ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1975 год Выпуск 65

УДК 517.5:518.61

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СПЛАЙНОВ

И.А.Пахнутов

В настоящей работе сделана попытка обобщить известные методы применения сплайнов к решению задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1-5]) и построить в некотором смысле общий метод, приводящий иногда к удобным вычислительным схемам. Общий подход позволяет получить явное выражение для параметров сплайна $S_{n,r,s,\tau}(x)$ и, таким образом, находить приближенное решение в любой точке промежутка интегрирования. Некоторые сплайны рассмотренного типа применялись и раньше. Например, сплайны $S_{n,0,1,1}(x)$ использовались в [1] для приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, где доказана их устойчивость и сходимость к точному решению для $n \leqslant 3$. Лоскалцо [1] показал, что сплайны $S_{n,0,1,1}(x)$, $n > 3$, неустойчивы по отношению к погрешности вычислений. В последующих работах [2,3] для решения подобных задач применялись сплайны типа $S_{n,n-1,0,n-1}(x)$, доказана их сходимость к точному решению и А-устойчивость при любых $n \geqslant 2$. Микула [4] применял метод Лоскалцо к решению дифференциального уравнения m-го порядка, но не доказал сходимость этих сплайнов к точному решению и их устойчивость. Отметим, что сплайны [4] совпадают с $S_{n,0,m,\tau}(x)$, $\tau \geqslant m$, и из теоремы 2.3 следует их сходимость и устойчивость. Из теоремы 2.4 следует, что такое решение не является А-устойчивым при $m > 1$. Представление приближенного решения в виде склеенных отрезков ряда Тэйлора [5] приводит к функциям вида $S_{n,r,s,\tau}(x)$, рассмотренным ниже, при $s \leqslant \tau \leqslant 1$, $r = 0$.

Первая часть работы носит вспомогательный характер. В ней рассматриваются полиномиальные сплайны с дополнительными точками склейки аналогично сплайнам, построенным в [6], но при более слабых ограничениях в узлах сетки; формулируются условия существования и единственности сплайнов, доказываются теоремы сходимости и устойчивости по отношению к ошибкам задания сеточных функций.

Основные результаты содержатся во второй части. Здесь строится схема применения рассмотренных в п.1 сплайнов к решению обыкновенных дифференциальных уравнений m-го порядка, эквивалентная некоторой одношаговой разностной схеме. Формулируются условия устойчивости рассматриваемого метода, доказывается сходимость приближенного решения и его производных к точному решению и его производным. Приводятся оценки соответствующих уклонений в равномерной метрике.

Далее рассматриваются сплайны с меньшими требованиями на гладкость и применение их к приближенному решению задачи Коши. Приводятся теоремы устойчивости и сходимости приближенного решения к точному.

В заключение приводится пример вычислений.

В работе приняты следующие обозначения.

$C^{\mu}(K)$ – класс всех μ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $K \subset R$ функций;

$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$;

$\omega(f,h) = \sup_{x,y \in K,\ |x-y| \leqslant h} |f(x)-f(y)|$; если существуют $f'(x,0)$ и $f'(x+0)$, тогда будем считать $f'(x) = \lambda f'(x-0) + (1-\lambda) f'(x+0)$ при некотором $\lambda \in [0,1]$;

суммы $\sum_{i=j}^{\ell} \varphi_i$ (произведения $\prod_{i=j}^{\ell} \varphi_i$) при $\ell < j$ считаются равными нулю (единице);

через $a = \{a_i\}_{i=\ell}^{\ell+p-1}$, ℓ – целое число, будут обозначаться элементы векторного пространства R^p, $|a| = \{|a_i|\}_{i=\ell}^{\ell+p-1}$.

Эти обозначения естественным образом переносятся на элементы пространства $R^{p \times p}$ – матриц.

1. Рассмотрим для определенности отрезок $K = [0,1]$. Пусть на K задано разбиение $\Delta = \{x_p : 0 \leqslant p \leqslant N;\ 0 = x_0 < x_1 \ldots < x_N = 1\}$. Положим

$h_p = x_{p+1} - x_p$, $0 \le p \le N$, $H = \max\limits_{0 \le p \le N} h_p$, $h = \min\limits_{0 \le p < N} h_p$. Пусть также каждый отрезок $[x_p, x_{p+1}]$ разбит подобным образом на $k+1$ частей точками $x_{pj} = x_p + \tau_j h_p$, $0 \le j \le k+1$, где $\tau_j \in [0,1]$ – произвольные числа такие, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k+1} = 1$, то есть заданы разбиения $\delta_p = \{x_{pj}\}_{j=0}^{k+1}$. Очевидно, $\bigcup\limits_{p=0}^{N-1} \delta_p \supset \Delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Фиксируем целые числа $n \ge 2$, $0 \le r < n$, $k \ge 0$. Функцию $S_{n,r,k}(\delta, x)$ будем называть сплайном порядка $\mu = n + r$, если $S_{n,r,k}(\delta, x) \in C^{n-1}(R)$ и для всех $0 \le p < N$ $S_{n,r,k}(\delta, x) \in C^{\mu-1}[x_p, x_{p+1}]$ и на каждом отрезке $[x_{pj}, x_{p,j+1}]$, $0 \le p < N$, $0 \le j < k$, $S_{n,r,k}(\delta, x)$ является полиномом степени не выше μ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выберем два целых числа $0 \le s \le \tau \le n-1$. Пусть, кроме того, числа τ, s, k связаны соотношением $k = \tau - s - r \ge 0$. Построим множество $Q = \{(i,j) : i = 0, 1, \ldots, N;\ j = 0, 1, \ldots, n-1$, если $i = 0$; $j = s, s+1, \ldots, \tau$, если $i > 0\}$. Пусть задано отображение $\pi : Q \to R$. Сплайн $S_{n,r,k}(\delta, x)$ порядка μ будем называть интерполяционным сплайном (в дальнейшем просто сплайном) и обозначать $S_{n,r,s,\tau}(\delta, \pi, x)$, если для всех $x_i \in \Delta$ выполняются условия $S^{(j)}_{n,r}(\delta, x_i) = \pi(i,j)$, (i,j) пробегает всё множество Q.

Ниже мы увидим, что сплайны $S_{n,r,s,\tau}(\delta, \pi, x)$ позволяют решать задачу типа Эрмита–Биркгофа и условия $k = \tau - s - r$ обеспечивают существование и единственность таких сплайнов.

С этого момента множество $\{\tau_j\}_{j=0}^{k+1}$ и числа n, r, s, τ будем считать заданными. В таком случае δ однозначно определяется заданием сетки Δ, а для сплайна $S_{n,r,s,\tau}(\delta, \pi, x)$ будут употребляться также обозначения $S_{n,r,s,\tau}(x)$, $S(x)$ и S.

ТЕОРЕМА I.I. Для каждого π сплайн $S_{n,r,s,\tau}(x)$ существует и определен единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сплайн на $[0, x_1]$. На каждом $[x_p, x_{p+1}]$, $0 \le p < N$, построение выполним аналогичным образом при условии склейки со сплайном, построенным на предыдущем отрезке: $S^{(\ell)}(x_p - 0) = S^{(\ell)}(x_p + 0)$, $\ell = 0, 1, \ldots, s-1, \tau+1, \tau+2, \ldots, n-1$. Пусть $x \in [0, x_1]$. Положим

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} S^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!} + \sum_{j=0}^{r} a_{n+j}\frac{x^{n+j}}{(n+j)!} + \sum_{j=1}^{k} a_{n+j+r}\frac{(x - x_{0j})_+^{\mu}}{\mu!}, \quad (\text{I.I})$$

где $x_+ = (x + |x|)/2$. Условия $S^{(\ell)}(x_p) = \pi(p,\ell)$, $p = 0, 1$, $(p,\ell) \in Q$, приводит к следующей системе линейных уравнений относительно параметров a_q, $n \le q \le \mu$:

$$\sum_{j=0}^{r} a_{n+j}\frac{x_1^{n+j-\ell}}{(n+j-\ell)!} + \frac{1}{(\mu-\ell)!}\sum_{j=1}^{k} a_{n+r+j}(x_1 - x_{0j})^{\mu-\ell} =$$

$$= \pi(1,\ell) - \sum_{i=\ell}^{n-1} \pi(0,i)\frac{x_1^{i-\ell}}{(i-\ell)!}, \quad s \le \ell \le \tau. \quad (\text{I.2})$$

Здесь $x_1 = x_1 - x_0 = h_0$. Нетрудно проверить, что определитель системы (I.2) $D(x_1) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B) \cdot \mathrm{Det}(C)$, где матрицы

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\tau-s+1}, \quad a_{ij} = \begin{cases} h_0^{1-s-i}, & i = j, \\ 0, & i \ne j; \end{cases}$$

$$C = (c_{ij})_{i,j=1}^{\tau-s+1}, \quad c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h_0^{n-1+i}}{(n-1+i)!}, & i = j,\ 1 \le i \le r+1, \\ \dfrac{h_0^{\mu}}{\mu!}, & i = j,\ r+1 < i \le \tau - s + 1, \\ 0, & i \ne j, \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{n!}{(n-s)!} & \frac{(n+1)!}{(n+1-s)!} & \cdots & \frac{\mu!}{(\mu-s)!} & \frac{\mu!(1-\tau_1)^{\mu-s}}{(\mu-s)!} & \cdots & \frac{\mu!(1-\tau_k)^{\mu-s}}{(\mu-s)!} \\ \frac{n!}{(n-s-1)!} & \frac{(n+1)!}{(n-s)!} & \cdots & \frac{\mu!}{(\mu-s-1)!} & \frac{\mu!(1-\tau_1)^{\mu-s-1}}{(\mu-s-1)!} & \cdots & \frac{\mu!(1-\tau_k)^{\mu-s-1}}{(\mu-s-1)!} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{n!}{(n-\tau)!} & \frac{(n+1)!}{(n+1-\tau)!} & \cdots & \frac{\mu!}{(\mu-\tau)!} & \frac{\mu!(1-\tau_1)^{\mu-\tau}}{(\mu-\tau)!} & \cdots & \frac{\mu!(1-\tau_k)^{\mu-\tau}}{(\mu-\tau)!} \end{pmatrix}$$

и $\mathrm{Det}(B) > 0$ [7], откуда и следует утверждение для $x \in [0, x_1]$. Из (I.I) следует, что $S(x) \in C^{\mu-1}[0, x_1]$. Пусть сплайн уже построен на отрезке $[x_{p-1}, x_p]$, $p > 0$. Так как $S(x) \in C^{n-1}(R)$, значения $S^{(j)}(x_p)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, условия $S^{(\ell)}(x_{p+1}) = \pi(p+1, \ell)$, $\ell = s, s+1, \ldots, \tau$, и замена x на $x - x_p$ позволяют перенести только что рассмотренную схему на отрезок $[x_\rho, x_{\rho+1}]$ для всех $1<\rho<N$, что и заканчивает доказательство.

ТЕОРЕМА I.2. Пусть $N=1$, $\Delta=\{0,t\}$, $t\in K$, $f(x)\in C^{\mu}(K)$, $\mu=n+\gamma$. Положим $\pi(\rho,j)=f^{(j)}(x_\rho)$, $x_\rho\in\Delta$, тогда

$$\| S^{(i)} - f^{(i)} \|_{[0,t]} \leq C t^{\mu-i}\, \omega(f^{(\mu)}, t), \quad 0\leq i\leq\mu, \qquad (I.3)$$

и константа C не зависит от $f(x)$ и t.

ЛЕММА I.I. Для всех $f\in C^{\ell}[a,b]$ $\exists \varphi\in C[a,b]$, $\|\varphi\|_{[a,b]}\leq 1$, так что для любых $x, x_0\in[a,b]$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\ell-1} f^{(i)}(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}+\varphi(x)\,\omega(f^{(\ell)}, b-a)\,\frac{(x-x_0)^\ell}{\ell!}.$$

Действительно, пользуясь формулой Тэйлора

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\ell-1} f^{(i)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^i}{i!} + \frac{1}{(\ell-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{\ell-1} f^{(\ell)}(u)\,du,$$

легко убедиться, что $\varphi(x)=\dfrac{\ell}{(x-x_0)^\ell}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-u)^{\ell-1}\psi(u)\,du$, где

$$\psi(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } \omega(f^{(\ell)}, b-a)=0,\\ [f^{(\ell)}(t)-f^{(\ell)}(x_0)]/\omega(f^{(\ell)}, b-a) & \text{— в противном случае.}\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I.2. Положим в системе (I.2) $x_1=t$, $x_{0j}=\tau_j t=t_j$ и запишем последнюю в виде

$$\sum_{j=0}^{\gamma} a_{n+j}\,\frac{t^{n+j-\ell}}{(n+j-\ell)!}+\frac{1}{(\mu-\ell)!}\sum_{j=1}^{k} a_{\mu+j}(t-t_j)^{\mu-\ell}=$$

$$= S^{(\ell)}(t)-\sum_{j=\ell}^{n-1} S^{(j)}(0)\,\frac{t^{j-\ell}}{(j-\ell)!}, \quad s\leq\ell\leq z. \qquad (I.4)$$

Учитывая условия теоремы $S^{(j)}(0)=f^{(j)}(0)$, $j=0,1,\ldots,n-1$, $S^{(\ell)}(t)=f^{(\ell)}(t)$, $\ell=s,s+1,\ldots,z$, и равенство

$$f^{(\ell)}(t)=\sum_{i=\ell}^{\mu-1} f^{(i)}(0)\frac{t^{i-\ell}}{(i-\ell)!}-\int_0^t f^{(\mu)}(v)\,d\,\frac{(t-v)^{\mu-\ell}}{(\mu-\ell)!}, \quad 0\leq\ell\leq\mu,$$

запишем систему (I.4) следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{\gamma} a_{n+j}\,\frac{t^{n+j-\ell}}{(n+j-\ell)!}+\frac{1}{(\mu-\ell)!}\sum_{j=1}^{k} a_{\mu+j}(t-t_j)^{\mu-\ell}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\gamma-1} f^{(n+j)}(0)\,\frac{t^{n+j-\ell}}{(n+j-\ell)!}-\int_0^t f^{(\mu)}(v)\,d\,\frac{(t-v)^{\mu-\ell}}{(\mu-\ell)!}, \quad s\leq\ell\leq z. \qquad (I.5)$$

Решая систему (I.5) по правилу Крамера, получим

$$a_{n+j}=f^{(n+j)}(0)-\int_0^t f^{(\mu)}(v)\,d\,\frac{\mathcal{D}_{j+1}(v)}{\mathcal{D}(t)}, \quad 0\leq j<\gamma,$$

$$a_{\mu+j}=-\int_0^t f^{(\mu)}(v)\,dP_j(v), \quad 0\leq j\leq k, \qquad (I.6)$$

где определитель системы уравнений (I.5) $\mathcal{D}(t)$ (t фиксировано) получается из определителя $\mathcal{D}(x_1)$ заменой x_1 на t, $\mathcal{D}_j(v)$ получается из $\mathcal{D}(t)$ заменой j-го столбца на $\left\{\frac{(t-v)^{\mu-s}}{(\mu-s)!}, \frac{(t-v)^{\mu-s-1}}{(\mu-s-1)!}, \ldots, \frac{(t-v)^{\mu-z}}{(\mu-z)!}\right\}^T$ и $P_j(v)=\mathcal{D}_{j+\gamma+1}(v)/\mathcal{D}(t)$. Здесь использована линейность функционала $\int_0^t f^{(\mu)}(v)\,d\varphi$ по φ и тот факт, что правая часть (I.5) содержит линейную комбинацию $\sum_{j=0}^{\gamma-1} f^{(n+j)}(0)\,d_{j+1}(t)$, $d_j(t)=\left\{\frac{t^{n+j-s-1}}{(n+j-s-1)!}, \frac{t^{n+j-s-2}}{(n+j-s-2)!}, \ldots, \frac{t^{n+j-z-1}}{(n+j-z-1)}\right\}^T$, первых γ столбцов определителя $\mathcal{D}(t)$, что и приводит сразу к формулам (I.6). Отметим, что

$$P_0(0)=1, \quad P_0(t)=0, \quad P_j(x_\rho)=0, \quad 0<j\leq k, \quad x_\rho\in\Delta. \qquad (I.7)$$

Рассмотрим функцию $\theta=f-S$. Тогда $\theta^{(\mu)}(x)=f^{(\mu)}(x)-\sum_{j,\,t_j\leq x} a_{\mu+j}$.

Используя лемму I.I и интегрируя (I.6) с учетом (I.7), получим

$$\theta^{(\mu)}(x)=f^{(\mu)}(x)+\int_0^t [f^{(\mu)}(0)+\varphi(v)\omega(f^{(\mu)},t)]\sum_{j,t_j\le x} P_j'(v)\,dv =$$

$$= f^{(\mu)}(x)-f^{(\mu)}(0)+\omega(f^{(\mu)},t)\int_0^t \varphi(v)\sum_{j,t_j\le x}P_j'(v)\,dv,$$

$$\|\varphi\|_{[0,t]}\le 1,$$

откуда

$$|\theta^{(\mu)}(x)|\le\omega(f^{(\mu)}t)\Big(1+\int_0^t\sum_{j=0}^k|P_j'(v)|\,dv\Big). \qquad (I.8)$$

Нетрудно убедиться, что второй сомножитель справа в (I.8) не зависит от f и t. Из определения функции θ и условий теоремы следует, что $\theta^{(i)}(0)=\theta^{(j)}(t)=0$, $i=0,1,\dots,n-1$, $j=s,s+1,\dots,z$, и по теореме Ролля найдутся точки $v_i\in[0,t]$, $i=0,1,\dots,\mu-1$, такие, что $\theta^{(i)}(v_i)=0$, тогда, записав $\theta^{(i)}(x)=\int_{v_i}^x \theta^{(i+1)}(v)\,dv$, $x\in[0,t]$, с помощью (I.8) получим

$$|\theta^{(i)}(x)|\le C\omega(f^{(\mu)},t)\,t^{\mu-i},\quad 0\le i\le\mu,$$

где $C=1+\int_0^t\sum_{j=0}^k|P_j'(v)|\,dt$. Теорема доказана.

Введем функцию

$$\xi=\xi(\gamma)=\begin{cases}0, & \text{если } \gamma=0,\\ -(n+\gamma), & \text{если } \gamma>0,\end{cases}$$

выберем $|\xi|$ чисел τ_i, $\xi\le i\le -1$, $\tau_i<\tau_{i+1}<0$, $\xi\le i<-1$, и, объединив их с $\tau_j\ge 0$, $0\le j\le k+1$, определенными выше, образуем расширенную систему дополнительных узлов $\bar\delta_\rho=\{x_{\rho j}=x_\rho+h_\rho\tau_j,\ x_\rho\in\Delta,\ \xi\le j\le k+1\}$, $0\le\rho\le N-1$.

ЛЕММА I.2. При $x_{\rho j}\in\bar\delta_\rho$, $0\le\rho<N$, сплайн $S_{n,\gamma,s,z}(x)$ может быть представлен в виде

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\frac{(x-x_\rho)^i}{i!}+\frac{1}{\mu!}\sum_{j=\xi}^k\alpha_j(x-x_{\rho j})_+^\mu,\quad x\in[x_\rho,x_{\rho+1}] \qquad (I.9)$$

единственным образом и $\alpha_i=S^{(i)}(x_\rho)$, $i=0,1,\dots,n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим очевидный факт, вытекающий, например, из эквивалентности базисов в конечномерном пространстве, что всякий полином степени m $P_m(x)=\sum_{i=0}^m a_i x^i$ может быть представлен единственным образом в виде $P_m(x)=\sum_{j=0}^m\alpha_j(x-t_j)^m$, где $t_j<t_{j+1}$ – любые заранее выбранные числа. Для определения α_j через a_i можно выписать систему уравнений

$$\sum_{j=0}^m\binom{m}{i}(-t_j)^{m-i}\alpha_j=a_i,\qquad i=0,1,\dots,m.$$

В частности, уравнения, соответствующие значениям $a_\ell=0$, если такие имеются, можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^m\alpha_j t_j^{m-\ell}=0.$$

Применяя сказанное выше ко второй сумме в представлении (I.I) сплайна на $[x_\rho,x_{\rho+1}]$, $0\le\rho<N$, получим требуемое.

Представление (I.9) сплайна $S(x)$ понадобится в дальнейшем для доказательства теорем сходимости. Кроме того, (I.9) явно показывает принадлежность сплайнов классу $C^{\mu-1}[x_\rho,x_{\rho+1}]$, $\rho=0,1,\dots,N-1$, и классу $C^{n-1}(R)$. Следует, по-видимому, отметить, что "разбиение" $\bar\delta_\rho$ отличается от δ_ρ лишь при $\gamma>0$ и в этом случае не является разбиением $[x_\rho,x_{\rho+1}]$ в общепринятом смысле, так как $x_{\rho j}\notin[x_\rho,x_{\rho+1}]$ при $\xi\le j<0$. Кроме того, при $\xi\le j<0$, $x\in[x_\rho,x_{\rho+1}]$, $(x-x_{\rho j})_+^\mu=(x_\rho-x_{\rho j})^\mu$, следовательно, точки $x_{\rho j}$, $\xi\le j<0$, не являются точками склейки сплайна на $[x_\rho,x_{\rho+1}]$ и не меняют его структуру, но введены лишь из соображения удобства.

Пусть $x\in[x_\rho,x_{\rho+1}]$, $0\le\rho<N$. Обозначим $\tau=\frac{x-x_\rho}{h_\rho}$, $\tau\in[0,1]$. Тогда, повторяя доказательство предыдущей леммы и учитывая условия на сплайн в точках $x_\rho,x_{\rho+1}$, нетрудно показать, что параметры α_j сплайна в (I.9) удовлетворяют следующей системе уравнений;

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=\xi}^{k} \alpha_j (1-\tau_j)^{\mu-l} = \dfrac{(\mu-l)!}{h_\rho^{\mu-l}} \left[S^{(l)}(x_{\rho+1}) - \sum\limits_{i=l}^{n-1} S^{(i)}(x_\rho) \dfrac{h_\rho^{i-l}}{(i-l)!} \right], \\
\sum\limits_{j=\xi}^{k} \alpha_j \tau_j^{\mu-i} = 0, \quad 0 \le i \le n-1, \quad s \le l \le r.
\end{cases} \tag{I.10}
$$

Обозначим через $G=(g_{ij})$ обратную матрицу системы (I.10). Запишем с ее помощью параметры сплайна в явном виде

$$
\alpha_j = \sum_{i=s}^{r} g_{j-\xi+1,i-s+1} \frac{(\mu-i)!}{h_\rho^{\mu-i}} \left[S^{(i)}(x_{\rho+1}) - \sum_{q=i}^{n-1} S^{(q)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{q-i}}{(q-i)!} \right], \tag{I.11}
$$

$$
\xi \le j \le k.
$$

ЛЕММА I.3. П у с т ь $x \in [x_\rho, x_{\rho+1}]$, $\tau = (x-x_\rho)/h_\rho$, $\sigma_{\tau l} = S^{(l)}_{n,\gamma,s,r}(x_\rho + \tau h_\rho) \frac{h_\rho^l}{l!}$, т о г д а с п р а в е д л и в ы т о ж д е с т в а

$$
\sigma_{\tau l} = \sum_{i=\min(l,s)}^{n-1} \eta_{il}(\tau)\sigma_{0i} + \sum_{j=s}^{r} \rho_{jl}(\tau)\sigma_{1j}, \quad 0 \le l \le \mu = n+\gamma, \tag{I.12}
$$

г д е

$$
\rho_{il}(\tau) = \frac{\binom{\mu}{l}}{\binom{\mu}{i}} \cdot \sum_{j=1}^{k-\xi+1} g_{j,i-s+1} (\tau - \tau_{\xi+j-1})_+^{\mu-l}, \quad \rho_{il} = \rho_{il}(1),
$$

$$
\eta_{il}(\tau) = \binom{i}{l} \tau^{i-l} - \sum_{j=s}^{r} \binom{i}{j} \rho_{jl}(\tau), \quad \eta_{il} = \eta_{il}(1), \tag{I.13}
$$

$$
\binom{i}{j} = \begin{cases} \dfrac{i!}{j!(i-j)!}, & \text{е с л и} \quad i \ge j \ge 0, \\ 0, & \text{е с л и} \quad i < j. \end{cases}
$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (I.11) в (I.9). В соответствии с обозначениями (I.13) получим для $0 \le l \le \mu$:

$$
S^{(l)}(x) = \sum_{i=l}^{n-1} S^{(i)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{i-l}}{(i-l)!} \tau^{i-l} + \frac{h_\rho^{\mu-l}}{(\mu-l)!} \sum_{j=\xi}^{k} (\tau - \tau_{\xi+j-1})_+^{\mu-l} \times
$$

$$
\times \sum_{u=s}^{r} g_{j-\xi+1,u-s+1} \frac{(\mu-u)!}{h_\rho^{\mu-u}} \left[S^{(u)}(x_{\rho+1}) - \sum_{q=u}^{n-1} S^{(q)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{q-u}}{(q-u)!} \right] =
$$

$$
= l!\, h_\rho^{-l} \left\{ \sum_{i=l}^{n-1} S^{(i)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{i}}{i!} \binom{i}{l} \tau^{i-l} + \sum_{u=s}^{r} \rho_{ul}(\tau) \frac{h_\rho^{u}}{u!} \left[S^{(u)}(x_{\rho+1}) - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. - \sum_{q=u}^{n-1} S^{(q)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{q-u}}{(q-u)!} \right] \right\} = l!\, h_\rho^{-l} \left\{ \sum_{i=l}^{n-1} S^{(i)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{i}}{i!} \binom{i}{l} \tau^{i-l} - \right.
$$

$$
\left. - \sum_{q=s}^{n-1} S^{(q)}(x_\rho) \frac{h_\rho^{q}}{q!} \sum_{u=s}^{q} \binom{q}{u} \rho_{ul}(\tau) + \sum_{u=s}^{r} \rho_{ul}(\tau) S^{(u)}(x_{\rho+1}) \frac{h_\rho^{u}}{u!} \right\},
$$

откуда и следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Формула (I.12) при $s=0$ и $\tau=1$ тривиальна. В этом случае ее следует заменить, например, соотношением

$$
\binom{\mu}{\gamma+1} (\sigma_{10} - \sigma_{00}) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{\mu-i}{n-1-i} \sigma_{0i} - \sum_{j=1}^{\gamma+1} (-1)^j \binom{\mu-j}{\gamma+1-j} \sigma_{1j}, \tag{I.14}
$$

точным для всех полиномов степени не выше μ. Частный случай (I.14) указан Варгой [2]. Соотношения (I.12) распространяют (I.14) на случай $s>0$; кроме того, они позволяют приближенно восстановить значения функции и ее производных между узлами сетки.

В дальнейшем нам понадобится соотношение, которое непосредственно следует из (I.12) и теоремы I.2, а именно: для любой $f(x) \in C^{\mu}(K)$, $x \in [x_\rho, x_{\rho+1}]$, справедливо равенство

$$
f^{(l)}(x) \frac{h_\rho^l}{l!} = \sum_{i=\min(l,s)}^{n-1} \eta_{il}(\tau) f^{(i)}(x_\rho) \frac{h_\rho^i}{i!} + \sum_{i=s}^{r} \rho_{il}(\tau) f^{(i)}(x_{\rho+1}) \frac{h_\rho^i}{i!} + R_{\rho l}(x), \tag{I.15}
$$

$$0 \le \ell \le \mu, \quad 0 \le \rho \le N-1,$$

где $\tau = (x - x_\rho)/h_\rho$, $|R_{\rho\ell}(x)| \le C\omega(f^{(\mu)}, h_\rho) h_\rho^\mu / \ell!$.

ТЕОРЕМА I.3. Пусть функция $f(x) \in C^\mu(K)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f^{(j)}(x_\rho) - \pi(\rho, j)| \le \theta, \quad x_\rho \in \Delta, \quad (\rho, j) \in Q,$$

тогда для любого фиксированного $H_0 < \infty$ и любой сетки Δ, $H \le H_0$, $0 \le s \le r = n-1$, имеет место

$$\|S^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)\|_K \le \begin{cases} C_1[\theta + C_2 H^{\mu-s}\omega(f^{(\mu)}, H)], & 0 \le i < s, \\ [C_3 H^s \theta + C_4 H^\mu \omega(f^{(\mu)}, H)] H^{-i}, & s \le i \le \mu, \end{cases} \tag{I.16}$$

где константы C_i, $i = 1,2,3,4$, не зависят от $f(x)$ и H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычтя (I.12) из (I.15) и обозначив $\varepsilon(x)_\ell = S^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(x)$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(x_i)_j$, получим для $0 \le \ell \le \mu$

$$|\varepsilon(x)_\ell| \frac{h_\rho^\ell}{\ell!} \le \sum_{i=\min(s,\ell)}^{n-1} |\eta_{i\ell}(\tau)| |\varepsilon_{\rho i}| \frac{h_\rho^i}{i!} + \sum_{j=s}^{n-1} |\rho_{j\ell}(\tau)| |\varepsilon_{\rho+1,j}| \frac{h_\rho^j}{j!} + |R_{\rho\ell}(x)|.$$

Рассмотрим сначала случай $\ell > s$. Из условий теоремы имеем

$$|S^{(j)}(x_i) - f^{(j)}(x_i)| \le \theta, \quad (i,j) \in Q. \tag{I.17}$$

Тогда отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$\|\varepsilon_\ell\|_K \le F(\theta, f, H) H^{-\ell}, \quad s \le \ell \le \mu, \tag{I.18}$$

где $F(\theta, f, H) = C_3 \theta H^s + C\omega(f^{(\mu)}, H) H^\mu$, $C_3 = \exp(H_0) \max\limits_{i,\ell,\tau}(|\eta_{i,\ell}(\tau)|, |\rho_{i\ell}(\tau)|)$, C не зависят от H и $f(x)$ и, таким образом, второе неравенство теоремы доказано.

Пусть теперь $\ell < s$. Интегрируя $\varepsilon(x)_s$ по отрезку K с учетом (I.17) и (I.18), получим первое неравенство. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме I.3 τ_j, $\xi \le j \le k+1$, считаются фиксированными и выбор дополнительных точек склейки сплайнов во всех сетках осуществляется одинаковым образом. В этом случае

константы C_i, $1 \le i \le 4$, зависят лишь от H_0. Если τ_j выбирать в зависимости от сетки Δ, то неравенства (I.16) могут не выполняться. Константы C_1, C_2 зависят также от длины отрезка K.

Если $f^{(\mu)} \in Lip\alpha = \{\varphi(x): \exists L > 0 \forall x, y \in K\, |\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|^\alpha\}$, $0 \le \alpha < 1$, то для вычисления i-й производной функции с помощью сплайна $S_{n,r,s,n-1}(x)$, $s < i \le \mu = n + r$, целесообразно выбирать

$$H = \left[\frac{(i-s) C_3 \theta}{(\mu - i + \alpha) C_4 L}\right]^{\frac{1}{\mu - s + \alpha}}$$

и тогда

$$\|S^{(i)} - f^{(i)}\|_K \le \left[\left(\frac{u}{v}\right)^v + \left(\frac{v}{u}\right)^u\right] C_3^u (C_4 L)^v \theta^u,$$

где $u = \dfrac{\mu - i + \alpha}{\mu - s + \alpha}$, $v = \dfrac{i-s}{\mu - s + \alpha}$. В этом смысле процесс восстановления функции с помощью сплайна $S_{n,r,s,r}(x)$ устойчив по отношению к погрешности задания функции и некоторых ее производных в узлах сетки.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно показать, что в теореме I.3 порядок по H точный в том смысле, что для любого H найдется в классе $C^\mu(K)$ такая функция, что выполняются неравенства, обратные к (I.16), с константами, не зависящими от H. Рассмотрим, например, сплайн $S_{n,0,n-1,n-1}(x)$, построенный на равномерной сетке Δ, $h_\rho = h = H \le 1/n$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \sin\frac{2\pi t}{h}\, dt, \quad \omega(f^{(n)}, h) = 1.$$

Очевидно, $f^{(n-1)}(ih) = 0$, $0 \le i \le N$, и, таким образом, $S(x) \equiv 0$, и $\|S^{(i)} - f^{(i)}\|_{[0,1]} = \|f^{(i)}\|_{[0,1]} \ge \dfrac{h}{4\pi(n-1)!}\omega(f^{(n)}, h)$, $0 \le i < n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для $r < n-1$ сплайны, вообще говоря, не приближают старшие производные функции. Лоскалцо [I] показал, что сплайны $S_{n,0,1,1}(x)$ при $n \ge 4$ не сходятся к приближаемой функции класса $C^{(n)}(K)$.

Рассмотрим сплайны $S_{2,0,0,0}(x)$ без дополнительных точек склейки на равномерной сетке $\Delta \in [0,1]$, $f \in C^2[0,1]$. В соответствии с (I.12) и (I.13) для сплайна справедливы разностные соотношения:

$$\frac{S'(x_\rho)+S'(x_{\rho-1})}{2}=\frac{S(x_\rho)-S(x_{\rho-1})}{h},\ \frac{S''(x_\rho)+S''(x_{\rho-1})}{2}=\frac{S(x_{\rho+1})-2S(x_\rho)+S(x_{\rho-1})}{h^2},$$

откуда для $f(x)=\frac{h^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{h}$ получим $\|S''-f''\|_{[0,1]}\geq\frac{8}{\pi^2}n^{-1}$. Можно показать, что сплайн $S_{3,0,0,1}(x)$, вообще говоря, не приближает вторую производную функции класса $C^3(K)$, а сплайн $S_{3,0,0,0}(x)$ – и первую. Кроме того, характеристические полиномы итерационных схем, соответствующих разностным соотношениям (I.I2), могут иметь корни, превосходящие единицу по абсолютной величине, поэтому при $r\leq n-1$ такие сплайны весьма чувствительны к погрешности задания функции и погрешности вычислений. В дальнейшем будут рассматриваться лишь сплайны вида $S_{n,r,s,n-1}(x)$, $0\leq s\leq n-1$.

Пусть на сетке Δ, содержащей $N>n+r=\mu$ узлов, задана функция $\alpha(x)$, принимающая значения $\alpha(x_\rho)=\alpha_\rho$, $x_\rho\in\Delta$. Построим полином Лагранжа $\mathcal{L}_j(\alpha,\mu)(x)$ степени μ по узлам $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+\mu}\leq x_N$ и обозначим

$$\mathcal{L}(\alpha,\mu)=\mathcal{L}(\alpha,\mu)(x)=\begin{cases}\mathcal{L}_j(\alpha,\mu),\ x\in[x_j,x_{j+1}], & 0\leq j\leq N-\mu,\\ \mathcal{L}_{N-\mu}(\alpha,\mu),\ x\in[x_j,x_{j+1}], & N-\mu\leq j\leq N-1.\end{cases}$$

Справедлива следующая

ЛЕММА I.4 [8]. Для любой сеточной функции $\alpha(x)$, функции $f(x)\in C^\mu(K)$, функционала $F(f,H)$ при условии, что на Δ $|f-\alpha|\leq H^\mu F(f,H)$, справедливо неравенство

$$\left\|\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell(\mathcal{L}(\alpha,\mu)-f)\right\|_K\leq CH^{\mu-\ell}\{\omega(f^{(\mu)},H)+F(f,H)\},\ 0\leq\ell\leq\mu,$$

и C не зависит от f и H.

Используя предыдущую лемму и теорему I.3, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА I.4. Пусть f и α удовлетворяют условиям леммы I.4 на сетке Δ и сплайн $S_{n,r,s,n-1}(x)$ удовлетворяет условиям $S^{(\ell)}(x_\rho)=\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell\mathcal{L}(\alpha,\mu)(x_\rho)$, а (ρ,ℓ) пробегают

Q. Тогда для любого фиксированного числа $H_0>0$ найдутся константы $C_j=C_j(H_0)$ ($j=1,2,3,4$), не зависящие от f и H и такие, что при всех $H<H_0$ справедливы неравенства

$$\|S^{(i)}-f^{(i)}\|_K\leq\begin{cases}[C_1F(f,H)+C_2\omega(f^{(\mu)},H)]H^{\mu-s}, & 0\leq i<s,\\ [C_3F(f,H)+C_4\omega(f^{(\mu)},H)]H^{\mu-i}, & s\leq i\leq\mu.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, в сущности, повторяет рассуждения, приведенные в теореме I.3. Действительно, обозначив снова $\varepsilon(x)_\ell=S^{(\ell)}(x)-f^{(\ell)}(x)$, $\varepsilon_{ij}=\varepsilon(x_i)_j$, имеем из (I.I2) и (I.I5):

$$|\varepsilon(x)_\ell|\frac{h_\rho^\ell}{\ell!}\leq\sum_{i=\min(s,\ell)}^{n-1}|\gamma_{i\ell}(\tau)\|\varepsilon_{\rho i}|\frac{h_\rho^i}{i!}+\sum_{j=s}^{n-1}|\rho_{j\ell}(\tau)\|\varepsilon_{\rho+1,j}|\frac{h_\rho^j}{j!}+C_1H^\mu\omega(f^{(\mu)},H).$$

С другой стороны, из условий теоремы и леммы I.4 следует, что

$$|\varepsilon_{ij}|=|S^{(j)}(x_i)-f^{(j)}(x_i)|=\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^i(\mathcal{L}(\alpha,\mu)-f)\right|_{x=x_i}\leq$$

$$\leq CH^{\mu-j}\{\omega(f^{(\mu)},H)+F(f,H)\}\quad\forall(i,j)\in Q,$$

откуда и из предыдущего неравенства для $s\leq\ell<\mu$ получим

$$\|\varepsilon(x)_\ell\|_K\leq\ell!H^{-\ell}\Big\{\sum_{i=s}^{n-1}(\|\gamma_{i\ell}(\tau)\|_{[0,1]}+\|\rho_{i\ell}(\tau)\|_{[0,1]})CH^{\mu-i}\times$$

$$\times\{\omega(f^{(\mu)},H)+F(f,H)\}\frac{H^i}{i!}+C_1H^\mu\omega(f^{(\mu)},H)\Big\}\leq$$

$$\leq[C_3F(f,H)+C_4\omega(f^{(\mu)},H)]H^{\mu-\ell},$$

и, таким образом, второе неравенство теоремы доказано. Для $0\leq\ell<s$ имеем

$$\|\varepsilon(x)_\ell\|_K=\max_{x\in K}\left|\sum_{i=\ell}^{s-1}\varepsilon_{0i}\frac{x^{i-\ell}}{(i-\ell)!}+\int_0^x\frac{(x-t)^{s-1}}{(s-1)!}\varepsilon(t)_s dt\right|,$$

откуда, используя предыдущие оценки, получим первое неравенство.

Очевидно, что вместо полиномов Лагранжа можно использовать любые полиномы, удовлетворяющие условиям леммы I.4. Как видно из предыдущей теоремы, такая конструкция сплайна устойчива по отношению к ошибкам задания функций на сетке и погрешности вычислений.

2. Рассмотрим теперь применение построенных в п.I сплайнов к отысканию приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y^{(m)} = f = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \; x \in K, \\ y^{(i)}(0) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad m \geq 1. \end{cases} \tag{2.I}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = \partial + y'\partial_0 + \dots + y^{(m-1)}\partial_{m-2} + f\partial_{m-1}$, где для краткости обозначено $\partial = \partial/\partial x$, $\partial_j = \partial/\partial y^{(j)}$, $0 \leq j \leq m-1$. Пусть решение задачи (2.I) $y \in C^{\mu+1}(K)$ и $y^{(j)}(K) \subset [-Y_j, Y_j]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Предположим также, что существуют и непрерывно дифференцируемы на $W = K \times [-Y_0, Y_0] \times \dots \times [-Y_{m-1}, Y_{m-1}]$ функции $f_i(x, y, \dots, y^{(m-1)}) = \mathcal{L}^{i-m} f$, $i = m, m+1, \dots, n-1$, $\mathcal{L}^q = \mathcal{L}\,\mathcal{L}^{q-1}$, $\mathcal{L}^0 = E$ – тождественный оператор, причем каждая функция f_i удовлетворяет условию Липшица по $(j+2)$-му аргументу с константой M_{ij}, $m \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$. Таким образом, каждая функция f_i является полной производной $\frac{d}{dx} f_{i-1}$ на решении (2.I), $i = m+1, \dots, n-1$, то есть если задача (2.I) удовлетворяет приведенным выше условиям и $y(x)$ есть решение этой задачи, то $y^{(i)} = f_i(x, y, \dots, y^{(m-1)})$, $m \leq i \leq n-1$.

Рассмотрим сплайн $S(x) = S_{n,\gamma,s,r}(x)$, $m \leq s \leq r \leq n-1$, удовлетворяющий на сетке Δ условиям:

$$\begin{aligned} & S^{(i)}(0) = y_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ & S^{(j)}(x_p) = f_{pj} \overset{def}{=} f_j(x_p, S(x_p), \dots, S^{(m-1)}(x_p)), \; x_p \in \Delta \setminus \{0\}, \\ & s \leq j \leq r. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в (I.I0), запишем систему уравнений для определения параметров сплайна в векторном виде

$$B\alpha = F(\alpha) - b, \tag{2.3}$$

где $B = G^{-1}$ – матрица системы (I.I0),

$$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{k-\xi+1}, \quad \alpha_i = \alpha_{i+\xi-1},$$

$$b = \{b_i\}_{i=1}^{k-\xi+1},$$

$$b_i = \frac{(\mu-s-i+1)!}{h_p^{\mu-s-i+1}} \left(\sum_{j=s+i-1}^{r} f_{pj} \frac{h_p^{j-i-s+1}}{(j-i-s+1)!} + \sum_{j=r}^{n-1} S^{(j)}(x_p) \frac{h_p^{j-s-i+1}}{(j-s-i+1)!} \right),$$

если $1 \leq i \leq r-s+1$, и $b_i = 0$, если $r-s+1 < i \leq k-\xi+1$;

$$F(\alpha) = \{F_i(\alpha)\}_{i=1}^{k-\xi+1}, \quad F_i(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{(\mu-s-i+1)!}{h_p^{\mu-s-i+1}} f_{p+1, s+i-1}, & 1 \leq i \leq r-s+1, \\ 0, & r-s+1 < i \leq k-\xi+1; \end{cases}$$

$x \in [x_p, x_{p+1}]$, $0 \leq p \leq N-1$, $\xi = \xi(\gamma)$.

Так как матрица B не вырождена, можно построить для определения параметров сплайна итерационную схему

$$\alpha^{(i+1)} = G(F(\alpha^{i}) - b), \tag{2.4}$$

где i -номер итерации, $i = 0, \mathrm{I}, 2, \dots$

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть

$$H_1 = \max\left\{ q : 2^{2\mu} \binom{\mu}{m-1} M \|G\|_2 \frac{q^{s-m+1}}{\left(1 - \frac{m-1}{\mu-m+2} q\right)} \leq 1, \; 0 \leq q \leq \min\left(1, \frac{\mu-m+2}{m-1}\right) \right\},$$

где M – такое, что $M_{ij} \leq M \frac{i!}{j!}$, $m \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$, $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в $R^{k-\xi+1}$. Тогда для любого $\alpha^{(0)}$ итерационная схема (2.4) сходится при всех $h_p < H_1$, $x \in [x_p, x_{p+1}]$, $0 \leq p < N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\|\alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)}\|_2 \leq \|G\|_2 \cdot \|F(\alpha^{(i)}) - F(\alpha^{(i-1)})\|_2$ и $\|G\|_2$ не зависит от h_p, то достаточно оценить в предыдущем неравенстве второй сомножитель справа.

Используя представление сплайна (I.9), равенства (2.2) и условия Липшица для f_i, получим

$$\|F(\alpha^{(i)})-F(\alpha^{(i-1)})\|_2^2 \le$$

$$\le \sum_{j=s}^{r}\left[\frac{(\mu-j)!}{h_\rho^{\mu-j}}\sum_{\lambda=0}^{m-1} M_{j\lambda}\frac{h_\rho^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!}\sum_{\ell=\xi}^{k}(1-\tau_\ell)^{\mu-\lambda}\left|\alpha_\ell^{(i)}-\alpha_\ell^{(i-1)}\right|\right]^2 \le$$

$$\le M^2\|\alpha^{(i)}-\alpha^{(i-1)}\|_2^2\sum_{j=s}^{r}\left[\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{\binom{\mu}{\lambda}}{\binom{\mu}{j}}h_\rho^{j-\lambda}\sum_{\ell=\xi}^{k}(1-\tau_\ell)^{\mu-\lambda}\right]^2. \qquad (2.5)$$

Выбрав τ_j, $|\tau_j|\le 1$, и заметив, что $\mu\ge m+1$, оценим

$$\sum_{\ell=\xi}^{k}(1-\tau_\ell)^{\mu-\lambda}=\left(\sum_{\ell=\xi}^{-1}+\sum_{\ell=0}^{k}\right)(1-\tau_\ell)^{\mu-\lambda}\le \mu 2^{\mu-\lambda}+k+1\le\mu(2^{\mu-\lambda}+1)\le\mu 2^{\mu-\lambda+\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь предыдущей оценкой и неравенствами

$$\sum_{\lambda=0}^{m-1}\binom{\mu}{\lambda}h_\rho^{j-\lambda} < \frac{\binom{\mu}{m-1}h_\rho^{j-m+1}}{1-\frac{m-1}{\mu-m+2}h_\rho} \quad \text{при} \quad h_\rho<\min\left(1,\frac{\mu-m+2}{m-1}\right),$$

$$s\le j\le r,\quad r-s+1\le\mu,\quad \mu^3\le 2^{2\mu-1},\quad \mu\ge 0,$$

получим

$$\sum_{j=s}^{r}\left[\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{\binom{\mu}{\lambda}}{\binom{\mu}{j}}h_\rho^{j-\lambda}\sum_{\ell=\xi}^{k}(1-\tau_\ell)^{\mu-\lambda}\right]^2 \le$$

$$\le \frac{\mu^2 2^{2\mu+1}\binom{\mu}{m-1}^2}{\left(1-\frac{m-1}{\mu-m+2}h_\rho\right)^2}\sum_{j=s}^{r}\left[\frac{h_\rho^{j-m+1}}{\binom{\mu}{j}}\right]^2 \le$$

$$\le \frac{\mu^2 2^{2\mu+1}\binom{\mu}{m-1}^2 h_\rho^{2(s-m+1)}(r-s+1)}{\left(1-\frac{m-1}{\mu-m+2}h_\rho\right)^2} \le \frac{2^{4\mu}\binom{\mu}{m-1}^2 h_\rho^{2(s-m+1)}}{\left(1-\frac{m-1}{\mu-m+2}h_\rho\right)^2}.$$

Из предыдущего неравенства и из (2.5) следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $s<m$ система уравнений (2.3) становится неопределенной, так как первые $m-s$ уравнений обращаются в тождества. Для решения системы в этом случае можно первые $m-s$ уравнений в (2.3) заменить подходящими разностными формулами. Так, например, можно воспользоваться (I.I2), (I.I4) с учетом соотношений (2.2). Нетрудно показать, повторяя доказательство теоремы 2.I, что итерации (2.4) сходятся и при $0\le s<m$ с такой же скоростью, как и при $s=m$.

Рассмотрим сходимость сплайна (2.2) к точному решению задачи (2.I).

ЛЕММА 2.I. Для любых $c_i>0$, $0\le i\le n$, $x\ge 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=0}^{j-1}(1+c_i x)\le\frac{\exp\left(x\sum_{i=0}^{n}c_i\right)-1}{cx}, \qquad (2.6)$$

где $c=\min_{0\le i\le n} c_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $x>0$. Учитывая неравенство $1+\alpha\le\exp(\alpha)$, $\alpha\in R$, получим

$$1+cx\sum_{j=0}^{n}\prod_{i=0}^{j-1}(1+c_i x)\le 1+\sum_{j=0}^{n}c_j x\prod_{i=0}^{j-1}(1+c_i x)=\prod_{j=0}^{n}(1+c_j x)\le\exp\left(x\sum_{j=0}^{n}c_j\right),$$

откуда следует (2.6) для положительных x. Очевидно, при $x\to 0$

$$\frac{\exp\left(x\sum_{j=0}^{n}c_j\right)-1}{cx}\to\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{n-1}c_j\ge n+1.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $S_{n,r,s,n-1}(x)$ — сплайн, построенный по схеме (2.2)–(2.4). Существует такое H_0, $0<H_0<\infty$, что если вычисления ведутся с шагом $h_i\le H_0$, так что $H/h\le\beta<\infty$ и решение задачи (2.I) $y\in C^{\mu+1}(K)$, то

$$\max_{0\le i\le p}\left|S^{(\ell)}(x_i)-y^{(\ell)}(x_i)\right|\le\theta_0\exp(\mathcal{D}x_p)+\left(C_\beta H^{\mu+1-j}+\frac{\theta}{h}\right)\frac{\exp(\mathcal{D}x_p)-1}{\mathcal{D}}, \quad (2.7)$$

$$j=\max(s,m),\quad 0\le\ell\le n-1,$$

где θ – суммарная погрешность вычислений на каждом шаге,

$$\theta_0=\max_{0\le i\le s-1}\left|S^{(i)}(0)-y^{(i)}(0)\right|,$$

и константы $C,\mathcal{D}$ не зависят от H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $1\le m\le s\le n-1$; $|f_{\mu+1}|\le M_{\mu+1}$ на W. Обозначим $z_{ij}=S^{(j)}(x_i)$, $z_i=\{z_{ij}\}_{j=0}^{s-1}$,

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j,\end{cases}\qquad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|,\ x\in R^n.$$

Из (I.9), (I.II) и (2.2) следует, что параметры сплайна $S_{n,r,s,n-1}(x)$ на отрезке $[x_p,x_{p+1}]$ имеют вид:

$$\alpha_q=\sum_{i=s}^{n-1}g_{q,i-s+1}\frac{(\mu-i)!}{h_p^{\mu-i}}\left\{f_{p+1,i}-\sum_{j=i}^{n-1}f_{pj}\frac{h_p^{j-i}}{(j-i)!}\right\},\quad \xi\le q\le k, \quad (2.8)$$

и $z_{p+1,\ell}$, $0\le\ell\le s-1$, удовлетворяют соотношениям:

$$z_{p+1,\ell}=\sum_{i=\ell}^{s-1}z_{pi}\frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!}+\sum_{i=s}^{n-1}f_{pi}\frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!}+\frac{h_p^{\mu-\ell}}{(\mu-\ell)!}\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_j(1-\tau_j)^{\mu-\ell}, \quad (2.9)$$

$$0\le\ell\le m-1,$$

где, по определению, $f_{pi}=f_i(x_p,z_{p,0},\dots,z_{p,m-1})$. Заметим, что в принятых обозначениях

$$\frac{\partial z_{p+1,\ell}}{\partial z_{p,q}}=\sum_{i=\ell}^{s-1}\delta_{iq}\frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!}+\chi(m-q)\sum_{i=s}^{n-1}\partial_q f_{pi}\frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!}+\frac{h_p^{\mu-\ell}}{(\mu-\ell)!}\sum_{j=\xi}^{k}\frac{\partial\alpha_j}{\partial z_{pq}}(1-\tau_j)^{\mu-\ell},$$

$$0\le\ell,\ q\le s-1.$$

Отсюда и из (2.8) получим

$$\frac{\partial\alpha_{j-\xi+1}}{\partial z_{p0}}=\sum_{u=s}^{n-1}g_{j,u-s+1}\frac{(\mu-u)!}{h_p^{\mu-u}}\left\{\sum_{q=0}^{m-1}\partial_q f_{p+1,u}\frac{\partial z_{p+1,q}}{\partial z_{p0}}-\sum_{i=u}^{n-1}\partial_0 f_{pi}\frac{h_p^{i-u}}{(i-u)!}\right\}=$$

$$=\sum_{u=s}^{n-1}g_{j,u-s+1}\frac{(\mu-u)!}{h_p^{\mu-u}}\left\{\sum_{q=0}^{m-1}\partial_q f_{p+1,u}\left[\sum_{i=q}^{s-1}\delta_{i0}\frac{h_p^{i-q}}{(i-q)!}+\sum_{i=s}^{n-1}\partial_0 f_{pi}\frac{h_p^{i-q}}{(i-q)!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{h_p^{\mu-q}}{(\mu-q)!}\sum_{i=\xi}^{k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial z_{p0}}(1-\tau_i)^{\mu-q}\right]-\sum_{i=u}^{n-1}\partial_0 f_{pi}\frac{h_p^{i-u}}{(i-u)!}\right\}=$$

$$=h_p^{s-\mu}\sum_{u=s}^{n-1}g_{j,u-s+1}(\mu-u)!\,h_p^{u-s}\Bigg(\partial_0 f_{p+1,u}+$$

$$+h_p^{s-m+1}\sum_{i=s}^{n-1}\sum_{q=0}^{m-1}\partial_q f_{p+1,u}\,\partial_0 f_{pi}\frac{h_p^{i+m-q-s-1}}{(i-q)!}-\sum_{i=0}^{n-1}\partial_0 f_{pi}\frac{h_p^{i-u}}{(i-u)!}\Bigg)+$$

$$+h_p^{s-m+1}\sum_{i=\xi}^{k}\frac{\partial\alpha_i}{\partial z_{p0}}\sum_{u=s}^{n-1}\sum_{q=0}^{m-1}g_{j,u-s+1}\partial_q f_{p+1,u}\frac{(\mu-u)!}{(\mu-q)!}(1-\tau_i)^{\mu-q}h_p^{u+m-s-q-1}=$$

$$=h_p^{s-\mu}A(h_p,f)+h_p^{s-m+1}B(\alpha,h_p,f).$$

Так как $s\ge m$, то, пользуясь ограниченностью f_i на W, $m\le i\le n$, можно выбрать такое H_1, что

$$\mathcal{D}_0(H_1,f)\stackrel{def}{=}$$

$$=H_1^{s-m+1}\sum_{i=\xi}^{k}\left|\sum_{u=s}^{n-1}\sum_{q=0}^{m-1}g_{i,u-s+1}\partial_q f_{p+1,u}\frac{(\mu-u)!}{(\mu-q)!}(1-\tau_i)^{\mu-q}H_1^{u+m-s-q-1}\right|<1;$$

тогда при $h_p\le H_1$ имеем

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial z_{p0}}\right\|_\infty\le d_0(H_1,f)\,h_p^{s-\mu},$$

где $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=\xi}^{k}$, $\alpha_0 = \frac{|A(H_1,f)|}{1-\mathcal{D}_0(H_1,f)}$. Аналогично найдутся такие H_{i+1} и $d_i(H_{i+1},f)$, $1\le i<s$, что для всех $h_\rho \le H_{i+1}$ выполняются неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial z_{\rho i}}\right\|_\infty \le d_i(H_{i+1},f)\,h_\rho^{s-\mu+(i-m+1)_+},\quad 0\le i<s. \qquad (2.10)$$

Запишем теперь (2.9) в виде

$$z_{\rho+1} = z_\rho + h_\rho \Phi(x_\rho, z_\rho, h_\rho), \qquad (2.11)$$

где $\Phi=\{\Phi_\lambda\}_{\lambda=0}^{s-1}$ и

$$\Phi_\lambda = \sum_{i=\lambda+1}^{s-1} z_{\rho i}\frac{h_\rho^{i-\lambda-1}}{(i-\lambda)!} + \sum_{i=s}^{n-1} f_{\rho i}\frac{h_\rho^{i-\lambda-1}}{(i-\lambda)!} + \frac{h_\rho^{\mu-\lambda-1}}{(\mu-\lambda)!}\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_j(1-\tau_j)^{\mu-\lambda},\quad 0\le\lambda<s.$$

Выбрав $H_0=\min\limits_{1\le i\le s} H_i$ и используя оценки (2.10), можно показать, что для всех $h_\rho\le H_0$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial z_{\rho l}}\right| \le \begin{cases} c_{\lambda l}\, h_\rho^{s-\lambda-1}, & l\le\lambda,\ l<m, \\ c_{\lambda l}\, h_\rho^{s-\lambda+l-m}, & m\le l\le\lambda, \\ c_{\lambda l}\, h_\rho^{l-\lambda-1}, & l>\lambda, \\ c_{\lambda l} = c_{\lambda l}(H_0,f), & \end{cases}$$

т.е.

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial z_\rho}\right\|_\infty \le \mathcal{D}=\mathcal{D}(H_0,f) \qquad (2.12)$$

и $\mathcal{D}$ не зависит от h_i при $h_i\le H_0$, $i=0,1,\dots$

Пусть теперь $y(x)$ – точное решение задачи (2.1) и $y_{li}=y^{(i)}(x_l)$, $0\le i\le s-1$, $l=0,1,2,\dots$, $y_l=\{y_{li}\}_{i=0}^{s-1}$. Вычтя из (2.11) тождество $y_{\rho+1}=y_\rho+h_\rho\left(\frac{y_{\rho+1}-y_\rho}{h_\rho}\right)$ по аналогии с [9, стр. 94], получим

$$\|z_{\rho+1}-y_{\rho+1}\|_\infty \le \|z_\rho-y_\rho\|_\infty + h_\rho\|\Phi(x_\rho,z_\rho,h_\rho)-$$
$$-\Phi(x_\rho,y_\rho,h_\rho)\|_\infty + h_\rho\left\|\Phi(x_\rho,y_\rho,h_\rho)-\frac{y_{\rho+1}-y_\rho}{h_\rho}\right\|_\infty + \theta, \qquad (2.13)$$
$$\rho=0,1,2,\dots$$

Из (2.12) следует, что

$$\|\Phi(x_\rho,z_\rho,h_\rho)-\Phi(x_\rho,y_\rho,h_\rho)\|_\infty\le\mathcal{D}\|z_\rho-y_\rho\|_\infty. \qquad (2.14)$$

Можно показать, что при всех достаточно малых h_ρ

$$\left\|\Phi(x_\rho,y_\rho,h_\rho)-\frac{y_{\rho+1}-y_\rho}{h_\rho}\right\|_\infty\le C h_\rho^{\mu-s+1}, \qquad (2.15)$$

где $\Phi(x_\rho,y_\rho,h_\rho)$ означает, что $z_\rho=y_\rho$, то есть (2.15) позволяет оценить погрешность (2.11) при $x=x_{\rho+1}$, если при $x=x_\rho$ $S^{(l)}(x_\rho)=y^{(l)}(x_\rho)$, $l=0,1,\dots,n-1$. Но заметим, что в этом случае из (1.12) имеем для $l=0,1,\dots,s-1$

$$S^{(l)}(x_{\rho+1}) = l!\,h_\rho^{-l}\left\{\sum_{i=l}^{n-1}\eta_{il}\,y^{(i)}(x_\rho)\frac{h_\rho^i}{i!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=s}^{n-1}\rho_{jl}f_j(x_{\rho+1},S(x_{\rho+1}),\dots,S^{(m-1)}(x_{\rho+1}))\frac{h_\rho^j}{j!}\right\}.$$

С другой стороны, из (1.15) получаем соотношения:

$$y^{(l)}(x_{\rho+1}) = l!\,h_\rho^{-l}\left\{\sum_{i=l}^{n-1}\eta_{il}\,y^{(i)}(x_\rho)\frac{h_\rho^i}{i!} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=s}^{n-1}\rho_{jl}f_j(x_{\rho+1},y(x_{\rho+1}),\dots,y^{(m-1)}(x_{\rho+1}))\frac{h_\rho^j}{j!}\right\} + C h_\rho^{\mu+1-l},$$
$$l=0,1,\dots,s-1.$$

Из последних двух соотношений, используя условия Липшица для f_j, $s\le j\le n-1$, получим

$$\left| S^{(\ell)}(x_{p+1}) - y^{(\ell)}(x_{p+1}) \right| \le$$

$$\le \ell! \sum_{j=s}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left|\rho_{j\ell}\right| \left|M_{ji}\right| \left|S^{(i)}(x_{p+1}) - y^{(i)}(x_{p+1})\right| \frac{h_p^{j-\ell}}{j!} + C h_p^{\mu+1-\ell},$$

или
$$\| z_{p+1} - y_{p+1} \|_\infty \le h_p C_1 \| z_{p+1} - y_{p+1} \|_\infty + C h_p^{\mu+2-s},$$

то есть найдется такая константа C, не зависящая от h_p при $h_p < 1/C_1$, что

$$\| z_{p+1} - y_{p+1} \|_\infty \le C h_p^{\mu+2-s}.$$

Но тогда из (2.II) имеем

$$h_p \Phi_\ell(x_p, y_p, h_p) = S_{p+1}^{(\ell)} - S_p^{(\ell)} = y_{p+1}^{(\ell)} - y_p^{(\ell)} + (S_{p+1}^{(\ell)} - y_{p+1}^{(\ell)}),$$

отсюда и из предыдущей оценки сразу следует (2.I5). Обозначив $w_i = \|z_i - y_i\|_\infty$, $u = CH^{\mu-s+2} + \theta$, из (2.I3)–(2.I5) получим

$$w_{p+1} \le (1 + h_p \mathcal{D}) w_p + u \le \prod_{i=0}^{p} (1 + h_i \mathcal{D}) w_0 +$$

$$+ u\left[1 + (1 + h_p \mathcal{D}) + \ldots + (1 + h_p \mathcal{D})(1 + h_{p-1} \mathcal{D}) \ldots (1 + h_1 \mathcal{D})\right],$$

отсюда и из леммы 2.I сразу следует (2.7) для $j = s \ge m$, $0 \le \ell \le s - 1$.

Пусть теперь $0 \le s < m \le n-1$. В этом случае нельзя непосредственно использовать правые части уравнения (2.I) и их производные. Недостающие условия получим с помощью разностных соотношений, точных для полиномов степени не выше $\mu - \ell$,

$$z_{p+1,\ell} = \sum_{\varkappa=\ell}^{m-1} z_{p\varkappa} \frac{h_p^{\varkappa-\ell}}{(\varkappa-\ell)!} + \sum_{\lambda=m}^{n-1} (\varphi_{\ell\lambda} z_{p\lambda} + \psi_{\ell\lambda} z_{p+1,\lambda}) \frac{h_p^{\lambda-\ell}}{(\lambda-\ell)!}, \qquad (2.I6)$$

$$\ell = 0, 1, \ldots, m-1, \quad z_i = \{ z_{ij} \}_{j=0}^{m-1},$$

которые получаются непосредственно из (I.I2), (I.I3), то есть

$$\varphi_{\ell\lambda} = r_{\lambda\ell} / \binom{\lambda}{\ell}, \qquad \psi_{\ell\lambda} = \rho_{\lambda\ell} / \binom{\lambda}{\ell},$$

если в лемме I.3 положить $s = m$, $r = n-1$.

Принимая во внимание (2.I6), запишем (2.8)–(2.9) следующим образом:

$$\alpha_q = \sum_{i=s}^{m-1} g_{q,i-s+1} \frac{(\mu-i)!}{h_p^{\mu-i}} \sum_{\varkappa=m}^{n-1} \left[(\varphi_{i\varkappa} - 1) f_{p\varkappa} + \psi_{i\varkappa} f_{p+1,\varkappa} \right] \frac{h_p^{\varkappa-i}}{(\varkappa-i)!} +$$

$$+ \sum_{i=m}^{n-1} g_{q,i-s+1} \frac{(\mu-i)!}{h_p^{\mu-i}} \left\{ f_{p+1,i} - \sum_{j=i}^{n-1} f_{p,i} \frac{h_p^{j-i}}{(j-i)!} \right\} =$$

$$= \sum_{\varkappa=m}^{n-1} (\varphi_\varkappa f_{p\varkappa} + \psi_\varkappa f_{p+1,\varkappa}) h_p^{\varkappa-\mu}, \qquad (2.8^*)$$

где

$$\varphi_\varkappa = \sum_{i=s}^{\varkappa} \frac{(\mu-i)!}{(\varkappa-i)!} \left[\chi(m-i) \varphi_{i\varkappa} - 1 \right] g_{q,i-s+1},$$

$$\psi_\varkappa = (\mu-\varkappa)!\, g_{q,\varkappa-s+1} + \sum_{i=s}^{m-1} \frac{(\mu-i)!}{(\varkappa-i)!} g_{q,i-s+1} \psi_{i\varkappa},$$

и

$$z_{p+1,\ell} = \sum_{i=\ell}^{m-\ell} z_{pi} \frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!} + \sum_{i=m}^{n-1} f_{pi} \frac{h_p^{i-\ell}}{(i-\ell)!} +$$

$$+ \frac{h_p^{\mu-\ell}}{(\mu-\ell)!} \sum_{j=\xi}^{k} \alpha_j (1-\tau_j)^{\mu-\ell}, \quad 0 \le \ell < m. \qquad (2.9^*)$$

В этом случае $\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial z_{pi}} \right\|_\infty \le \tilde{d}_i(H_{i+1}, f) h_p^{m-\mu}$, $0 \le i < m$, и, как и выше, при достаточно малом h_p $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial z_p} \right\|_\infty \le \tilde{\mathcal{D}}(H_0, f)$, дальше стандартным образом получаем (2.7) при $0 \le s < m$, $0 \le \ell < m$.

Из условия Липшица для f_i следует справедливость (2.7) при $\max(s,m) \le \ell \le n-1$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть $y(x)$ и сплайн $S_{n,r,s,n-1}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы*

2.2. тогда справедливы неравенства:

$$\|S^{(\ell)}-y^{(\ell)}\|_{[0,x_p]}\leqslant\begin{cases}F_1(x_p,f,H_0), & 0\leqslant\ell<j,\\ F_2(x_p,f,H_0)H^{j-\ell}, & j\leqslant\ell\leqslant\mu,\end{cases}\qquad(2.17)$$

$$j=\max(m,s),$$

где $F_i=C_{i1}\theta_0\exp(\mathcal{D}x_p)+(C_{i2}\beta H^{\mu+1-j}+\theta h^{-1})\dfrac{\exp(\mathcal{D}x_p)-1}{\mathcal{D}}$,

и константы C_{ij}, $i,j=1,2;\mathcal{D}$, не зависят от H при $H\leqslant H_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in[x_p,x_{p+1}]$, $s\geqslant m$. Используя лемму I.3 и соотношение (I.I5), получим для $0\leqslant\ell\leqslant\mu$

$$\frac{h_p^\ell}{\ell!}\left|w(x)_\ell\right|\overset{def}{=}\frac{h_p^\ell}{\ell!}\left|S^{(\ell)}(x)-y^{(\ell)}(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=\min(\ell,s)}^{n-1}|\eta_{i\ell}(\tau)|\,|w_{pi}|\frac{h_p^i}{i!}+\sum_{i=s}^{n-1}|\rho_{i\ell}(\tau)|\,|w_{p+1,i}|\frac{h_p^i}{i!}+|R_{p\ell}|=$$

$$=\sum_{i=\ell}^{s-1}|\eta_{i\ell}(\tau)|\,|\omega_{p,i}|\frac{h_p^i}{i!}+\sum_{i=s}^{n-1}\Big(|\eta_{i\ell}(\tau)|\,|\omega_{pi}|+$$

$$+|\rho_{i\ell}(\tau)|\,|w_{p+1,i}|\Big)\frac{h_p^i}{i!}+|R_{p\ell}|,$$

где $w_{p\ell}=w(x_p)_\ell$. Теперь, воспользовавшись ограниченностью $\eta_{ij}(\tau)$ и $\rho_{i\ell}(\tau)$ и результатом предыдущей теоремы,получим требуемое. Соотношения (I.I2) и (2.I6) позволяют получить утверждение и при $0\leqslant s<m$. Теорема доказана.

Вычислительная схема называется А-устойчивой [9] или сильно устойчивой [5], если для задачи

$$\frac{d}{dx}y=\lambda y,\quad y(0)=y_0=1,\qquad(2.18)$$

при любом λ, $Re(\lambda)<0$, существует $H_0>0$ такое, что при всех $h<H_0$ приближенное решение $y(ih)\to0$ при $i\to\infty$.

Приближенное решение задачи (2.I)-(2.2) в виде сплайна удовлетворяет согласно (I.I2) разностным соотношениям

$$y^{(\ell)}(x_{p+1})\frac{h_p^\ell}{\ell!}=\sum_{i=\ell}^{n-1}\eta_{i\ell}\,y^{(i)}(x_p)\frac{h_p^i}{i!}+\sum_{j=s}^{r}\rho_{j\ell}\,y^{(j)}(x_{p+1})\frac{h_p^j}{j!},\qquad(2.19)$$

$$y^{(i)}(x_p)=f_{pi},\quad s\leqslant i\leqslant r,\quad 0\leqslant\ell<s,\quad p=0,1,2,\ldots$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $r=n-1$, тогда разностная схема (2.I9) А-устойчива в том и только в том случае, если $s\leqslant1$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее простое утверждение (см., например, [I0]).

ЛЕММА 2.2. Пусть $\zeta(T)$ – спектральный радиус матрицы $T=(t_{ij})_{i,j=1}^n$ и $Tr(T)=\sum_{i=1}^n t_{ii}$ – след матрицы. Если $|Tr(T)|>n$, то $\zeta(T)>1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.4. В соответствии с определением А-устойчивости будем с помощью сплайнов по схеме (2.I9) строить приближенное решение задачи (2.I8) в узлах сетки Δ_h с постоянным шагом h. Обозначим для удобства

$$\beta_{pq}=\frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_p),\quad \beta_p=\{\beta_{pj}\}_{j=0}^{s-1}.$$

Из (2.I8) и (2.I9) следует, что для $q\geqslant s$

$$\beta_{pq}=\frac{h^q}{q!}f_q(x_p,y(x_p))=\frac{\lambda^q h^q}{q!}y(x_p)=\frac{\lambda^q h^q}{q!}\beta_{p0},$$

$$p=0,1,\ldots.$$

Заметив, что $\eta_{00}=1$ (см. (I.I3)), запишем (2.I9) для $\ell=0$ в виде

$$\beta_{p+1,0}=\sum_{i=1}^{s-1}\eta_{i0}\beta_{pi}+\Big(1+\sum_{j=s}^{n-1}\eta_{j0}\frac{h^j\lambda^j}{j!}\Big)\beta_{p0}+$$

$$+\Big(\sum_{j=s}^{n-1}\rho_{j0}\frac{h^j\lambda^j}{j!}\Big)\beta_{p+1,0},\quad p=0,1,\ldots,N-1.$$

Фиксируем λ и выберем H_1 так, чтобы величина последней скобки была по абсолютной величине меньше единицы для всех $h \le H_1$. Тогда

$$\beta_{p+1,0}=\frac{1}{1-\rho_0}(1+\eta_0)\beta_{p0}+\frac{1}{1-\rho_0}\sum_{i=1}^{s-1}\eta_{i0}\beta_{pi}$$

и

$$\beta_{p+1,\ell}=\left[\eta_\ell+\nu_\ell(1+\eta_0)\right]\beta_{p0}+\sum_{i=1}^{s-1}(\eta_{i\ell}+\nu_\ell\eta_{i0})\beta_{pi},\quad 1\le \ell \le s,$$

где обозначено

$$\rho_i=\sum_{j=s}^{n-1}\rho_{ji}\frac{\lambda^j h^j}{j!},\quad \eta_i=\sum_{j=s}^{n-1}\eta_{ji}\frac{\lambda^j h^j}{j!},\quad \nu_i=\begin{cases}\dfrac{\rho_i}{1-\rho_0}, & i\ge 1,\\[2mm] \dfrac{1}{1-\rho_0}, & i=0.\end{cases}$$

Записав последние равенства в векторной форме, придем к эквивалентной итерационной схеме

$$\beta_{p+1}=U\beta_p,\quad p=0,1,2,\dots, \qquad (2.20)$$

где матрица U имеет вид:

$$U=\begin{pmatrix} \nu_0(1+\eta_0) & \nu_0\eta_{10} & \cdots & \nu_0\eta_{s-1,0}\\ \eta_1+\nu_1(1+\eta_0) & 1+\nu_1\eta_{10} & \cdots & \eta_{s-1,1}+\nu_1\eta_{s-1,0}\\ \eta_2+\nu_2(1+\eta_0) & \nu_2\eta_{10} & \cdots & \eta_{s-1,2}+\nu_2\eta_{s-1,0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \eta_{s-1}+\nu_{s-1}(1+\eta_0) & \nu_{s-1}\eta_{10} & \cdots & 1+\nu_{s-1}\eta_{s-1,0}\end{pmatrix}$$

Здесь использовано равенство $\eta_{ij}=1$ при $i=j<s$, $0\le j\le i<s$. Итерации (2.20) сходятся к нулю (расходятся) в том и только в том случае, если спектральный радиус матрицы U меньше (больше) единицы. Подсчитаем след матрицы U.

$$Tr(U)=\nu_0(1+\eta_0)+(1+\nu_1\eta_{10})+\dots+(1+\nu_{s-1}\eta_{s-1,0})=s-1+\nu_0\eta_0+\sum_{i=0}^{s-1}\nu_i.$$

Так как $\dfrac{1}{1-\rho_0}=\nu_0=1+\rho_{s0}\dfrac{\lambda^s h^s}{s!}+\rho_{s+1,0}\dfrac{\lambda^{s+1}h^{s+1}}{(s+1)!}+\dots,$ то

$$Tr(U)=s-1+\nu_0\left(\sum_{j=s}^{n-1}u_j\frac{\lambda^j h^j}{j!}+1\right)=s+c_s h^s\lambda^s+c_{s+1}h^{s+1}\lambda^{s+1}+O(h^{s+2})=s+R(h),$$

где $u_j=\sum_{i=1}^{s-1}\rho_{ji}+\eta_{j0}$, $c_s=(u_s+\rho_{s0})/s!$, $c_{s+1}=(u_{s+1}+\rho_{s+1,0})/(s+1)!$.
Предположим сначала, что $s=2\ell$ и $c_s>0$, тогда, положив $\lambda=-1$, найдем $H_2=\max\{h: R(h)>0\}$ и при всех $h\le\min(H_1,H_2)$ $|Tr(U)|>s$, и, следовательно, по лемме 2.2, $\zeta(U)>1$. Если $s=2\ell$ и $c_s<0$, положим $\lambda=e^{i\varphi}$, где

$$\varphi=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{2s}\right)\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } s=4\sigma+2,\\[2mm] \left(1+\dfrac{2}{s}\right)\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } s=4\sigma+4,\ \sigma=0,1,\dots\end{cases}$$

нетрудно убедиться, что $Re(\lambda)<0$ и $Re(\lambda^s)<0$, и найдется такое $H_3=\max\{h: R(h)>0\}$, что при всех $h\le\min(H_1,H_3)$ $\zeta(U)>1$. Пусть теперь $s=2\ell+1$. Возьмем $\lambda=e^{i\varphi}$, где

$$\varphi=\begin{cases}\left(1+\dfrac{3}{4s}\right)\pi, & \text{если } c_s>0,\\[2mm] \left(1+\dfrac{1}{4s}\right)\pi, & \text{если } c_s<0,\end{cases}$$

и тогда снова можно выбрать H_4 так, что при всех $h\le\min(H_1,H_4)$ $\zeta(U)>1$. Таким образом, при $s>1$ найдется такое λ, $Re(\lambda)<0$, что при всех достаточно малых h $y(ih)\to 0$ при $i\to\infty$.

При $s=1$ уравнение (2.20) запишется в виде

$$y(x_{p+1})=\frac{1+\sum_{i=1}^{n-1}\eta_{i0}\frac{\lambda^i h^i}{i!}}{1-\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i0}\frac{\lambda^i h^i}{i!}}\,y(x_p)=\zeta y(x_p),\quad p=0,1,\dots \qquad (2.21)$$

Из (I.13) следует, что $\eta_{i0}=1-\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\rho_{j0}$, а тогда из (2.21) получим

$$\zeta=\frac{1+(1-\rho_{10})\lambda h+(1-\rho_{10}-\rho_{20})\frac{\lambda^2h^2}{2}+\dots}{1-\rho_{10}\lambda h-\rho_{20}\frac{\lambda^2h^2}{2}-\dots}=\frac{1-\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i0}\frac{\lambda^i h^i}{i!}+\lambda h+O(h^2)}{1-\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i0}\frac{\lambda^i h^i}{i!}},$$

то есть найдется H_5, такое что $|\zeta|<1$ при всех $h<\min(H_1, H_5)$. В случае $s=0$ А-устойчивость доказана Варгой [2]. Теорема доказана.

3. В некоторых случаях требование непрерывности производных приближенного решения на всем отрезке излишне. Достаточно, чтобы производные в каждой точке справа и слева различались в некотором смысле мало. Пусть на сетке Δ заданы функции ν_j, $0\le j\le n-1$, со значениями $\nu_j(x_i)=\nu_{ij}$, $x_i\in\Delta$. Рассмотрим сетки $\Delta^{(\ell)}=\{x_p^{(\ell)}: 0\le p\le N-\ell,\ x_p^{(\ell)}=x_{p+\ell}\in\Delta\}$, $0\le\ell\le N-1$, и множества $\pi^{(\ell)}=\{\pi_{ij}^{(\ell)}: \pi_{ij}^{(\ell)}=\nu_{ij},\ x_i\in\Delta^{(\ell)}, (i,j)$ пробегают $Q^{(\ell)}\}$, где $Q^{(\ell)}=\{(i,j): i=0,1,\dots,N-\ell;$ если $i=0$, то $j=0,1,\dots,n-1$, иначе $j=s,s+1,\dots,z\}$. Определим $\tilde S_{n,\gamma,s,z}(x)$ как функцию, совпадающую на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]$, $x_p, x_{p+1}\in\Delta$, $0\le p<N$, со сплайном $S_{n,\gamma,s,z}(\Delta^{(p)},\pi^{(p)}, x)$. Таким образом,

$$\tilde S=\tilde S_{n,\gamma,s,z}\in C^{n+\gamma-1}[x_i, x_{i+1}],\quad 0\le i<N,$$

но, вообще говоря, не является непрерывной функцией на всем отрезке K. Из теоремы I.2 немедленно следует

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть $f(x)\in C^{n+\gamma}(K)$, $\nu_{ij}=f^{(j)}(x_i)$, $0\le i\le N$, $0\le j\le n-1$, тогда

$$\|\tilde S^{(\ell)}-f^{(\ell)}\|_K\le CH^{n+\gamma-\ell}\omega(f^{(n+\gamma)}, H),\quad 0\le\ell\le n+\gamma=\mu, \tag{3.I}$$

где C – константа из теоремы I.2.

Действительно, для каждого $0\le p\le N-1$ функция $\tilde S_{n,\gamma,s,z}(x)$ в силу определения принадлежит классу $C^{\mu-1}[x_p, x_{p+1}]$ и удовлетворяет на $[x_p, x_{p+1}]$ условиям

$$\tilde S^{(i)}(x_p)=f^{(i)}(x_p),\quad \tilde S^{(j)}(x_{p+1})=f^{(j)}(x_{p+1}),$$

$$i=0,1,\dots,n-1,\quad j=s,s+1,\dots,z,$$

которые после замены x на $x-x_p$ совпадают с условиями теоремы I.2 при $t=h_p$, откуда и следует (3.I). Таким образом, скачки производных $\tilde S^{(\ell)}(x)$ малы в смысле (3.I) при достаточно малых значениях H, то есть $\tilde S^{(\ell)}(x)$ "почти непрерывны" на K и $\tilde S_{n,\gamma,s,z}(x)$ эффективно восстанавливает функцию и ее производные на всем отрезке.

Для задачи (2.I) $\tilde S(x)$ строится на каждом $[x_p, x_{p+1}]$, $p>0$, в соответствии с условиями

$$\begin{aligned}&\tilde S^{(i)}(x_p)=f_i(x_p, \tilde S(x_p),\dots,\tilde S^{(m-1)}(x_p)),\\ &\tilde S^{(j)}(x_{p+1})=f_j(x_{p+1}, \tilde S(x_{p+1}),\dots,\tilde S^{(m-1)}(x_{p+1})),\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$m\le i\le n-1,\quad s\le j\le z,$$

причем при $0\le i<m$, $s\ge m$ производные определяются из условий $\tilde S^{(i)}(x_p+0)=\tilde S^{(i)}(x_p-0)$, а для $s\le j<m$ используется подходящая разностная формула.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $y\in C^{n+\gamma+1}(K)$ есть решение задачи (2.I) и $\tilde S(x)=\tilde S_{n,\gamma,s,z}(x)$ удовлетворяет на $[x_p, x_{p+1}]$ условиям (3.2), тогда

$$\|S^{(\ell)}-y^{(\ell)}\|_K\le\begin{cases}C_1\theta_0+C_2\dfrac{\theta}{h}+C_3\beta H^{\mu+1-j}, & 0\le\ell<j,\\ \left(C_4\theta_0+C_5\dfrac{\theta}{h}+C_3\beta H^{\mu+1-j}\right)H^{j-\ell}, & j\le\ell\le\mu,\end{cases} \tag{3.3}$$

$$j=\max(s,m),\quad \theta_0=\max_{0\le i\le n-1}|\tilde S^{(i)}(0)-y^{(i)}(0)|,$$

θ – погрешность вычислений на каждом шаге и C_i $(1\le i\le 5)$ не зависят от H при $H\le H_0<\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теорем 2.2 и 2.3 с очевидными изменениями. Приближенное решение здесь непрерывно на K.

Следует отметить одно интересное явление: ослабление требования непрерывности интерполянта меняет его свойства сходимости. Для сравнения с теоремой 2.4 приведем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. Приближенное решение $y(x)=\tilde S_{n,\gamma,s,z}(x)$ задачи (2.I) при $m=1$, удовлетворяющее условиям (3.2), А-устойчиво для всех $0\le s\le z\le n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись соотношением (2.I9) для задачи (2.I8), получим

$$\tilde S(x_{p+1}) = \tilde S(x_p)\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{i0}\frac{\lambda^i h^i}{i!} + \tilde S(x_{p+1})\sum_{j=s}^{z}\rho_{j0}\frac{\lambda^j h^j}{j!},\quad p=0,1,\dots,$$

или

$$\tilde S(x_{p+1}) = \zeta\,\tilde S(x_p),$$

где

$$\zeta = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}\eta_{i0}\dfrac{\lambda^i h^i}{i!}}{1-\sum\limits_{i=s}^{z}\rho_{i0}\dfrac{\lambda^i h^i}{i!}}\ .$$

При $s>2$ утверждение очевидно. При $s=1$ доказательство повторяет конец доказательства теоремы 2.4. Пусть $s=2$. Так как

$$\eta_{00}=\eta_{10}=1 \quad и \quad \eta_{20}=1-\rho_{20},$$

то

$$\zeta = \frac{1+\lambda h+\dfrac{\lambda^2h^2}{2}-\rho_{20}\dfrac{\lambda^2h^2}{2}+O(h^2)}{1-\rho_{20}\dfrac{\lambda^2h^2}{2}+O(h^2)} = 1+\frac{\lambda h+\dfrac{\lambda^2h^2}{2}+O(h^2)}{1-\rho_{20}\dfrac{\lambda^2h^2}{2}+O(h^2)}$$

и $|\zeta|<1$ при достаточно малом значении h, что и требовалось.

Приближенное решение задачи (2.1) с помощью $\tilde S_{n,r,s,z}(x)$, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемым на K, что, разумеется, ограничивает его дальнейшее использование. Можно заметить, однако, что при $m=s=1$ решение задачи (2.1) в виде $y=\tilde S_{n,r,s,z}(x)$ принадлежит классу $C^z(K)$.

4. Во многих работах, посвященных построению приближенных методов решения дифференциальных уравнений, заметна тенденция выделять А-устойчивые методы среди прочих. Можно привести примеры, когда при некоторых условиях не А-устойчивые методы оказываются не хуже, но иногда и предпочтительнее А-устойчивых. Например, рассматривая сплайны $S_{n,r,s,z}(x)$, можно заметить, что при увеличении s матрица B имеет, вообще говоря, более простой вид, и, таким образом, параметры α_j могут быть вычислены с меньшей погрешностью. Увеличение s может улучшить сходимость (2.4), что также немаловажно. В качестве иллюстрации рассмотрим решение уравнения $y'=(\cos y)^2$, $y(0)=0$, точное решение $y=\mathrm{arctg}(x)$, с помощью построенных в работе сплайнов. Результаты счета сведены в таблицу.

Таблица

Результат численного расчета для задачи $y'=(\cos y)^2, y(0)=0$

	x	$\theta_{5,0,0,4}$	$\theta_{5,0,1,4}$	$\theta_{5,0,1,3}$	$\theta_{5,0,3,4}$	$\theta_{5,0,1,1}$
$h=0.1$	0	0	0	0	0	0
	0.2	$0.611635187\cdot10^{-9}$	$0.307409209\cdot10^{-9}$	$0.636191544\cdot10^{-9}$	$0.795016604\cdot10^{-7}$	$0.224418955\cdot10^{-6}$
	0.3	$0.219270078\cdot10^{-7}$	$0.221643859\cdot10^{-7}$	$0.169666239\cdot10^{-7}$	$0.250564881\cdot10^{-6}$	$0.200972863\cdot10^{-5}$
	0.5	$0.333784556\cdot10^{-9}$	$0.335603545\cdot10^{-9}$	$0.158615876\cdot10^{-8}$	$0.843164344\cdot10^{-6}$	$0.203217212\cdot10^{-3}$
	1.0	$0.117637683\cdot10^{-6}$	$0.117754098\cdot10^{-6}$	$0.945346983\cdot10^{-7}$	$0.228512363\cdot10^{-5}$	$0.214587167\cdot10$
	2.0	$0.550317054\cdot10^{-7}$	$0.550462573\cdot10^{-7}$	$0.473503331\cdot10^{-7}$	$0.648895002\cdot10^{-5}$	$0.187843420\cdot10^{12}$
	3.0	$0.237669155\cdot10^{-7}$	$0.237741915\cdot10^{-7}$	$0.189429551\cdot10^{-7}$	$0.719741365\cdot10^{-5}$	-
	5.0	$0.884392641\cdot10^{-8}$	$0.885120244\cdot10^{-8}$	$0.700674718\cdot10^{-8}$	$0.174821435\cdot10^{-4}$	-
	10.0	$0.220825314\cdot10^{-8}$	$0.220825314\cdot10^{-8}$	$0.169166015\cdot10^{-8}$	$0.158191953\cdot10^{-3}$	-
	100.0	$0.181898940\cdot10^{-10}$	$0.181898940\cdot10^{-10}$	$0.181898940\cdot10^{-10}$	$0.270498651\cdot10^{-1}$	-
$h=0.01$	0	0	0	0	0	0
	0.2	$0.181898940\cdot10^{-11}$	$0.227373675\cdot10^{-11}$	$0.227373675\cdot10^{-11}$	$0.591171556\cdot10^{-11}$	$0.781434405\cdot10^{4}$
	0.3	$0.545696821\cdot10^{-11}$	$0.545696821\cdot10^{-11}$	$0.545686821\cdot10^{-11}$	$0.200088834\cdot10^{-10}$	$0.705990054\cdot10^{14}$
	0.5	$0.727595761\cdot10^{-11}$	$0.727595761\cdot10^{-11}$	$0.818545232\cdot10^{-11}$	$0.754880603\cdot10^{-10}$	-
	1.0	$0.127329251\cdot10^{-10}$	$0.127329258\cdot10^{-10}$	$0.127329258\cdot10^{-10}$	$0.252839527\cdot10^{-9}$	-
	2.0	$0.291038305\cdot10^{-10}$	$0.291038305\cdot10^{-10}$	$0.291038305\cdot10^{-10}$	$0.687577995\cdot10^{-9}$	-
	3.0	$0.363797881\cdot10^{-11}$	$0.363797881\cdot10^{-11}$	$0.367797881\cdot10^{-11}$	$0.749423634\cdot10^{-9}$	-
	5.0	$0.363797881\cdot10^{-11}$	0	0	$0.190266292\cdot10^{-8}$	-
	10.0	$0.181898940\cdot10^{-10}$	$0.181898940\cdot10^{-10}$	$0.109139364\cdot10^{-10}$	$0.163490768\cdot10^{-7}$	-
	100.0	$0.327418093\cdot10^{-10}$	$0.327418093\cdot10^{-10}$	$0.545696821\cdot10^{-10}$	$0.603077206\cdot10^{-5}$	-

Вычисления на каждом шаге проводились с погрешностью не больше 10^{-6}. Для приближенного решения выбирались сплайны с параметрами $n=5$, $\gamma=0$, $0\le s\le z\le 4$. Приближенное решение построено на сетке с шагом $h=0.1$ и $h=0.01$. В таблице $\theta_{n,\gamma,s,z}(x) = |S_{n,\gamma,s,z}(x) - \mathrm{arctg}\,(x)|$. Первый и второй столбцы таблицы демонстрируют A-устойчивое приближенное решение. Из таблицы видно, что в этом случае уменьшение шага сетки не дает существенных преимуществ в счете. Сплайн $S_{5,0,3,4}(x)$ позволяет получить не A-устойчивое решение (четвертый столбец). Очевидно, такими сплайнами не следует пренебрегать при решении задач на относительно небольших промежутках. Крайний случай неустойчивости представлен в последнем столбце таблицы (сплайн $S_{5,0,1,1}(x)$, совпадающий, как уже указывалось, со сплайнами Лоскалцо 5-го порядка). Здесь уменьшение шага сетки ухудшает сходимость. В некоторых случаях удовлетворительное приближение к точному решению можно получить с помощью сплайнов $S_{n,\gamma,s,z}(x)$, $z < n-1$. Например, приближенное решение рассматриваемой задачи в виде сплайна $S_{5,0,1,3}(x)$ (третья колонка таблицы) ведет себя как A-устойчивое.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю.Н.Субботину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. LOSCALZO F.R., TALBOT T.D. Spline function approximation for solution of ordinary differential equations. - "SIAM Journal in Numer.Anal.",1967,v.4,N 3,p.433-445.

2. VARGA R.S. Error Bounds for Spline interpolation.- In: Approximation with special Emphasis on Spline Functions. Schoenberg I.J.,ed. Acad.Press, New York-London,1969,p.367-388.

3. LOSCALZO F.R. An Introduction to the Application of Spline Functions to initial value problem. - In: Theory and application of Spline Functions. Ed. by T.N.E. Greville. Acad. Press, New York-London, 1969, p.37-40.

4. MICULA Gh. Numerical integration of differential equation $y^{(n)}=f(x,y)$ by spline functions. - "Revue Roumaine de Mathem.pures et appl.",1972,XVII,N 9,p.1385-1390.

5. HULME B.L. Piecewise Polynomial Taylor Methods for initial Value Problems.-"Numerische Math.",1971,v.17,N 5,p.367-381

6. СУББОТИН Ю.Н., ЧЕРНЫХ Н.И. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций. -"Матем.заметки", 1970, т. 7, № 4, с. 31-42.

7. KARLIN S. Total positivity, Interpolation by Splines, and Green functions of differential operators. - "Journal of Approx.theory",1971,v.4, N 1,p.91-112.

8. SWARTZ B.K., VARGA R.S. Error Bouds for Spline and L-Spline Interpolation.- "Journal of Approx.theory",1972, v. 6, p.6-49.

9. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Э., ПРАГЕР М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1969.

10. ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. Основы вычислительной математики. М., "Наука", 1966.

Поступила в ред.-изд.отд.
11 октября 1974 года