В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы

1975 год   Выпуск 65

УДК 518.12

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНЕЙ

А.Дуйсеков, В.Л.Мирошниченко

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть отрезок $[a,b]$ разделен на промежутки множеством точек $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$.

Л о к а л ь н ы м   с п л а й н о м степени $2n-1$ называется функция $s(x)$, которая

а) на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ является полиномом степени $2n-1$,

$$P^{(i)}(x)=\sum_{\nu=0}^{2n-1} a_\nu^{(i)}(x-x_i)^\nu \quad (i=0,\ldots,N-1), \qquad (1)$$

б) принадлежит $C^{n-1}[a,b]$.

Коэффициенты каждого звена такой функции могут быть определены по её значениям и значениям первых $n-1$ производных $D^p s(x_i)=z_i^{(p)}$ ($p=0,1,\ldots,n-1$) на концах промежутка $[x_i, x_{i+1}]$ независимо от значений в остальных узлах. Заметим, что этим, в сущности, и объясняется термин "локальный сплайн".

Широко известны сплайны первой степени $(n=1)$. Если, например, в качестве $s(x_i)$ берутся значения некоторой функции $f(x)$ в узлах сетки Δ, то линейный сплайн представляет собой ломаную, проходящую через точки (x_i, f_i). На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ такой сплайн осуществляет линейную интерполяцию значений функции $f(x)$, заданных в узлах x_i, x_{i+1}. Из многочисленных работ, посвященных линейным сплайнам, отметим статью [1], в которой получены точные оценки погрешности интерполяции в классе непрерывных функций.

Локальные сплайны произвольной степени впервые в работе рассмотрены В.С.Рябеньким [2]. Им указан один из возможных способов построения таких сплайнов и установлен порядок погрешности при интерполировании функций из различных классов. В [3] получены точные оценки погрешности интерполяции непрерывной функции для одного частного вида сплайнов степени $2n-1$, когда $z_i^{(p)}=0$ $(i=0,1,\ldots,N;\ p=1,2,\ldots,n-1)$.

Интерес к локальным сплайнам объясняется в первую очередь простотой алгоритмов интерполяции и аппроксимации, построенных на их основе [4].

В настоящей статье получены точные, в некотором смысле, оценки погрешности интерполяции непрерывных функций сплайнами третьей и пятой степеней.

2. И н т е р п о л и р о в а н и е   к у б и ч е с к и м и   л о к а л ь н ы м и   с п л а й н а м и. Для построения кубического сплайна $(n=2)$ нужно знать z_i и $z_i^{(1)}$ $(i=0,1,\ldots,N)$. Если обозначить $h_i=x_{i+1}-x_i$, $t=\frac{x-x_i}{h_i}$, то уравнение сплайна при $x\in[x_i, x_{i+1}]$ будет иметь вид:

$$P^{(i)}(x_i+th_i)=z_i(1-t)^2(1+2t)+z_{i+1}t^2(3-2t)+$$
$$+t(1-t)^2h_i z_i^{(1)}-t^2(1-t)h_i z_{i+1}^{(1)}. \qquad (2)$$

Пусть ставится задача интерполяции непрерывной функции. Тогда

$$z_i=f(x_i)=f_i \quad (i=0,1,\ldots,N). \qquad (3)$$

Производные $z_i^{(1)}$ зададим в виде

$$z_i^{(1)}=\beta_i\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}+\alpha_i\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}, \qquad (4)$$

где β_i и α_i – величины, зависящие только от h_i и h_{i-1}, причем $0\le\alpha_i\le1$, $0\le\beta_i\le1$, $\alpha_i+\beta_i=1$. Такое задание производных в случае периодической с периодом $(b-a)$ функции $f(x)$ возможно во всех узлах сетки Δ. В непериодическом случае полагаем

$$z_0^{(1)}=(1+\alpha_1)\frac{f_1-f_0}{h_0}-\alpha_1\frac{f_2-f_1}{h_1},$$
$$z_N^{(1)}=(1+\beta_{N-1})\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}-\beta_{N-1}\frac{f_{N-1}-f_{N-2}}{h_{N-2}}. \qquad (5)$$

Оценим остаточный член интерполяции $R(x) = S(x) - f(x)$. Ради простоты мы ограничимся рассмотрением периодического случая. Однако заметим, что все полученные ниже оценки справедливы и в непериодическом случае. В этом легко убедиться, если на интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ повторить приведенные ниже рассуждения, но учесть (5).

На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ из (2),(3),(4) имеем

$$R(x_i + th_i) = [1-\varphi(t)]f_i + \varphi(t) f_{i+1} - f(x) +$$

$$+\beta_i t(1-t)^2 \frac{h_i}{h_{i-1}} (f_i - f_{i-1}) - \alpha_{i+1} t^2(1-t) \frac{h_i}{h_{i+1}} (f_{i+2} - f_{i+1}), \qquad (6)$$

где $\varphi(t) = t^2(3-2t) + \alpha_i t(1-t)^2 - t^2(1-t)\beta_{i+1}$.

При $t \in [0,1]$ имеем $0 \le \varphi(t) \le 1$. Поэтому по теореме о промежуточном значении непрерывной функции имеем

$$[1-\varphi(t)]f_i + \varphi(t) f_{i+1} = f(\xi_{i,i+1}), \quad x_i \le \xi_{i,i+1} \le x_{i+1}.$$

Пусть $V(f) = \max\limits_i \max\limits_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|$ – максимум колебания функции $f(x)$ на сетке Δ.

Тогда оценка остаточного члена на $[a,b]$ будет

$$|R(x)| \le \max_i \max_{t \in [0,1]} \left\{ 1 + t(1-t)\left[\frac{\beta_i h_i}{h_{i-1}}(1-t) + \frac{\alpha_{i+1} h_i}{h_{i+1}} t \right] \right\} V(f). \qquad (7)$$

Рассмотрим некоторые варианты задания величин α_i, β_i в (4).

а) $\alpha_i = \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$, т.е., $z_i^{(1)} = 0$:

$$|R(x)| \le V(f). \qquad (8)$$

б) $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, $z_i^{(1)} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$: (9)

$$|R(x)| \le \left(1 + \frac{4\rho}{27}\right) V(f), \qquad (10)$$

где $$\max_{|i-j|=1} \frac{h_i}{h_j} = \rho < \infty. \qquad (11)$$

в) $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $z_i^{(1)} = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}$. (12)

Справедлива оценка (10).

г) $\alpha_i = \dfrac{h_i}{h_{i-1} + h_i}$, $\beta_i = 1 - \alpha_i$, $z_i^{(1)} = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$, (13)

$$|R(x)| \le \left(1 + \frac{\rho}{4(1+\rho)}\right) V(f). \qquad (14)$$

д) $\alpha_i = \dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$, $\beta_i = 1 - \alpha_i$,

$$z_i^{(1)} = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \cdot \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \qquad (15)$$

$$|R(x)| \le \left(1 + \frac{\rho^2}{4(1+\rho)}\right) V(f). \qquad (16)$$

Из приведенных оценок лучшей является (8) в случае а). Однако, как нетрудно видеть, что во всех остальных случаях, в отличие от а), аппроксимируется не только функция $f(x)$, но и её производная $f'(x)$, разумеется, если она существует. С этой точки зрения, применение способа задания величин $z_i^{(1)}$, рассмотренное в а), не представляет особого интереса, ибо на практике, при решении задач интерполяции и аппроксимации, как правило, приходится иметь дело по крайней мере с кусочно-дифференцируемыми функциями.

В оценки (10),(14),(16) входит величина $\rho \ge 1$, характеризующая степень регулярности сетки. Заметим, что на самом деле в (14) ρ входит чисто формально, ибо $\dfrac{\rho}{1+\rho} < 1$, и (14) может быть заменено на $|R(x)| \le 5/4\, V(f)$.

Из указанных трёх оценок наилучшей при всех значениях $\rho > 1$ является (14). Следовательно, в случае сильно нерегулярной сетки при аппроксимации либо интерполяции значений функции $f(x)$ предпочтительнее пользоваться вариантом г).

Но, с другой стороны, очевидно, задание $z_i^{(1)}$ по формуле (15) в случае неравномерной сетки лучше аппроксимирует производную f_i', нежели применение для этой цели формул (9),(12),(13).

Таким образом, если требуется учесть значение производной $f'(x)$, то вариант д) более приспособлен к этому по сравнению с б), в), г).

При $\rho=1$ варианты г) и д) тождественны.

ТЕОРЕМА. Постоянные в оценках (8), (I0), (I4), (I6) уменьшить нельзя, а именно: справедливы равенства

$$\sup_{\{\Delta_k\}} \sup_{f\in C} \max_{x\in[a,b]} \frac{|R_k(x)|}{|V_k(f)|} = C_r, \qquad (I7)$$

где C_r - постоянные, не зависящие от x в формулах (8), (I0), (I4), (I6), и $\{\Delta_k\}$ - множество всевозможных разбиений отрезка $[a,b]$, удовлетворяющих условию (II) во всех случаях, кроме а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно указать некоторое разбиение Δ и функцию, заданную на $[a, b]$, такие, чтобы соответствующие оценки, по крайней мере для одного $x\in[a,b]$, обращались в равенство.

В случае а) на произвольном разбиении знак равенства в (8) достигается при $x=x^*\in(x_i, x_{i+1})$ для непрерывной функции, заданной соотношениями:

$$f_1(x)=\begin{cases} A, & x\notin[x_i, x_{i+1}],\\ \dfrac{x^*-x}{x^*-x_i}\cdot A, & x\in[x_i, x^*],\\ \dfrac{x-x^*}{x_{i+1}-x^*}\cdot A, & x\in[x^*, x_{i+1}],\end{cases}$$

где A - некоторая постоянная. В этом легко убедиться, подсчитав величину $R(x^*)$ по формуле (6) и сравнив её с оценкой (8).

Во всех остальных случаях для заданного ρ разбиение Δ выберем так, чтобы узлы $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ (i фиксировано) удовлетворяли условиям: $h_i=\rho h_{i-1}$, $h_i=\rho h_{i+1}$. Все остальные узлы могут быть расположены произвольно, лишь бы только выполнялось (II).

Зададим на $[a,b]$ функцию

$$f_2(\lambda;x)=\begin{cases} 0, & x\notin[x_{i-1}, x_{i+2}],\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\cdot A, & x\in[x_{i-1}, x_i],\\ \dfrac{\lambda-x}{\lambda-x_i}\cdot A, & x\in[x_i, \lambda],\\ \dfrac{x-\lambda}{x_{i+1}-\lambda}\cdot A, & x\in[\lambda, x_{i+1}],\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}\cdot A, & x\in[x_{i+1}, x_{i+2}],\end{cases} \qquad (I8)$$

где $\lambda\in(x_i, x_{i+1})$ - некоторый параметр.

Тогда в случае б) равенство в оценке (I0) достигается для функции $f_2(x_i+\frac{2}{3}h_i; x)$ в точке $x=x_i+\frac{2}{3}h_i$. Для случая в) оценка (I0) обращается в равенство для функции $f_2(x_i+\frac{1}{3}h_i;\ x)$ при $x=x_i+\frac{1}{3}h_i$. И, наконец, для вариантов г) и д) знак равенства в соответствующих оценках (I4), (I6) будет иметь место для функции $f_2(x_i+\frac{1}{2}h_i; x)$ в точке $x=x_i+\frac{1}{2}h_i$. Это и требовалось доказать.

Заметим, что в силу локальности сплайна нетрудно построить также последовательность разбиений $\{\Delta_\ell\}$, обладающую свойством $H_\ell\to 0$ (H_ℓ - максимальный шаг сетки Δ_ℓ), и непрерывную функцию $f(x)$ на $[a,b]$ таким образом, что соответствующие оценки будут достигаться на каждом разбиении Δ_ℓ.

3. Интерполирование локальными сплайнами пятой степени. Для построения сплайна пятой степени $(n=3)$ зададим $z_i^{(1)}$ соотношениями (4) при

$$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_i+h_{i-1}}, \quad \beta_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}.$$

Положим

$$z_i^{(2)}=\frac{2}{h_i+h_{i-1}}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right]. \qquad (I9)$$

Такое задание производных использовалось в [2] и [5].

В непериодическом случае $z_0^{(1)}, z_N^{(1)}$ будем брать в виде (5) и, кроме того, будем считать $z_0^{(2)}=z_1^{(2)}$, $z_N^{(2)}=z_{N-1}^{(2)}$.

Уравнение сплайна при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеет вид

$$P^{(i)}(x_i+t h_i)=(1-t)^2(1+2t)f_i+t^2(3-2t)f_{i+1}+$$
$$+t(1-t)^2(1+2t)z_i^{(1)}+t^2(1-t)(3-2t)z_{i+1}^{(1)}+$$
$$+\frac{1}{2}t^2(1-t)^2(1+2t)z_i^{(2)}+\frac{1}{2}t^2(1-t)(3-2t)z_{i+1}^{(2)}. \qquad (20)$$

Интересно отметить, что в непериодическом случае при указанном способе задания величин $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_N^{(1)}, z_N^{(2)}$ сплайн пятой степени на интервалах $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ будет выражаться полиномами второй степени.

Оценим остаточный член интерполяции. Будем рассматривать периодический случай. Однако полученная оценка будет справедливой и в непериодическом случае, в чем нетрудно убедиться, проделав аналогичные выкладки для граничных интервалов $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$.

Подставляя в (20) значения $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}$ из (4) и (I9), имеем на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$R(x) = s(x)-f(x)=[1-\varphi(t)]f_i+\varphi(t)f_{i+1}-f(x)+$$
$$+\frac{h_i^2}{h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)}t(1-t)^3(1+2t)(f_i-f_{i-1})+$$
$$+\frac{h_i^2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}t^3(1-t)(3-2t)(f_{i+1}-f_{i+2}), \qquad (2I)$$

где

$$\varphi(t)=t-\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}t(1-t)^3(1+2t)+\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}t^3(1-t)(3-2t).$$

Так как

$$\varphi'(t)=1-\frac{(1-t)^2h_i}{h_{i-1}+h_i}-\frac{t^2h_i}{h_i+h_{i+1}}+10t^2(1-t)^2\left[\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}+\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\right]>0,$$

то функция $\varphi(t)$ монотонно возрастает при $t \in [0, 1]$. В силу того, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, имеем $0 \le \varphi(t) \le 1$, $t \in [0, 1]$. Теперь из (2I) легко получаем

$$|R(x)| \le \left[1+\frac{\rho^2}{4(1+\rho)}\right]V(f). \qquad (22)$$

Эта оценка лучше, чем оценка из [5].

Кроме того, она неулучшаема в смысле соотношения (I7). В этом легко убедиться, выбрав разбиение Δ так же, как это было сделано для кубических сплайнов в случаях б), в), г), д), и подсчитав остаточный член интерполяции по формуле (2I) для функции $f_2(x_i+\frac{1}{2}h_i; x)$ (I8) в точке $x=x_i+\frac{1}{2}h_i$. Получим

$$R\left(x_i+\frac{1}{2}h_i\right)=\left[1+\frac{\rho^2}{4(1+\rho)}\right]\cdot A.$$

Отсюда и следует неулучшаемость оценки (22) ввиду того, что

$$V(f_2(x_i+\frac{1}{2}h_i))=A.$$

Авторы благодарны Ю.С.Завьялову за внимание к работе и полезные советы.

Литература

I. ЛОГИНОВ А.С. Оценки приближения ломаными непрерывных функций класса H_ω.-"Вестник МГУ", 1970, № 6, с.47-55.

2. РЯБЕНЬКИЙ В.С., ФИЛИППОВ А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.

3. ВЕЛИКИН В.Л. О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций. -"Мат.заметки", 1970, т.8, №I, с. 4I-46.

4. AKIMA H. A new method of interpolation and smooth fitting based on local procedure.-"J.ACM",1970,v.17,N 4,p.589-602.

5. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
I октября 1975 года