

УДК 517.9

К РАСЧЕТУ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ,
 ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В ПЛЕНОЧНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ

Б.С.Киндзалева, Р.Г.Дукьянова, С.И.Фалеев, К.В.Шведова

Металлическая пластинка, обладающая упругими свойствами, обусловленными натяжением или собственной жесткостью, под воздействием электростатического поля может изменить первоначальную форму. Это простое обстоятельство уже использовалось при создании, например, приборов, имеющих управляемую отражаемую поверхность [1]. Представляет интерес оценка параметров, которые определяют взаимодействие электростатических и упругих сил. В качестве модельных примеров рассмотрим несколько простых конструкций.

§1. Металлическая пластинка в однородном электростатическом поле

1. Недеформируемая, незаряженная пластинка шириной $2b$ помещена в однородное электростатическое поле, причем вектор напряженности E_∞ составляет с осью Ox , проходящей через сечение пластинки, угол α (рис.1). Подсчитаем момент электростатических сил $M(\alpha)$, приложенных к пластинке, относительно начала координат (плоская задача).

Как известно [2], комплексный потенциал, описывающий возмущенное электростатическое поле, имеет вид:

$$z = x + iy, \quad W = \varphi + i\psi, \quad (I.1)$$

$$W(z) = -iE_\infty \left[\cos\alpha \sqrt{z^2 - b^2} - iz \sin\alpha \right],$$

где φ — потенциальная, а ψ — силовая функции. Непосредствен-

ним следствием (I.1) является распределение интенсивности нагрузки вдоль пластинки в виде:

$$\rho(x; \alpha) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\left| \frac{dw}{dz} \right|_+^2 - \left| \frac{dw}{dz} \right|_-^2 \right) = \varepsilon_0 E_\infty^2 \frac{x \sin 2\alpha}{\sqrt{b^2 - x^2}} \quad (I.2)$$

Здесь индексами "+" и "-" отмечены значения модуля производной на верхней и нижней сторонах пластинки. Отсюда искомый момент равен

$$M(\alpha) = 2 \int_0^b x \rho(x; \alpha) dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \pi b^2 E_\infty^2 \sin 2\alpha \quad (I.3)$$

2. Пусть пластинка соединена с пружиной, обладающей жесткостью G , так что поворот пластинки на угол β порождает восстанавливающий момент, равный $G\beta$. Если первоначальный угол между сечением пластинки и вектором \vec{E}_∞ был равен α_0 , то под воздействием электростатического поля пластинка повернется на угол $\alpha_0 - \alpha$, который однозначно определяется из условия статического равновесия

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \pi b^2 E_\infty^2 \sin 2\alpha = G(\alpha_0 - \alpha); \quad 0 < \alpha \leq \alpha_0, \quad 0 < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2},$$

или

$$k_1^2(\alpha; \alpha_0) = \frac{\alpha_0 - \alpha}{\sin 2\alpha}, \quad k_1^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi b^2 E_\infty^2}{2G} \quad (I.4)$$

Графики функции $k_1^2(\alpha; \alpha_0)$ при различных α_0 приведены на рис. 2.

3. Рассматривая малые отклонения пластинки от первоначального положения, видоизменим исходную задачу. Пусть пластинка — нежесткая прямоугольная мембрана шириной $2b$ и длиной $2l$, натянутая вдоль оси OZ силой N , причем $l \gg b$ (рис. 3). При этом приближенное уравнение поверхности пластинки S можно представить в виде

$$S(x, z) = x\beta(z), \quad \beta(z) = \alpha_0 - \alpha(z), \quad |x| \leq b, \quad |z| \leq l,$$

и считать, что распределение интенсивности нагрузки при $z = \text{const}$ описывается выражением (I.2). Требуется найти форму статически уравновешенной мембраны.

Запишем условие статического равновесия для моментов в сечении $z = \text{const}$:

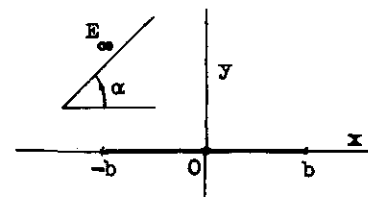


Рис. 1

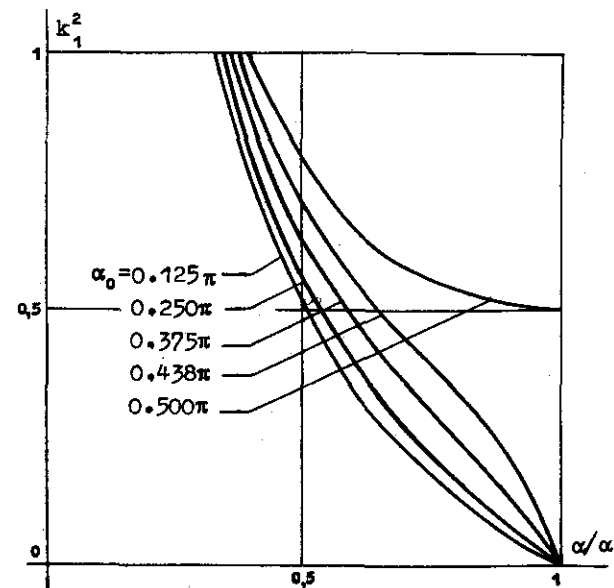


Рис. 2

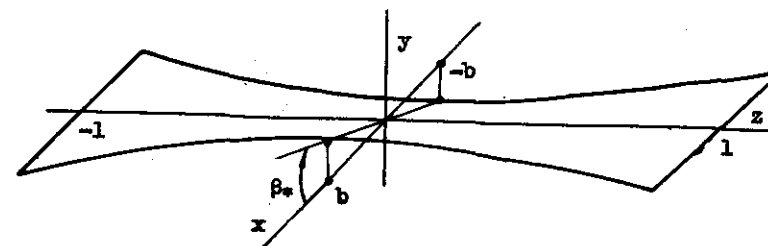


Рис. 3

$$\int_{-b}^b x \frac{N}{2b} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} dx + \frac{1}{2} \pi \epsilon_0 b^2 E_\infty^2 \sin 2(\alpha_0 - \beta) = 0.$$

Используя выражение $s(x, z)$, получим для определения $\beta(z)$ следующую краевую задачу [3]:

$$z = l\xi, \quad \frac{d^2\beta}{d\xi^2} + k_2^2 \sin 2(\alpha_0 - \beta) = 0, \quad (I.5)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad \beta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1,$$

где
$$k_2^2 = \frac{3\pi\epsilon_0 l^2 E_\infty^2}{2N} \quad (I.6)$$

Решение (I.5) может быть сведено к вычислению эллиптических интегралов. В частности, зависимость k_2 от α_0 и β_* , $\beta_* = \alpha_0 - \alpha(0)$, имеет вид

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}} \quad (I.7)$$

$$t_0 = \arcsin\left(\frac{1}{q} \cos \alpha_0\right), \quad q = \cos(\alpha_0 - \beta_*).$$

Графики функции $k_2^2(\alpha_0, \beta_*)$ при различных α_0 приведены на рис.4. Если $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, то из (I.7) следует равенство

$$E_\infty = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\pi N}{3\epsilon_0}},$$

определяющее E_∞ , при котором мембрана теряет поперечную устойчивость.

§ 2. Взаимодействие пластинки и плоскости, потенциалы которых заданы

I. Пусть потенциалы пластинки и плоскости равны соответственно \mathcal{U} и нулю. Ось симметрии недеформируемой пластинки, ширина которой $2b$, а длина бесконечна, параллельна плоскости с

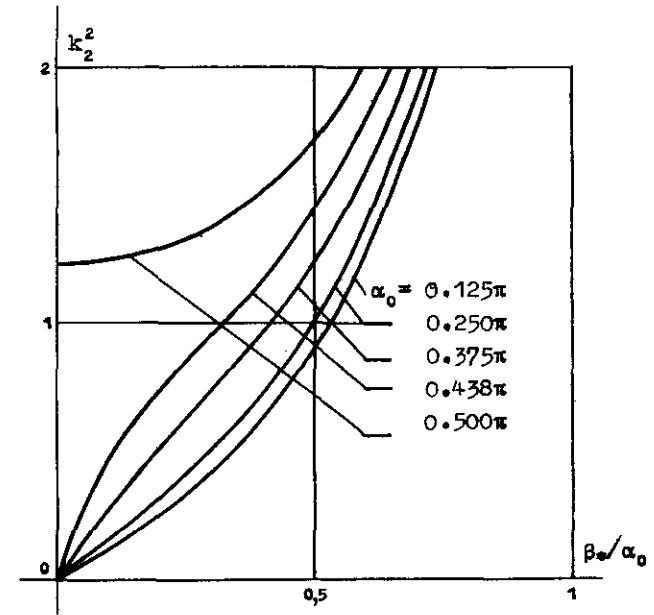


Рис. 4

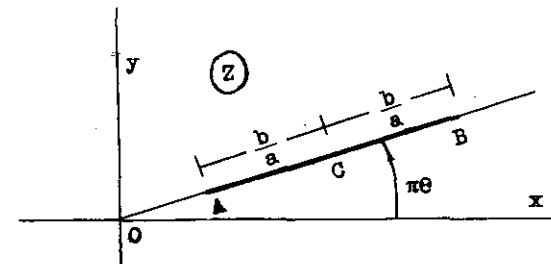


Рис. 5

нулевым значением потенциала и находится от нее на расстоянии α . Угол между плоскостью пластинки и плоскостью с нулевым значением потенциала равен $\pi\theta$. Определим равнодействующую электростатических сил F , приложенных к пластинке, и момент M относительно оси симметрии на единицу длины (плоская задача).

За масштабы линейных размеров и потенциала выберем α и U_0 . Тогда в области Ω_z - полуплоскость $\text{Im} z > 0$ с разрезом вдоль отрезка АВ (рис.5) - имеем следующую задачу Дирихле: найти гармоническую в Ω_z функцию U , если $U|_{y=0} = 0$ и $U|_{AB} = 1$. Если U известна, то распределение нагрузки вдоль АВ имеет вид

$$\rho(z) = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\alpha^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_+^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_-^2 \right],$$

и, следовательно,

$$F = \alpha \int_0^{2b/\alpha} \rho(z) dz, \quad M = \alpha^2 \int_0^{2b/\alpha} \left(\frac{b}{\alpha} - z \right) \rho(z) dz. \quad (2.1)$$

Здесь индексами "+" и "-" отмечены производные по нормали к отрезку АВ на верхней и нижней сторонах разреза, z - отнесенное к α расстояние, отсчитываемое вдоль АВ от точки А.

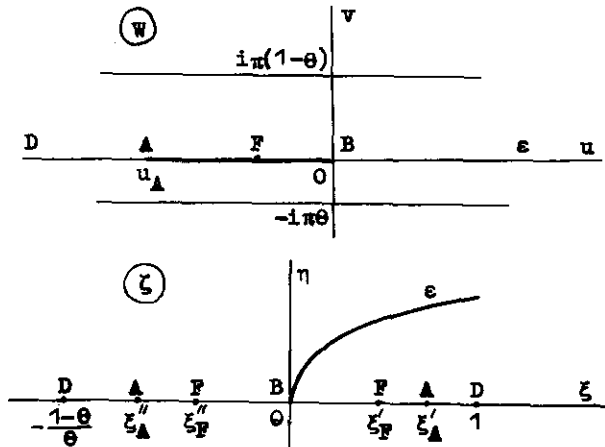


Рис. 6

Задача имеет точное решение [4]. Однако использование точного выражения U для вычислений F и M затруднительно в силу его громоздкости. Мы рассмотрим частный случай, когда $\alpha/b \ll 1$, представляющий интерес для упомянутых выше практических приложений. Введенное ограничение на отношение α/b позволяет предложить достаточно простой приближенный способ определения F и M .

Обозначим через ρ_A , ρ_C и ρ_B расстояния от начала координат соответственно до точек А, С и В (точка С - след оси симметрии в плоскости Z):

$$\rho_A = \frac{\alpha - b \sin \pi\theta}{\alpha \sin \pi\theta}, \quad \rho_C = \frac{1}{\sin \pi\theta}, \quad \rho_B = \frac{\alpha + b \sin \pi\theta}{\alpha \sin \pi\theta}.$$

Преобразование

$$w = u + iv = \ln z - \ln \rho_B - i\pi\theta, \quad z = \rho e^{i\varphi},$$

переводит область Ω_z в Ω_w - параллельная полоса $-\pi\theta < \text{Im} w < \pi(1-\theta)$ с разрезом вдоль АВ (рис.6). В Ω_w граничные условия для U имеют вид: $U|_{v=\pi(1-\theta)} = U|_{v=-\pi\theta} = 0$, $U|_{AB} = 1$. Очевидно, решение задачи Дирихле симметрично относительно линии $u = \frac{1}{2} u_A$, $u_A = \ln \rho_A - \ln \rho_B$. Поэтому для определения $\rho(z)$ достаточно найти выражения нормальных производных $\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_+$ и $\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_-$ на FB (на рис.6 точка F имеет координаты $(\frac{1}{2} u_A, 0)$):

$$\rho(z) = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\alpha^2} \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_+^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_-^2 \right], \quad \rho = \rho_A + z, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} u_A < u < 0, \quad \rho_A < \rho < \rho_B,$$

причем соответствие точек отрезков АВ в плоскостях Z и W задается в виде:

$$|u| = \begin{cases} \ln \rho - \ln \rho_A, & \rho_A \leq \rho \leq \rho_* = \sqrt{\rho_A \rho_B}, \\ \ln \rho_B - \ln \rho, & \rho_* \leq \rho \leq \rho_B. \end{cases} \quad (2.3)$$

Пусть $v|_{v=0} = 1 - \Phi(u)$, где $\Phi(u)$ — монотонно возрастающая от 0 до 1 функция при убывании u от u_A . Считая $\Phi(u)$ известной, запишем решение задачи Дирихле в области Ω'_w — полосы $-\pi\theta < \text{Im } w < \pi(1-\theta)$ с бесконечным разрезом вдоль ВД. Для этого отобразим Ω'_w при помощи функции

$$w = \theta \ln(1-\zeta) + (1-\theta) \ln\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta} \zeta\right), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (2.4)$$

на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ [2]. Соответствие точек, лежащих на границах, показано на рис.6. Граничные значения v в плоскости ζ имеют вид:

$$v|_{\eta=0} = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \leq -\frac{1-\theta}{\theta}; \\ 1 - \Phi_1(\xi), & -\frac{1-\theta}{\theta} \leq \xi \leq \xi''; \\ 1, & \xi'' \leq \xi \leq \xi'_A; \\ 1 - \Phi_2(\xi), & \xi'_A \leq \xi \leq 1; \\ 0, & 1 \leq \xi < \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь $\Phi_1[\xi''(u)] = \Phi_2[\xi'(u)] = \Phi(u)$, где ξ'' и ξ' — корни трансцендентного относительно ξ уравнения

$$u = \theta \ln(1-\xi) + (1-\theta) \ln\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta} \xi\right), \quad u \leq 0; \\ -\frac{1-\theta}{\theta} \leq \xi'' \leq 0; \quad 0 \leq \xi' \leq 1, \quad (2.6)$$

устанавливающего соответствие точек отрезков ДВ и ВД (см. рис.6), в которых значения v равны $\Phi(u)$; значения ξ'' , ξ'_A и ξ' , ξ'_A определяются из (2.6) при $u = u_A$ и $u = \frac{1}{2} u_A$. Искомое решение задачи Дирихле представим в виде интеграла Пуассона для полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ [2]:

$$v[w(\zeta)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v|_{\eta=0} \frac{\eta d\tau}{(\xi-\tau)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \left[\arctg \frac{1-\xi}{\eta} + \right. \\ \left. + \arctg \frac{1-\theta+\theta\xi}{\theta\eta} - \int_{\xi''}^{\xi'_A} \Phi_1(\tau) \frac{\eta d\tau}{(\xi-\tau)^2 + \eta^2} - \int_{\xi'_A}^1 \Phi_2(\tau) \frac{\eta d\tau}{(\xi-\tau)^2 + \eta^2} \right], \quad (2.7)$$

где функция $w(\zeta)$ определена в (2.4).

Пусть в некоторой точке с абсциссой t , принадлежащей отрезку ДА плоскости ζ , $-\frac{1-\theta}{\theta} < t < \xi''$, функция Φ_1 имеет значение $\Phi_1(t)$. Согласно (2.6), абсцисса соответствующей точки плоскости w , равная $u(t)$,

$$u(t) = \theta \ln(1-t) + (1-\theta) \ln\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta} t\right), \quad -\infty < u < u_A,$$

определяет точку, принадлежащую отрезку АД плоскости ζ , в которой $\Phi_2 = \Phi_1(t)$. Обозначим абсциссу этой точки через $\omega(t)$. Зависимость ω от t задается в виде решения трансцендентного уравнения, причем ω — положительный корень:

$$u(t) = \theta \ln(1-\omega) + (1-\theta) \ln\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta} \omega\right), \quad \xi'_A < \omega < 1.$$

Так как в силу симметрии $v|_{v=0} = v|_{u=u_A}$, то, согласно (2.4), в плоскости ζ найдется точка с координатами $\xi = \omega_1(t)$, $\eta = \omega_2(t)$, являющаяся образом точки $[u_A - u(t), 0]$, в которой $v = \Phi_1(t)$. Функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ определяются из решения системы двух трансцендентных уравнений:

$$\omega_1 = 1 - \omega_2 \operatorname{ctg} \left(\frac{1-\theta}{\theta} \arctg \frac{\theta \omega_2}{1-\theta + \theta \omega_1} \right),$$

$$u_A - u(t) = \frac{\theta}{2} \ln \left[(1-\omega_1)^2 + \omega_2^2 \right] + \frac{1-\theta}{2} \ln \left[\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta} \omega_1\right)^2 + \left(\frac{\theta}{1-\theta} \omega_2\right)^2 \right].$$

(На рис.6 образ луча $v=0, u>0$ — кривая ВЕ.) В результате (2.7) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\Phi_1(t)$ [5]:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{1-w_1(t)}{w_2(t)} + \operatorname{arctg} \frac{1-\theta+\theta w_1(t)}{\theta w_2(t)} \right] +$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\xi_a''}^{\xi_a'} \vartheta(\tau) \left\{ \frac{w_2(t)}{[w_1(t)-\tau]^2 + w_2^2(t)} \frac{dw(\tau)}{d\tau} \frac{w_2(t)}{[w_1(t)-w(\tau)]^2 + w_2^2(t)} \right\} d\tau, \quad (2.8)$$

где $\frac{dw}{dt} = \frac{(1-t)(1-\theta+\theta t)w(t)}{t[1-w(t)][1-\theta+\theta w(t)]}$.
 Если $\alpha/b \ll 1$, то dw/dt имеет порядок e^{-t} , $\xi_a'' \approx -2\pi b/\alpha$, и, следовательно, второе слагаемое в подынтегральном выражении (2.8) становится пренебрежимо малым. Отметим, что интегральное уравнение (2.8) есть следствие метода Шварца решения задачи Дирихле [6].

Используя (2.7), выпишем выражение нормальной производной на АВА плоскости ξ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = -\frac{\xi g(\xi)}{\pi(1-\xi)(1-\theta+\theta\xi)}, \quad \xi_a'' < \xi < \xi_a', \quad (2.9)$$

где

$$\xi g(\xi) = 1 + (1-\xi)(1-\theta+\theta\xi) \left[\int_{-\frac{1-\theta}{\theta}}^{\xi_a''} \frac{\varphi_1(\tau) d\tau}{(\xi-\tau)^2} + \int_{\xi_a'}^1 \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{(\xi-\tau)^2} \right].$$

Так как

$$\left| \frac{dw}{d\xi} \right|_{\eta=0} = \frac{\theta\xi}{(1-\xi)(1-\theta+\theta\xi)}, \quad (2.10)$$

то с учетом (2.9) и (2.10) правая часть (2.2) может быть преобразована к виду

$$\rho(z) = \frac{\epsilon_0 \omega^2}{2\pi^2 \alpha^2 \theta^2 \rho^2} \left[\varrho^2(\xi') - \varrho^2(\xi'') \right] \quad (2.11)$$

Оказывается, что при $\alpha/b \ll 1$ выражение в квадратных скобках (2.11) практически не зависит от задания функций φ_1 и φ_2 , удовлетворяющих условиям: $0 < \varphi_1, \varphi_2 < 1$, если ξ' и ξ'' принадлежат отрезкам $FВ$ и $ВF'$. В частности, значение слагаемого, входящего в определение $g(\xi)$.

$$(1-\xi)(1-\theta+\theta\xi) \int_{\xi_a''}^{\xi_a'} \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{(\xi-\tau)^2}$$

не превосходит величины порядка $e^{-\pi b/\alpha}$, $\xi_a'' < \xi < \xi_a'$. Полагая φ_1 и φ_2 равными нулю или единице, можно получить двусторонние оценки точных значений $\rho(z)$. При этом приближенное выражение функции $g(\xi)$ запишется следующим образом:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi}, & \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \\ \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{(1-\xi)(1-\theta+\theta\xi')}{\xi-\xi'} \right], & \varphi_1 = \varphi_2 = 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Если $3\pi\theta \rightarrow \frac{\alpha}{b}$, то $\xi_a' \rightarrow 1$, $\xi_a'' \rightarrow -\frac{1-\theta}{\theta}$, $g(\xi) \rightarrow \frac{1}{\xi}$, а распределение $\rho(z)$ стремится к точному. На концах отрезка АВ $\rho(z)$ имеет особенности:

$$\rho(z) = \frac{2\epsilon_0 \omega^2}{3\alpha^2} \frac{1-2\theta}{\pi^2 \theta^2 (1-\theta) \rho_a^2} \left[\xi g(\xi) \right]_{\xi=0}^2 \sqrt{\frac{\theta \rho_a}{2(1-\theta)z}}, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

$$\rho(z) = \frac{2\epsilon_0 \omega^2}{3\alpha^2} \frac{1-2\theta}{\pi^2 \theta^2 (1-\theta) \rho^2} \left[\xi g(\xi) \right]_{\xi=0}^2 \sqrt{\frac{\theta \rho_b}{2(1-\theta)(\rho_a^2 - z)}}, \quad z \rightarrow 2\frac{\rho_b}{\alpha}.$$

Таким образом, определение F и M свелось к механическим квадратурам, учитывающим особенности (2.13). В связи с этим отметим, что при вычислении ξ' и ξ'' по заданному значению ω целесообразно применить метод Вегстейна к преобразованному уравнению (2.6) [7]:

$$\xi' = \frac{1-e^{-\lambda}}{1 + \frac{\theta}{1-\theta} e^{-\lambda}}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{\theta} |\omega| + \frac{1}{1-\theta},$$

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{e^{-\lambda}}{(1-\theta)(1-\theta+\theta e^{-\lambda})} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \theta^k \left(\frac{1-e^{-\lambda}}{1-\theta+\theta e^{-\lambda}} \right)^{k+1}$$

- уравнение для определения ξ' с нулевым приближением λ_0 , и

$$|\xi''| = \frac{1-\theta}{\theta} \left[1 - e^{-\frac{|u| + \theta G_1 (1 + |\xi'|)}{1-\theta}} \right]$$

- уравнение для определения ξ'' с нулевым приближением, равным $|\xi'|$,

$$|\xi''| = \frac{1-\theta}{\theta} \left(1 - e^{-\frac{|u|}{1-\theta}} \right).$$

2. Пусть пластинка, способная поворачиваться около оси симметрии, соединена с пружиной, обладающей жесткостью G , и пусть ее невозмущенное положение характеризуется углом $\pi\theta_0$ и расстоянием α_0 , которое в дальнейшем остается неизменным (см. §I, п.2). Требуется определить угол поворота пластинки в зависимости от величины потенциала U .

Численным способом, рассмотренным в пункте I, построим зависимость $m(\theta; \frac{\alpha}{b})$, $\theta_0 < \theta < \theta_{max} = \frac{\alpha}{\pi b}$, где m - момент, отнесенный к $\frac{1}{2}\epsilon_0 U^2$:

$$M = \frac{\epsilon_0 U^2}{2} m(\theta; \frac{\alpha_0}{b}).$$

С другой стороны, поворот пластинки связан с возникновением восстанавливающего момента, обусловленного жесткостью пружины. Условие статического равновесия имеет вид:

$$\frac{\epsilon_0 U^2}{2} m(\theta; \frac{\alpha_0}{b}) = \pi G(\theta - \theta_0)$$

или

$$\alpha_1^2(\theta; \theta_0; \frac{\alpha_0}{b}) = \frac{\theta - \theta_0}{m(\theta; \frac{\alpha_0}{b})}, \quad \alpha_1^2 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\pi G}. \quad (2.14)$$

На рис.7 представлены в качестве примера графики функции α_1^2 при различных θ_0 и $\frac{\alpha_0}{b} = 0.1$. Отметим, как характерную особенность задачи, существование максимального значения α_1^2 , определяющего "напряжение срабатывания" [8]. Если $\alpha_1^2 < \alpha_1^2_{max}$, то имеют место два положения равновесия с различными углами $\pi\theta$, причем устойчивому положению равновесия отвечает меньший угол поворота. Физический смысл второго решения связан с понятием "напряжения отпущения" [8].

3. Рассмотрим вместо пластинки жесткую прямоугольную мембрану длиной $2l$, натянутую вдоль оси Oz силой N (рис.8). Срединная часть мембраны, дополненная пластинкой, длиной 2Δ и шириной $2b$, к которой приложены электростатические силы, недеформируема, а остальная имеет ширину $2\gamma b$, $\gamma < 1$. Невозмущенное состояние (см. §I, п.3) определяется параметрами θ_0 и α_0 . Требуется определить угол поворота $\pi\theta$ недеформируемой части мембраны и относящееся к ней измененное расстояние α в зависимости от величины потенциала U .

Из рассуждений, аналогичных приведенным в п.3, §I, следует, что момент M' , связанный с поворотом недеформируемой части мембраны на угол $\pi(\theta - \theta_0)$, равен

$$M' = \frac{2\pi N b^2}{3(l-\Delta)} (\theta - \theta_0),$$

а для упругой силы F' , возникающей с изменением расстояния $\alpha - \alpha_0$, имеем выражение

$$F' = \frac{2N(\alpha_0 - \alpha)}{l - \Delta}.$$

Момент M' и сила F' уравниваются моментом M и силой F , обусловленными электростатическим притяжением

$$M = \epsilon_0 \Delta U^2 m(\theta; \frac{\alpha}{b}), \quad F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \Delta U^2 f(\theta; \frac{\alpha}{b}),$$

где функции m и f строятся численным образом. Приравняв M' и M , F' и F , получим

$$\alpha_2^2 = \gamma^2 \frac{\pi(\theta - \theta_0)}{m(\theta; \frac{\alpha}{b})} = \frac{3\alpha(\alpha_0 - \alpha)}{b^2 f(\theta; \frac{\alpha}{b})}, \quad \alpha_2^2 = \frac{3\epsilon_0 \Delta (l - \Delta) U^2}{2N b^2}. \quad (2.15)$$

Упростим решение поставленной задачи, используя следующее обстоятельство. Зададим распределение нагрузки на недеформируемую часть мембраны формулой

$$\tilde{p}(s) = \frac{\epsilon_0 U^2}{2} \frac{1}{(\alpha + \pi\theta s)^2}, \quad s = b - \alpha z, \quad -b \leq s \leq b.$$

Тогда для равнодействующих силы \tilde{P} и момента \tilde{M} получим выражения:

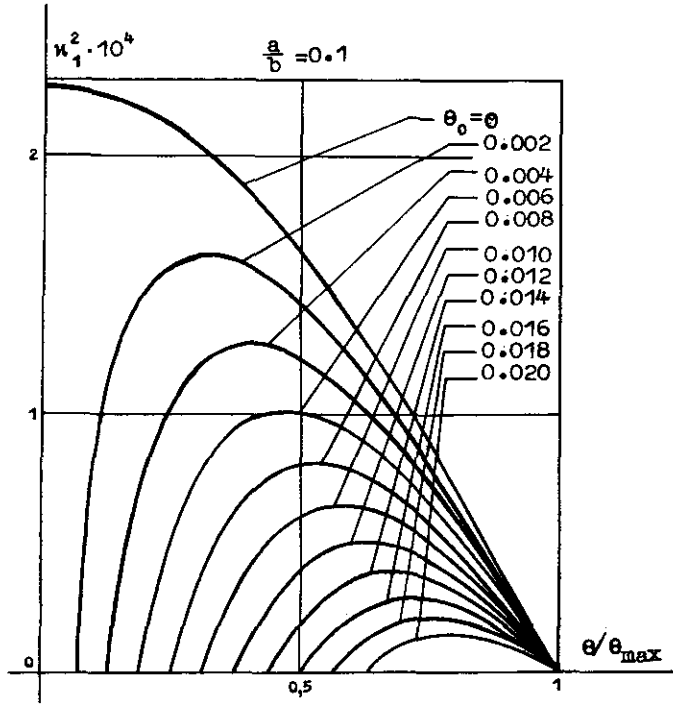


Рис. 7

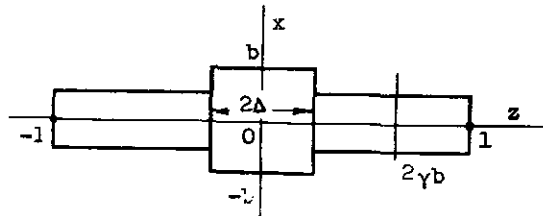


Рис. 8

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= 2\Delta \int_{-b}^b \tilde{\rho}(s) ds = \frac{\epsilon_0 \Delta U^2}{\alpha} \tilde{f}(\theta; \frac{\alpha}{b}), \\ \tilde{M} &= -2\Delta \int_{-b}^b s \tilde{\rho}(s) ds = \epsilon_0 \Delta U^2 \tilde{m}(\theta; \frac{\alpha}{b}), \\ \tilde{f}(\theta; \frac{\alpha}{b}) &= 2 \frac{b}{\alpha} \frac{1}{1-\tau^2}, \quad \tau = \pi \theta \frac{b}{\alpha} = \frac{\theta}{\theta_{max}}, \\ \tilde{m}(\theta; \frac{\alpha}{b}) &= \frac{1}{\pi^2 \theta^2} \left(\frac{2\tau}{1-\tau^2} - \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} \right). \end{aligned}$$

Обозначим далее через χ_1 и χ_2 комбинации

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{2}{\frac{\alpha}{b} \tilde{f}(\theta; \frac{\alpha}{b})} = 1 - \tau^2, \\ \chi_2 &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{b}{\alpha} \right)^3 \frac{\theta}{m(\theta; \frac{\alpha}{b})} = \frac{\frac{4}{3} \tau^3}{\frac{2\tau}{1-\tau^2} - \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}} \end{aligned}$$

При изменении τ от 0 до 1 χ_1 и χ_2 монотонно убывают от 1 до 0. Оказывается, что достаточно точно выполняются следующие приближенные равенства (тем точнее, чем меньше α/b)

$$C_1 \left(\frac{\alpha}{b} \right) \chi_1(\tau) = \frac{2b}{\alpha f(\theta; \frac{\alpha}{b})}, \quad C_1 \left(\frac{\alpha}{b} \right) = 2 \frac{b}{\alpha} \frac{1}{f(0; \frac{\alpha}{b})},$$

$$C_2 \left(\frac{\alpha}{b} \right) \chi_2(\tau) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{b}{\alpha} \right)^3 \frac{\theta}{m(\theta; \frac{\alpha}{b})}, \quad C_2 \left(\frac{\alpha}{b} \right) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{b}{\alpha} \right)^3 \left[\frac{\theta}{m(\theta; \frac{\alpha}{b})} \right]_{\theta=0}$$

При этом (2.15) преобразуется к виду

$$\mathcal{K}_2^2 = \gamma^2 \left(\frac{\alpha}{b} \right)^3 \left(1 - \frac{b}{\alpha} \pi \theta \right) C_2 \frac{\tau^3 (1-\tau^2)}{2\tau - (1-\tau^2) \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}} = \frac{3\alpha^2 (\alpha_0 - \alpha)}{2b^3} C_1 (1-\tau^2) \quad (2.16)$$

Следствием (2.16) является система уравнений

$$\frac{\alpha}{b} = \frac{\alpha_0}{b} + \pi \theta h \left(\tau; \frac{\alpha}{b} \right), \quad x_2^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^2 \left(\frac{\alpha_0}{b} - \frac{\alpha}{b} \right) C_1 (1-\tau^2), \quad (2.17)$$

где

$$h(\tau; \frac{a}{b}) = \frac{2}{3} \nu^2 \frac{C_2}{C_1} \frac{\tau^2}{2\tau - (1-\tau^2) \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}}$$

которая является непосредственным решением поставленной задачи, если принято во внимание, что для достаточно малых значений a/b отношение C_2/C_1 остается близким к единице (см. рис. 9).

На рис. 9 приведены зависимости C_1 , C_2 и a/C_2 от a/b , $0 \leq \frac{a}{b} \leq 0.2$. В качестве примера на рис. 10, 11 даны решения задачи при $a_0/b=0.2$, $\nu=1$ и различных значениях угла $\pi\theta_0$: по заданному значению α_2^2 из графика на рис. 10 находится отношение θ/θ_{max} , далее из графика на рис. 11 определяется соответствующее значение a/b и, следовательно, $\pi\theta_{max}$, после чего угол $\pi\theta$ становится известным. Полученное решение обладает теми же особенностями, что и решение в предыдущем пункте (см. рис. 7).

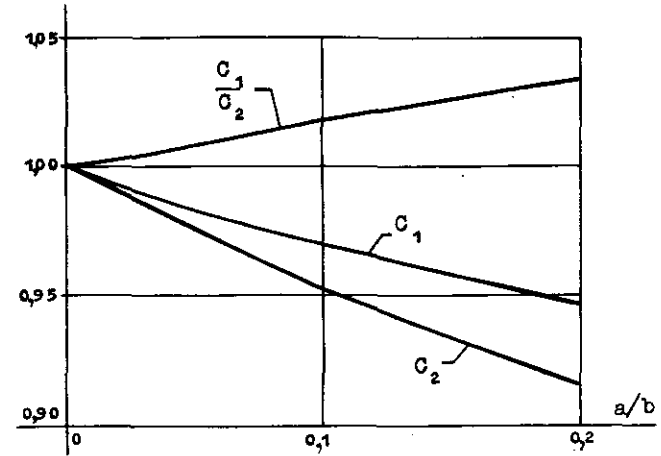


Рис. 9

§3. Задача о распластывании по поверхности диэлектрика первоначально изогнутой пластинки со свободным концом

1. Пусть в невозмущенном состоянии форма поверхности пластинки описывается функцией: $y_0(x) = \frac{1}{2R_0} x^2$. Если к пластинке и неподвижному электроду приложена достаточно малая разность потенциалов U , то вместо $y_0(x)$ будем иметь $y(x)$. (На рис. 12 неподвижный электрод — прямая $y = -\Delta$; $-\Delta < y < 0$ — слой диэлектрика.) Условие статического равновесия, из которого определяется $y(x)$, записывается следующим образом:

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} = - \frac{\epsilon_0 U^2}{2(\frac{\Delta}{\epsilon} + y)^2}, \quad (3.1)$$

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x=0; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{R_0}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \text{ при } x=L.$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость, Δ — толщина диэлектрика с диэлектрической постоянной ϵ . Краевая задача (3.1) описывает приближенно статическое равновесие пластинки в силу приближенности выражения электростатической нагрузки [8] и поэтому рассматривается как модельная.

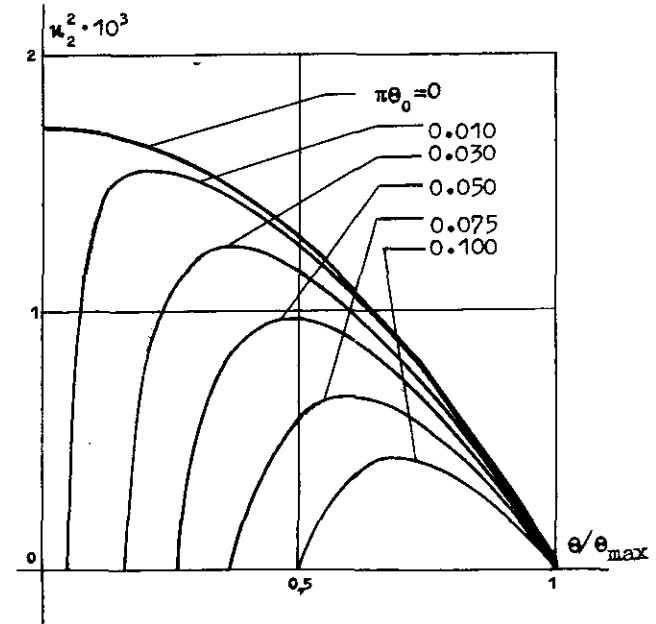


Рис. 10

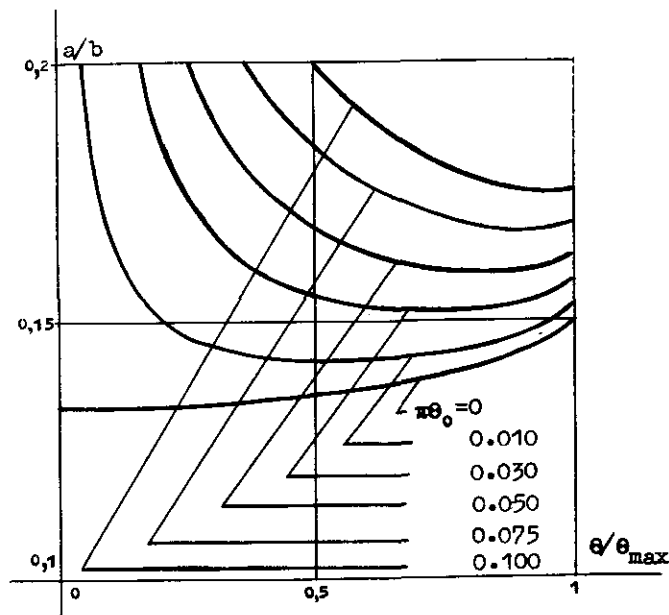


Рис. II

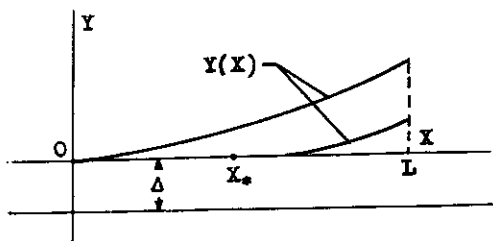


Рис. I2

Метод решения (3.1) будем связывать с преобразованием краевой задачи к нелинейному интегральному уравнению. Предварительно выполним переход к безразмерным переменным x и y .

$$X = \mathcal{L}x, \quad y = \frac{\Delta}{\varepsilon} y, \quad (3.2)$$

в которых (3.1) имеет вид:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\sigma f(y), \quad f(y) = \frac{1}{(1+y)^2}, \quad (3.3)$$

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x=0; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = m_0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \text{ при } x=1,$$

где

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon^3 \mathcal{L}^4}{2 \Delta^3 D} \mathcal{U}^2, \quad m_0 = \frac{\varepsilon \mathcal{L}^2}{\Delta R_0}. \quad (3.4)$$

Воспользовавшись выражением функции Грина $K(x, \theta)$, соответствующей (3.3),

$$K(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \theta x^2 - \frac{1}{6} x^3, & x < \theta; \\ \frac{1}{2} \theta^2 x - \frac{1}{6} \theta^3, & x > \theta, \end{cases}$$

получим следующее интегральное уравнение типа Гаммерштейна [9]:

$$y(x) = \frac{m_0}{2} x^2 - \sigma \int_0^1 K(x, \theta) f[y(\theta)] d\theta. \quad (3.5)$$

Заметим, что физический смысл имеет положительное решение: $y(x) > 0$, если $0 < x \leq 1$. Так как $m(x)$ — монотонно возрастающая функция,

$$m(x) = \frac{dy}{dx^2}(x) = m_0 - \sigma \int_0^1 (\theta - x) f[y(\theta)] d\theta, \quad \frac{dm}{dx}(x) = \sigma \int_x^1 f[y(\theta)] d\theta \geq 0,$$

то условие положительности $y(x)$ будет, очевидно, выполнено, если

$$m(0) = m_0 - \sigma \int_0^1 \theta f[y(\theta)] d\theta \geq 0.$$

Вместо σ будем задавать $m(0)$, $0 \leq m(0) \leq m_0$. Соответствующее значение σ определяется по формуле

$$\sigma = \frac{m_0 - m(0)}{\int_0^1 \theta f[y(\theta)] d\theta}, \quad (3.6)$$

где $y(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$y(x) = \frac{m_0}{2} x^2 - [m_0 - m(0)] \frac{\int_0^1 \kappa(x, \theta) f[y(\theta)] d\theta}{\int_0^1 \theta f[y(\theta)] d\theta}. \quad (3.7)$$

Для численного решения (3.7) можно предложить способ, который принципиально не отличается от рассмотренного в [10, II]. Разобьем интервал изменения x на n равных частей: $x_s = sh$, $h = \frac{1}{n}$, $s = 0, 1, \dots, n$. Заменяем в (3.6) и (3.7) $f(y)$ на кусочно-постоянную функцию $\hat{f}(y)$: $\hat{f} \equiv f_s$, где f_s — некоторое значение $f(y)$, если $y_s \leq y < y_{s+1}$, $y_s = y(x_s)$. В частности, $f_s = f(y_s)$ либо $f_s = f(y_{s+1})$. При этом из (3.6) и (3.7) получим систему n трансцендентных относительно y_i уравнений, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$y_i = \frac{h^2}{12} \left[6m_0 i^2 - \bar{\sigma} \left(\sum_{s=0}^{i-1} f_s A_{is} + \sum_{s=i}^{n-1} f_s B_{is} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Здесь
$$\bar{\sigma} = \frac{m_0 - m(0)}{\sum_{s=0}^{n-1} (2s+1) f_s}, \quad \sigma = \frac{2}{h^2} \bar{\sigma}, \quad (3.9)$$

$$A_{is} = 4i(3s^2 + 3s + 1) - (4s^3 + 6s^2 + 4s + 1), \quad B_{is} = 2i^2 [3(2s+1) - 2i]$$

Решение (3.8) строится при помощи метода последовательных приближений, причем начальное приближение имеет вид: $f_s \equiv 1$.

Начиная с некоторого значения u , происходит расслабление пластины по поверхности диэлектрика, что находит выражение в замене условия при $X=0$ в (3.1) на условие в точке X_* (рис.12):

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad X = X_*$$

При этом решение соответствующей краевой задачи сводится к (3.6) и (3.7) при $m(0)=0$, если связь между размерными и безразмерными величинами имеет вид:

$$\begin{aligned} X &= X_* + (L - X_*)x, \quad y = \frac{\Delta}{\varepsilon} Y, \\ \sigma &= \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon^3 L^4}{2 \Delta^3 D} u^2 \left(1 - \frac{X_*}{L}\right)^4, \\ m_0 &= \frac{\varepsilon L^2}{\Delta R_0} \left(1 - \frac{X_*}{L}\right), \\ 0 &< m_0 < \frac{\varepsilon L^2}{\Delta R_0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

На рис.13 представлены зависимости ξ и η от y_* :

$$\eta = \frac{\sqrt{\sigma}}{m_0} = R_0 u \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2 \Delta D}}, \quad \xi = \sqrt{m_0} = (L - X_*) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\Delta R_0}}, \quad y_* = \frac{\varepsilon}{\Delta} Y(L).$$

В качестве иллюстраций выделены решения (3.3) при $m_0 = 10, 15, 20, 25, 30$ и 35 , $y_* \leq 20$.

Поясним приведенные результаты на примере $m_0 = 25$ (на рис.13 — линия ABC). При $u=0$, $\eta=0$, $y_* = \frac{m_0}{2}$, $m(0)=m_0$. С ростом u (и, следовательно, η) y_* убывает вместе с $m(0)$ вдоль ABC. В точке B $X_*=0$, $m(0)=0$. Соответствующее этим условиям значение y_* определяется из равенства: $\xi(y_*) = \sqrt{m_0} = 5$, то есть равно 0.75. Дальнейшее движение вдоль ABC связано с расслаблением пластинки: $y(L) \rightarrow 0$, $X_* \rightarrow L$ при $u \rightarrow \infty$.

Сделаем замечание относительно построения приближенного решения (3.7) применительно к задаче о расслаблении пластинки. С учетом (3.3) и выражений 5-й и 6-й производных, полученных из (3.3), имеем следующие граничные условия:

$$y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0 = \frac{d^5y}{dx^5}(0) = \frac{d^6y}{dx^6}(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$y(1) = y_*, \quad \frac{d^3y}{dx^3}(1) = 0, \quad f(y_*) \frac{d^4y}{dx^4}(0) = f(0) \frac{d^4y}{dx^4}(1).$$

Таким образом, мы имеем возможность построить однозначно сплайн $S(x)$ 7-й степени дефекта I [12], удовлетворяющий (3.11) и принимающий значения y_i при $x = x_i$. Подставив в (3.7) $x = x_i$

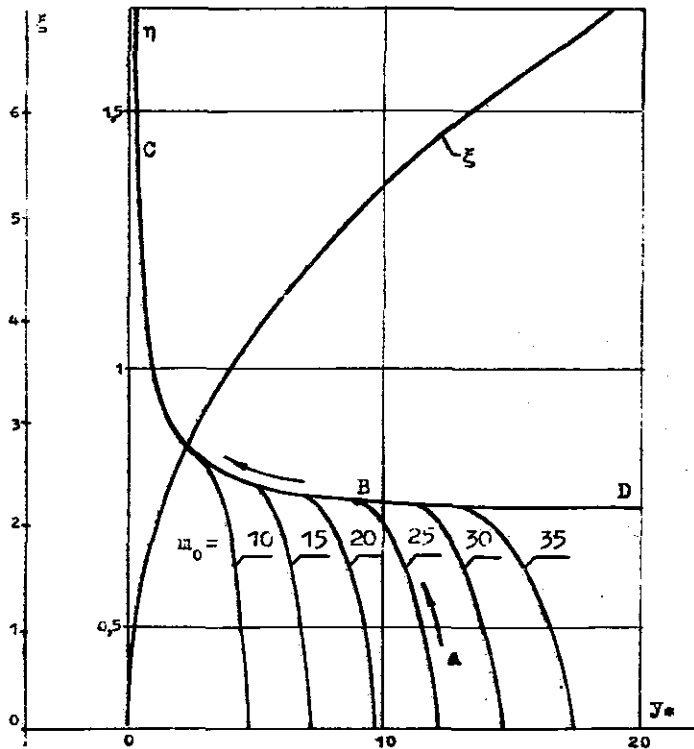


Рис. 13

и $S(\theta)$ вместо $y(\theta)$, получим систему трансцендентных уравнений относительно y_i , для решения которой применим метод последовательных приближений. Возрастающая сложность вычислений правых частей системы вполне компенсируется уменьшением ее размерности. Так, при $n = 3$ решение системы относительно y_1 и y_2 (y_3 задано) позволяет вычислить ξ и η , заключенные между решениями (3.8) при $n = 50$, соответствующими \hat{f} в виде: $f_s = f(y_s)$ и $f_s = f(y_{s,r})$.

2. Рассмотрим решение задачи о распластывании пластинки, если электростатическая нагрузка F , в отличие от (3.1), имеет вид:

$$F(y) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 E_k^2}{2}, & 0 < y \leq y_k = \frac{U}{E_k}, \\ \frac{\epsilon_0 U^2}{2y^2}, & y \geq y_k, \end{cases} \quad (3.12)$$

где E_k - заданная константа. Значения X_* и X_k , $y(X_k) = y_k$ заранее не известны и подлежат определению.

Соответствующая (3.12) краевая задача в безразмерных переменных запишется следующим образом:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -q, \quad q(y) = \begin{cases} q_k, & 0 \leq y \leq y_k = \sqrt{\frac{\sigma}{q_k}}, \\ \sigma \varphi(y) = \frac{\sigma}{y^2}, & y \geq y_k, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \text{ при } x=0; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 1, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \text{ при } x=1.$$

При этом использовались безразмерные комбинации размерных величин в виде:

$$x = \frac{X - X_*}{L - X_*}, \quad y = \frac{R_0}{(L - X_*)^2} y, \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 R_0^3 U^2}{2D(L - X_*)^2}, \quad (3.14)$$

$$x_k = \frac{X_k - X_*}{L - X_*}, \quad y = \frac{R_0}{(L - X_*)^2} y_k, \quad q_k = \frac{\epsilon_0 E_k^2 R_0}{2D} (L - X_*)^2.$$

Представим (3.13) в виде нелинейного интегрального уравнения:

$$x_k \leq x \leq 1,$$

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sigma \left\{ \frac{x_k^3}{24y_k^2} (4x - x_k) + \int_{x_k}^1 \kappa(x, \theta) \varphi[y(\theta)] d\theta \right\}, \quad (3.15)$$

где ядро $\kappa(x, \theta)$ определено в предыдущем пункте. Кроме того, потребовав в (3.15) выполнение условий: $y_k = y(x) = \sqrt{6q_k^2}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$, получим соотношение вида

$$y_k = \frac{x_k^3}{12} \frac{3x_k^2 + 4y_k^2 \int_{x_k}^1 \varphi[y(\theta)] d\theta}{x_k^2 + 2y_k^2 \int_{x_k}^1 \theta \varphi[y(\theta)] d\theta}, \quad (3.16)$$

$$\sigma = \frac{2y_k^2}{x_k^2 + 2y_k^2 \int_{x_k}^1 \theta \varphi[y(\theta)] d\theta}, \quad q_k = \frac{\sigma}{y_k^2}.$$

Отметим, что среди параметров σ , y_k и x_k , определяющих решение (3.15), (3.16), лишь один независим. В качестве такого параметра мы выберем x_k , $0 \leq x_k \leq 1$.

Используя интегральное представление, сведем решение краевой задачи к системе трансцендентных относительно y_i ($i=1, 2, \dots, n$) уравнений, аналогичной (3.8), (3.9):

$$y_i = \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{\sigma}{24} \left[\frac{x_0^3(4x_i - x_0)}{y_0^2} + h \left(\sum_{s=0}^{i-1} \varphi_s \bar{A}_{is} + \sum_{s=i}^{n-1} \varphi_s \bar{B}_{is} \right) \right], \quad (3.17)$$

$$\sigma = \frac{2y_0^2}{x_0^2 + h y_0^2 \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_s (2x_s + h)}, \quad q_k = \frac{\sigma}{y_0^2}, \quad (3.18)$$

$$y_0 = \frac{x_0^2}{12} \frac{3x_0 + 4h y_0^2 \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_s}{x_0^2 + h y_0^2 \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_s (2x_s + h)}, \quad (3.19)$$

$x_i = x_0 + ih$, $h = \frac{1-x_0}{n}$, $y_i = y(x_i)$, $x_0 = x_k$; φ_s имеет тот же смысл, что и f_s в (3.8); коэффициенты \bar{A}_{is} и \bar{B}_{is} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{A}_{is} &= 4x_i(3x_s^2 + 3hx_s + h^2) - (4x_s^3 + 6hx_s^2 + 4h^2x_s + h^3), \\ \bar{B}_{is} &= 2x_i^2 [3(2x_s + h) - 2x_i]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Решение (3.17) - (3.19) при фиксированном x_k ищется при помощи метода последовательных приближений, причем в качестве начальных берутся значения $\varphi_s \equiv 1$. Последовательность $y_0^{(k)}$, определяемая из (3.19) в ходе итераций, строится с использованием метода Вегштейна.

На рис.14 представлены зависимости ξ_1 , ξ_1^k и η_1 от τ ; $0 < \tau \leq 10$:

$$\xi_1 = \sqrt{q_k} = E_k \sqrt{\frac{\varepsilon_0 R_0}{2D}} (Z - X_*), \quad \xi_1^{(k)} = x_k \sqrt{q_k},$$

$$\eta_1 = \sqrt{\sigma q_k} = \frac{\varepsilon_0 E_k R_0^2}{2D} u, \quad \tau = y_k q_k = \frac{\varepsilon_0 E_k^2 R_0^2}{2D} y(Z).$$

Если заданы параметры Z , D , R_0 и E_k , то значение u , начиная с которого происходит расщепление пластинки, определяется из условия:

$$X_* = 0, \quad \sqrt{q_k} = Z E_k \sqrt{\frac{\varepsilon_0 R_0}{2D}}.$$

По известному ξ_1 находим из графиков другие величины: η_1 , ξ_1^k , τ и, следовательно, u , X_* , $y(Z)$ и y_k . Пусть, далее, u таково, что $X_* > 0$. Тогда по известному значению η_1 находим τ , ξ_1 , $\xi_1^{(k)}$ и, следовательно, $y(Z)$, X_* , X_k и y_k . При $\tau = 0.5$, $\eta_1 = 0.5$, $x_k = 1$, то есть дальнейшее увеличение u не влияет на форму пластинки.

3. Рассмотрим задачу о расплавлении пластинки в случае, когда электростатическая нагрузка описывается функцией \bar{F} [3]:

$$\bar{F}(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < y_c = \frac{U}{E_c}, \\ \frac{\epsilon_0 U^2}{2y^2}, & y \geq y_c. \end{cases} \quad (3.21)$$

При этом краевая задача преобразуется к функциональному уравнению вида (3.7):

$$x_c \leq x \leq 1, \quad y(x) = \frac{\frac{1}{2} x^2 - \int_{x_c}^1 K(x, \theta) \varphi[y(\theta)] d\theta}{\int_{x_c}^1 \theta \varphi[y(\theta)] d\theta}. \quad (3.22)$$

(Используемые здесь и далее обозначения совпадают с принятыми в предыдущем пункте.) Метод решения (3.22) аналогичен предложенному в пункте I. Приведем лишь выражение трансцендентных относительно y_i ($i = 0, 1, \dots, n$) уравнений:

$$y_i = \frac{1}{2} x_i^2 - \frac{\sigma h}{24} \left(\sum_{s=0}^{i-1} \varphi_s \bar{A}_{is} + \sum_{s=i}^{n-1} \varphi_s \bar{B}_{is} \right), \quad (3.23)$$

где

$$\sigma = \frac{2}{h \sum_{s=0}^{n-1} \varphi_s (2x_s + h)}$$

Результаты вычислений представлены на рис.15 в виде графиков функций ξ_2 , $\xi_2^{(k)}$ и η_2 от t :

$$\xi_2 = \frac{\sqrt{\sigma}}{y_c} = E_c \sqrt{\frac{\epsilon_0 R}{2D}} (L - X_*), \quad \xi_2^{(k)} = x_c \frac{\sqrt{\sigma}}{y_c},$$

$$\eta_2 = \frac{\sigma}{y_c} = \frac{\epsilon_0 R^2 E_c}{2D} U, \quad t = \frac{\sigma y_c}{y_c^2} = \frac{\epsilon_0 R^2 E_c^2}{2D} y(L)$$

В заключение отметим, что физической интерпретации результатов данного параграфа уделено достаточно внимания в [3].

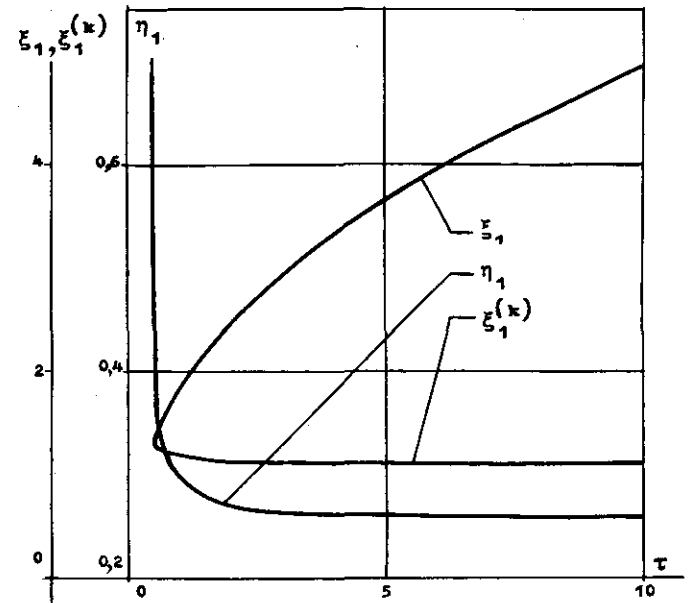


Рис. 14

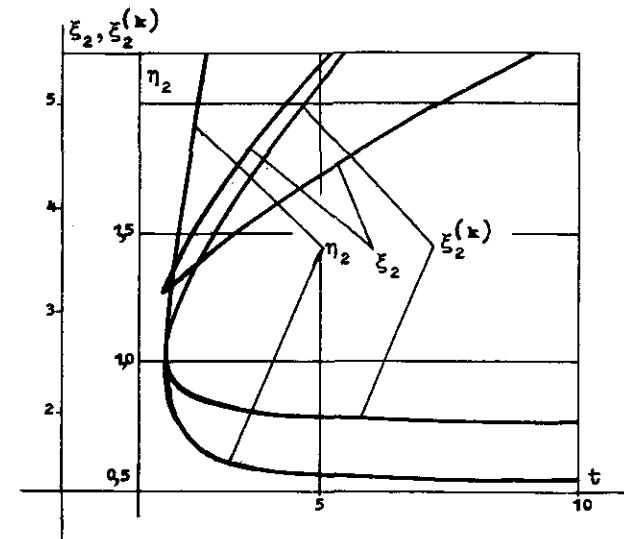


Рис. 15

Л и т е р а т у р а

1. ПРЕСТОН. Мембранный световой модулятор и его применение в оптических ЦВМ. - "Зарубежная радиоэлектроника", 1970, №10, с.112-116.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. ДЯТЛОВ В.Л., КОНЯШКИН В.В., ПОТАПОВ Б.С. Модели пленочных электростатических элементов и стабильности их характеристик. - Настоящий сборник, с. 3-20.
4. КОППЕНФЕЛЬС В., ШТАЛЬМАН Ф. Практика конформных отображений. М., ИЛ, 1963.
5. МИХЛИН С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
6. КАНТОРОВИЧ Л.В., КРЫЛОВ В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., Физматгиз, 1972.
7. ЛАНС Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962, с.171-175.
8. ДЯТЛОВ В.Л., СОЛДАТЕНКОВ И.С. Некоторые результаты исследования пленочных электростатических реле. - В кн.: Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам. Вып.5. Физико-технологические исследования. Новосибирск, 1968, с.159-176.
9. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.
10. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И., ШВЕДОВА К.В. Расчет статических параметров механической модели пленочного электростатического реле. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.40. Новосибирск, 1970, с.3-50.
11. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И. О численном решении краевой задачи, связанной с электростатическим притяжением мембраны. - Настоящий сборник, с. 61-90.
12. АЛБЕРТ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложение. М., Мир, 1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
3 декабря 1975 года