ x_i+\alpha_1 h_i),\\ \dfrac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left[\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\alpha_1 y_i'-(1-\alpha_2)y_{i+1}'\right], & x\in[x_i+\alpha_1 h_i,\ x_i+\alpha_2 h_i),\\ y_{i+1}', & x\in[x_i+\alpha_2 h_i,\ x_{i+1}],\end{cases}$$

то

$$|s'(x)-y'(x)|\le\begin{cases}\omega_1, & x\in[x_i,\ x_i+\alpha_1 h_i),\\ \dfrac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\,\omega_1, & x\in[x_i+\alpha_1 h_i,\ x_i+\alpha_2 h_i),\\ \omega_1, & x\in[x_i+\alpha_2 h_i,\ x_{i+1}],\end{cases}$$

где $\omega_1=\omega_1(y',\|\Delta\|)$ – модуль непрерывности функции $y'(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Тогда

$$|s(x)-y(x)|=\left|\int_{\bar x}^{x}(s'(x)-y'(x))dx\right|\le\left|\int_{\bar x}^{\bar x+\bar\alpha h_i}(s'(x)-y'(x))dx\right|+$$
$$+\left|\int_{\bar x+\bar\alpha h_i}^{\bar x+\hat\alpha h_i}(s'(x)-y'(x))dx\right|+\left|\int_{\bar x+\hat\alpha h_i}^{\bar x+h_i/2}(s'(x)-y'(x))dx\right|\le|\bar\alpha|\,\omega_1 h_i+$$
$$+\omega_1 h_i+\left(\frac12-|\hat\alpha|\right)\omega_1 h_i=\left(\frac32-(\alpha_2-\alpha_1)\right)h_i\omega_1\le\frac32\|\Delta\|\,\omega_1, \qquad (9)$$

где $\bar x$ – ближайший к x конец отрезка $[x_i,x_{i+1}]$, а $\bar\alpha=\alpha_1$, $\hat\alpha=\alpha_2$, если $\bar x=x_i$ и $\bar\alpha=-(1-\alpha_2)$, $\hat\alpha=-(1-\alpha_1)$, если $\bar x=x_{i+1}$.

С другой стороны, из (3) непосредственно имеем

$$|s(x)-y(x)|\le\begin{cases}\alpha_1 h_i\omega_1, & x\in[x_i,\ x_i+\alpha_1 h_i],\\ h_i\omega_1, & x\in[x_i+\alpha_1 h_i,\ x_i+\alpha_2 h_i],\\ (1-\alpha_2)h_i\omega_1, & x\in[x_i+\alpha_2 h_i,\ x_{i+1}].\end{cases} \qquad (9')$$

Если на отрезке $[a,b]$ функция $y'(x)$ удовлетворяет кроме того условию Липшица порядка α $(0<\alpha\le 1)$

$$|y'(x_1)-y'(x_2)|\le\mathcal{L}|x_1-x_2|,\quad x_1,x_2\in[a,b],$$

то величину ω_1 в оценках (9),(9') можно заменить на $\mathcal{L}\|\Delta\|^{\alpha}$.

Теорема доказана.

Перепишем (3) в виде

$$s(x)=-p(t)y_{i+1}'h_i+q(t)y_i'h_i+r(t)(y_{i+1}-y_i)+\frac{y_i+y_{i+1}}{2},$$

где

$$p(t)=\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}(t-\alpha_1)_+-\frac{1-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}(t-\alpha_2)_+,$$

$$q(t)=t-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}(t-\alpha_1)_++\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}(t-\alpha_2)_+,$$

$$r(t)=p(t)-q(t)+t-1/2,\quad t=\frac{x-x_i}{h_i}.$$

Полагая

$$y_i'-\eta_i=\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}+\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}},\quad \lambda_i=1-\mu_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}$$

и используя обозначение

$$y[x_{i+1},x_i,x_{i-1}]=\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\frac{2}{h_{i-1}+h_i},$$

будем также иметь

$$s(x)=-p(t)h_i\eta_{i+1}+q(t)h_i\eta_i+r(t)(y_{i+1}-y_i)+\frac{y_i+y_{i+1}}{2}=$$
$$=p(t)\frac{h_i^2}{2}y[x_{i+2},x_{i+1},x_i]-q(t)\frac{h_i^2}{2}y[x_{i+1},x_i,x_{i-1}]+$$
$$+(y_{i+1}-y_i)(t-1/2)+\frac{y_i+y_{i+1}}{2}.$$

Тогда так как при выполнении условия (8)

$$|h_i\eta_i|\le\beta\omega,\quad \left|\frac{h_i^2}{2}\,y[x_{i+1},x_i,x_{i-1}]\right|\le\beta\omega,$$

где $\omega=\omega(y,\|\Delta\|)$ – модуль непрерывности функции $y(x)$ на отрезке $[a,b]$, и $|p(t)|\le 1-\alpha_2$, $|q(t)|\le\alpha_1$, $|r(t)|\le 1/2$, то

$$|s(x)-y(x)|\le\left[\frac32+(1+\alpha_1-\alpha_2)\beta\right]\omega\le\frac52\,\omega. \qquad (10)$$

Отметим, что если $\alpha_1+\alpha_2=1$, то $q(t)=p(1-t)$ и

$$|s(x)-y(x)|\le(3/2+2\alpha_1\beta)\omega.$$

Если, кроме того, на отрезке $[a,b]$ функция $y(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha\ (0<\alpha\leq 1)$, то величину ω в оценке (10) можно заменить на $\mathcal{L}\,\|\Delta\|^{\alpha}$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы последовательность сеток Δ_k, удовлетворяющая условиям (7), (8), и функция $y(x)\in C[a,b]$, периодически продолжаемая за $[a,b]$. Тогда для сплайна $s_k(x)\in S_{1,\delta_k}$, интерполирующего $y(x)$ на Δ_k и такого, что $s'(x_i)=\eta_i$ для $x_i\in\Delta_k$, имеем $s_k(x)-y(x)=O(\|1\|)$ равномерно относительно x на $[a,b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оценки (9), (10) будут наилучшими, когда $\alpha_2-\alpha_1=1$, т.е. в случае обычной кусочно-линейной интерполяции. Тогда соответственно $|s(x)-y(x)|\leq 1/2\,\|\Delta\|\,\omega_1$ и $|s(x)-y(x)|\leq 3/2\,\omega$.

4. Базис из функций с конечными носителями. Пределы базисных сплайнов. В силу представления (1) множество сплайнов $S_{1,\delta}$ является конечномерным линейным пространством размерности $2n+4$. Для того чтобы построить его базис из сплайнов с минимальными носителями, рассмотрим функцию $\varphi(x,t)=(x-t)_+$. Положим (рис.1).

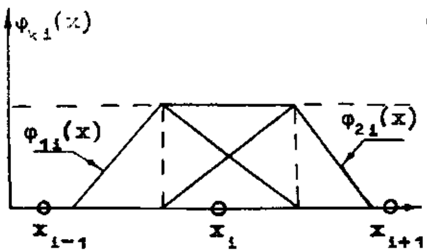

Рис. 1

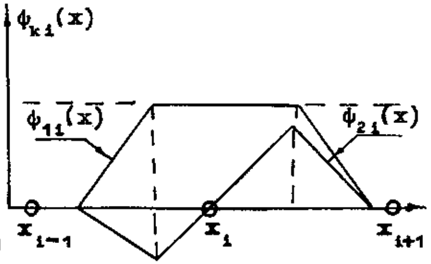

Рис. 2

$$\varphi_{1i}(x)=[(1-\alpha_1)h_{i-1}+\alpha_1 h_i]\,\varphi[x;x_{i-1}+\alpha_1 h_{i-1},x_{i-1}+\alpha_2 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i],$$

$$\varphi_{2i}(x)=[(1-\alpha_2)h_{i-1}+\alpha_2 h_i]\,\varphi[x;x_{i-1}+\alpha_2 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i,x_i+\alpha_2 h_i]$$

или

$$\varphi_{1i}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}-\alpha_1 h_i}{(\alpha_2-\alpha_1)h_{i-1}}, & x\in[x_{i-1}+\alpha_1 h_{i-1},x_{i-1}+\alpha_2 h_{i-1}],\\[2ex] -\dfrac{x-x_i-\alpha_1 h_i}{(1-\alpha_2)h_{i-1}+\alpha_1 h_i}, & x\in[x_{i-1}+\alpha_2 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i],\\[2ex] 0 - \text{в противном случае},\end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}-\alpha_2 h_{i-1}}{(1-\alpha_2)h_{i-1}+\alpha_1 h_i}, & x\in[x_{i-1}+\alpha_2 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i],\\[2ex] -\dfrac{x-x_i-\alpha_2 h_i}{(\alpha_2-\alpha_1)h_i}, & x\in[x_i+\alpha_1 h_i,x_i+\alpha_2 h_i],\\[2ex] 0 - \text{в противном случае}\end{cases}$$

$$(i=1,\dots,n).$$

ЛЕММА 4.1. Функции $\varphi_{ki}(x)\ (k=1,2;\ i=1,\dots,n)$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е.

$$c_1\varphi_{11}(x)+c_2\varphi_{21}(x)+\dots+c_{2n}\varphi_{2n}(x)=0,$$

где не все $c_i\ (i=1,\dots,2n)$ равны нулю. Тогда, выбирая $x\in[x_0+\alpha_1 h_0,\ x_0+\alpha_2 h_0]$, получаем $c_1\varphi_{11}(x)=0$ и, следовательно, в силу неотрицательности $\varphi_{11}(x)$ на $[x_0+\alpha_1 h_0,x_0+\alpha_2 h_0]$, имеем $c_1=0$. Аналогично для $x\in[x_0+\alpha_2 h_0,x_1]$ получим $c_2\varphi_{21}(x)=0$, и так как $\varphi_{21}(x)>0$ для $x\in(x_0+\alpha_2 h_0,\ x_1]$, то $c_2=0$ и т.д.

Лемма доказана.

Используя разделенные разности с повторяющимися аргументами (см. [2]), введем в рассмотрение четыре "граничных" сплайна:

$$\varphi_{10}(x)=\alpha_1 h_0\,\varphi[x;a,a,a+\alpha_1 h_0],$$

$$\varphi_{20}(x)=\alpha_2 h_0\,\varphi[x;a,a+\alpha_1 h_0,a+\alpha_2 h_0],$$

$$\varphi_{1n+1}(x)=(1-\alpha_1)h_n\,\varphi[x,b-(1-\alpha_1)h_n,b-(1-\alpha_2)h_n,b],$$

$$\varphi_{2n+1}(x)=(1-\alpha_2)h_n\,\varphi[x,b-(1-\alpha_2)h_n,b,b].$$

Отметим, что функции $\varphi_{ki}(x)\ (k=1,2;\ i=0,\dots,n+1)$ образуют разбиение единицы на отрезке $[a,b]$:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=0}^{n+1}\varphi_{ki}(x)=\chi_{[a,b]}(x),$$

где $\chi_{[a,b]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 4.I. Функции $\varphi_{ki}(x)$ $(k=1,2;\ i=0,\dots,n+1)$ образуют базис пространства $S_{1,\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (I) размерность пространства $S_{1,\delta}$ равна $2n+4$, и, следовательно, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать линейную независимость функций $\varphi_{ki}(x)$ $(k=1,2;\ i=0,\dots,n+1)$.

Предположим противное, т.е.

$$f(x)=c_{10}\varphi_{10}(x)+c_{20}\varphi_{20}(x)+\dots+c_{1n+1}\varphi_{1n+1}(x)+c_{2n+1}\varphi_{2n+1}(x)=0,$$

где не все c_{ki} $(k=1,2;\ i=0,\dots,n+1)$ равны нулю. Полагая $\bar{x}=a+\alpha_1 h_0$, получим $f(\bar{x})=c_{20}\varphi_{20}(\bar{x})=c_{20}=0$. Следовательно, для $x\in[a,a+\alpha_1 h_0]$ имеем $c_{10}\varphi_{10}(x)=0$, и так как функция $\varphi_{10}(x)$ неотрицательна на $[a,a+\alpha_1 h_0]$, то также $c_{10}=0$. Аналогично рассматривая $f(x)$ на $[b-(1-\alpha_2)h_n,b]$, получим $c_{kn+1}=0$ $(k=1,2)$. Тогда по лемме 4.I также $c_{ki}=0$ $(k=1,2;\ i=1,\dots,n)$.

Теорема доказана.

В ряде случаев бывает полезным представление сплайнов из $S_{1,\delta}$, удовлетворяющих условию (2), в виде

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n+1}y_i\,\psi_{1i}(x)+\sum_{i=0}^{n+1}y_i'\,\psi_{2i}(x),$$

где

$$\psi_{1i}^{(\alpha)}(x_j)=\psi_{2i}^{(1-\alpha)}(x_j)=\delta_{ij}(1-\alpha)\quad(\alpha=0,1;\ i,j=0,\dots,n+1).$$

Нетрудно, впрочем, выразить функции $\psi_{ki}(x)$ через $\varphi_{ki}(x)$ $(k=1,2;\ i=0,\dots,n+1)$, а именно: $\psi_{1i}(x)=\varphi_{1i}(x)+\varphi_{2i}(x)$, $\psi_{2i}(x)=-(1-\alpha_2)h_{i-1}\varphi_{1i}(x)+\alpha_1 h_i\varphi_{2i}(x)$, причем $\psi_{20}(x)=\alpha_1 h_0\varphi_{20}(x)$, $\psi_{2n+1}(x)=-(1-\alpha_2)h_n\varphi_{1n+1}(x)$ (см. рис.2).

Используя вид функций $\varphi_{ki}(x)$ $(k=1,2;\ i=0,\dots,n)$, также имеем

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 1}\psi_{1i}(x)=\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 1}\left[\frac{(x-x_{i-1}-\alpha_1 h_{i-1})_+-(x-x_{i-1}-\alpha_2 h_{i-1})_+}{h_{i-1}}-\frac{(x-x_i-\alpha_1 h_i)_+-(x-x_i-\alpha_2 h_i)_+}{h_i}\right]=$$

$$=(h_{i-1}+h_i)\varphi[x;x_{i-1},x_i,x_{i+1}],$$

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 0}\psi_{1i}(x)=\begin{cases}1, & x\in[x_{i-1}+\alpha_1 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i],\\ 0 & \text{– в противном случае,}\end{cases}$$

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 1}\psi_{2i}(x)\equiv 0,$$

$$\lim_{\alpha_2-\alpha_1\to 0}\psi_{2i}(x)=\begin{cases}x-x_i, & x\in[x_{i-1}+\alpha_1 h_{i-1},x_i+\alpha_1 h_i],\\ 0 & \text{– в противном случае,}\end{cases}$$

причем $\psi_{k0}(x)$ и $\psi_{kn+1}(x)$ $(k=1,2)$ будут отличны от нуля соответственно лишь в интервалах $[a,a+\alpha_1 h_0]$ и $[b-(1-\alpha_1)h_n,b]$.

5. Формула численного интегрирования. Для сплайна $s(x)$ вида (3) имеем

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}s(x)\,dx=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}y_i h_i+\left(1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)y_{i+1}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}h_i^2y_i'-\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{2}h_i^2y_{i+1}'$$

и, в частности, если $\alpha_1+\alpha_2=1$, то

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}s(x)\,dx=\frac{y_i+y_{i+1}}{2}h_i+\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}h_i^2(y_i'-y_{i+1}').$$

Литература

I. КВАСОВ Б.И. Получение сплайнов осреднением кусочно-постоянных функций. Сплайны с дополнительными узлами. –В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т.4, № I, с. 39–55 (ВЦ СО АН СССР).

2. МИКЕЛАДЗЕ Ш.Е. Численные методы математического анализа. М., ГИТТЛ, 1953.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 июня 1975 года