УДК 518.12

АППРОКСИМАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

А.Д. Тузов

При автоматизации проектирования летательных аппаратов важное место занимает вопрос описания их геометрических форм. Выходная информация для такой задачи,как правило, - плоские сечения. В работе рассматривается вопрос аппроксимации, интерполяции и вычерчивания плоских кривых с использованием теории сплайнов [1].

1. Аппроксимация аэродинамических профилей. Простейший математический сплайн непрерывен и имеет первую и вторую непрерывные производные.При аппроксимации аэродинамических профилей требуется описание двузначных функций (две ветви профиля) и получение бесконечной производной в "носке".

Для этих целей было введено параметрическое представление аппроксимируемой функции. Параметр - суммарная длина хорд,стягивающих базовые точки (x_j, y_j). После этого строились два кубических сплайна $x(t)$ и $y(t)$ с коэффициентами M_j и N_j соответственно (t - параметр, $j = 0,1,\dots,n$, n - число интервалов); M_j и N_j - вторые производные соответствующих сплайнов по параметру в точках (x_j , y_j). Для их определения дважды решалась система ($n-1$) линейных алгебраических уравнений с граничными условиями

$$M_0 = M_n = N_0 = N_n = 0. \qquad (1.1)$$

Так как матрица в этом случае трехдиагональная [I], то использовался эффективный метод факторизации (прогонки) [2].

Точка с вертикальной касательной ("носок") находилась из уравнения

$$\dot{x}(t) = 0. \qquad (I.2)$$

Для получения коэффициентов параметрического кубического сплайна и определения точки с вертикальной касательной используется написанная на языке АЛГОЛ-60 процедура КСПЛ (коэффициенты сплайна).

2. Интерполяция. Если известно некоторое интерполяционное значение аргумента $\bar{x}$, для которого требуется определить значение функции $\bar{y}$, тогда

$$\bar{x} = x(\bar{t}), \qquad (2.I)$$

где $\bar{t}$ – неизвестное значение параметра, соответствующего заданному $\bar{x}$. В таком случае соотношение (2.I) – кубическое уравнение относительно параметра с известными коэффициентами. Исследование показало, что уравнение (2.I) на интервале $[t_{j-1}, t_j]$, соответствующем интервалу $[x_{j-1}, x_j]$, которому принадлежит $\bar{x}$, имеет только один действительный корень $\bar{t}$ *). После его нахождения значение функции $\bar{y}$ определяется по следующей формуле [I]:

$$\bar{y} = N_{j-1}\frac{(t_j - \bar{t})^3}{6h_j} + N_j\frac{(\bar{t} - t_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{N_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{t_j - \bar{t}}{h_j} + \left(y_j - \frac{N_j h_j^2}{6}\right)\frac{\bar{t} - t_{j-1}}{h_j}, \qquad (2.2)$$

где $h_j = t_j - t_{j-1}$.

Для интерполяции используется процедура ТЧК (точка), позволяющая находить значения функции $\bar{y}$ и ее первую производную.

3. Вычерчивание кривых на чертежных автоматах. При вычерчивании кривых чаще всего используется линейная интерполяция. В связи с этим должна быть решена задача о таком разбиении аппроксимированной кривой, чтобы прямые, соединяющие точки разбиения, отклонялись от самой кривой на заданное ε (стрелка прогиба).

При точной математической постановке такая задача довольно трудоемкая: для получения одной точки разбиения необходимо решать два трансцендентных уравнения. Предлагается приближенный метод решения этой задачи.

Заменим в окрестности точки разбиения (x_i, y_i) кривую $y = f(x)$ дугой окружности радиуса, равного меньшему из радиусов кривизны кривой на концах отрезка $[t_{j-1}, t_j]$, которому принадлежит эта точка. В качестве шага по параметру Δt_i будем брать длину хорды, отстоящей от дуги окружности на ε. Эта длина легко определяется:

$$\Delta t_i = 2\sqrt{2\rho\varepsilon + \varepsilon^2}, \qquad (3.I)$$

где $\rho = \min(\rho_{j-1}, \rho_j)$, ρ_{j-1}, ρ_j – радиусы кривизн в точках $(x_{j-1}, y_{j-1}), (x_j, y_j)$.

Так как в качестве параметра берется суммарная длина хорд, то радиус кривизны в любой базовой точке приближенно вычисляется по формуле $\rho_j^{-1} = \sqrt{M_j^2 + N_j^2}$.

Для получения точек разбиения при линейной интерполяции, т.е. определения Δt_i, для вычерчивания кривой на чертежном автомате используется процедура ЧЕРТ (чертеж). Практическая работа показала, что аппроксимация кривых параметрическим сплайном – эффективный способ их описания. Методика успешно применяется для вычерчивания сечений при изготовлении плазов, для получения рабочих чертежей аэродинамических моделей (рис.I,2,3) и т.д.

Литература

I. АЛБЕРГ Дж., НИЛСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

2. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1973.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 июля 1975 года

*) Вообще говоря, интервалу $[x_{j-1}, x_j]$ может соответствовать несколько интервалов изменения параметра t. В таком случае следует предварительно осуществить выбор нужного нам интервала. (Прим. ред.)

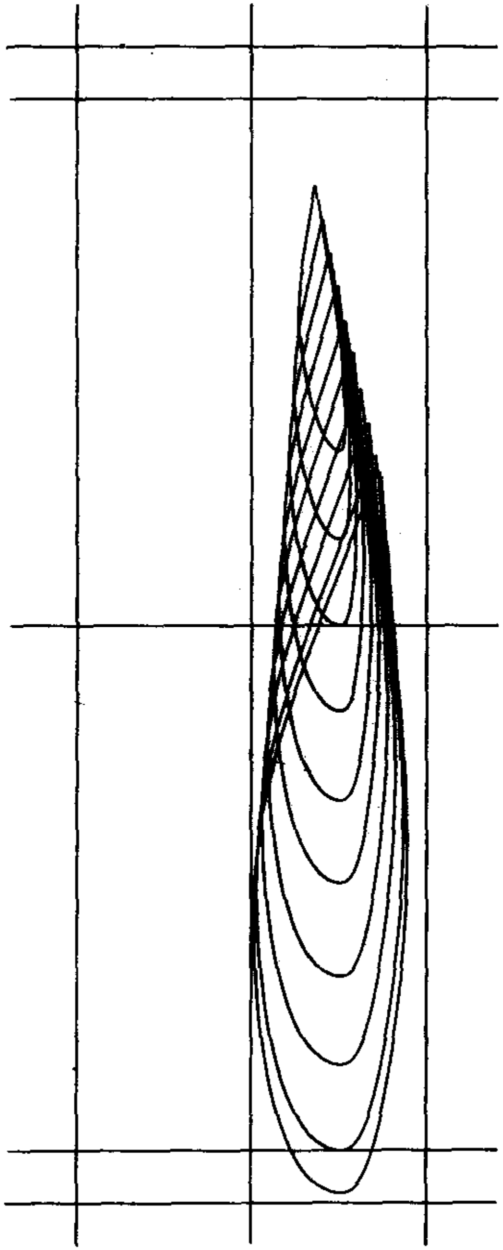

Рис. I. Масштабный план крыла

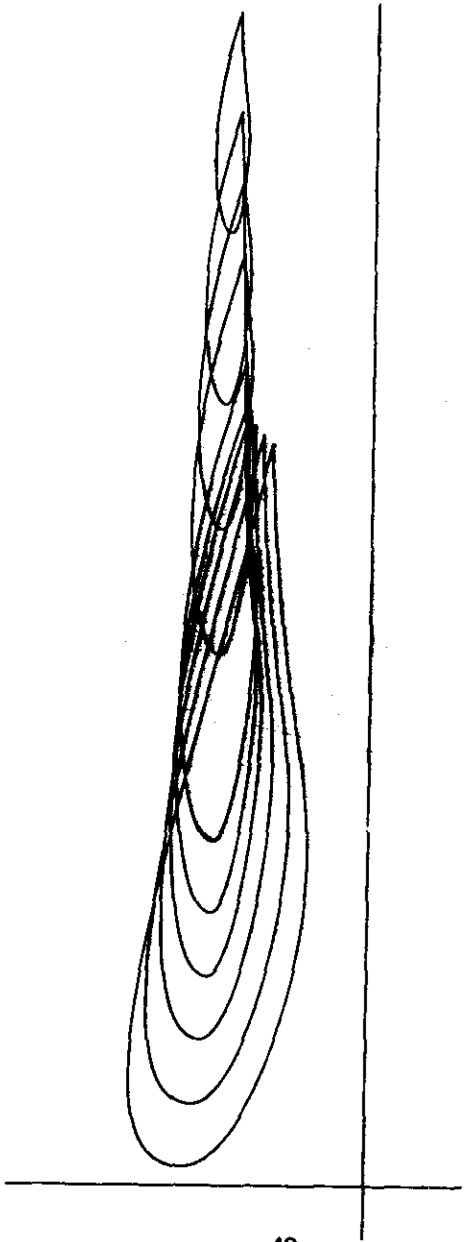

Рис. 2. Сечения деформированного крыла

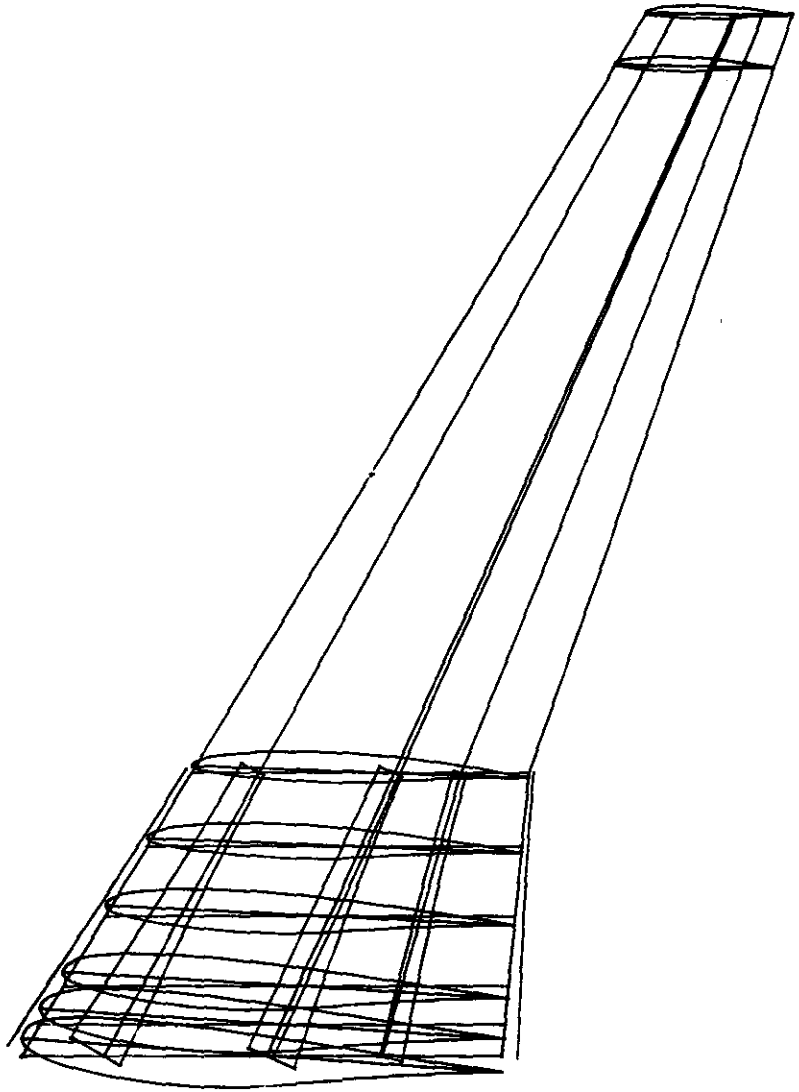

Рис.3. Рабочий чертеж модели