ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 70

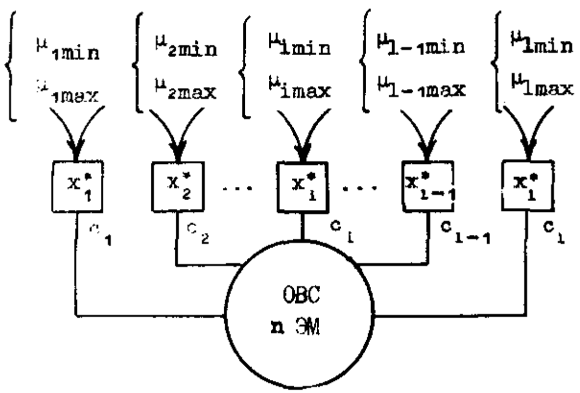
УДК 681.31:681.3.06

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАШИН СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ТЕРМИНАЛАМ

Э.Г. Хорошевская

Решается задача оптимального распределения машин сосредоточенной однородной вычислительной системы (ОВС) по терминалам в зависимости от спроса на подсистемы различных рангов*) и от стоимости пользования машинами с каждого терминала.

Имеется сосредоточенная ОВС коллективного пользования [1,2]. Система состоит из n элементарных машин (ЭМ) и обслуживает ℓ терминалов (см. рисунок). На каждый терминал поступает поток задач различных рангов**), который не может быть заранее точно определен. Однако всегда можно определить средний спрос на подсистемы различных рангов в зависимости от возможности задач перестраиваться на



*) Ранг подсистемы – число связанных машин, входящих в подсистему.
**) Ранг задачи – число ветвей ее в параллельной программе.

более низкий ранг. Поэтому считаем известными μ_{jmin} – средний спрос на терминале j при минимально требуемом ранге для решения задач потока; μ_{jmax} – средний спрос на терминале j при максимально требуемом ранге для решения задач потока; $j=1,2,\dots,\ell$. Стоимость пользования одной ЭМ с j-го терминала задана и равна c_j, $j=1,\dots,\ell$.

Пусть на j-й терминал поступает задача, для решения которой требуется подсистема ранга y_j, $y_{jmax} \geq y_j \geq y_{jmin}$, $j=1,\dots,\ell$. Считаем, что все y_j – независимые случайные величины, т.е. требования одного терминала не влияют на требования другого. Вероятность того, что на j-м терминале потребуется y_j ЭМ, обозначим соответственно предельным значениям рангов требуемых подсистем через $P_j(y_{jmax},\mu_{jmax})$ и $P_j(y_{jmin},\mu_{jmin})$, $j=1,\dots,\ell$. Обозначим через x_j ранг подсистемы, которая используется на пульте j.

Считаем, что избыточные ЭМ на j-м терминале простаивают, т.е. потери составляют $c_j(x_j-y_{jmax})$. Допустим также, что при необеспечении j-го терминала минимально необходимым числом ЭМ все выделенные этому терминалу ЭМ простаивают, т.е. потери составляют $c_j x_j + K\mu_{jmax}$, где $K\mu_{jmax}$ – штраф за нерешение задачи на j-м терминале (считаем, что штраф за нерешение задачи пропорционален ее сложности, K – коэффициент штрафа).

Средним числом недостающих ЭМ на j-м терминале будет

$$m_j(x_j,\mu_{jmin}) = \sum_{y_{jmin}=x_j}^{\infty} (y_{jmin}-x_j)\cdot P_j(y_{jmin},\mu_{jmin}), \qquad (1)$$

$$j=1,\dots,\ell.$$

Введем функцию

$$\varkappa_j(x_j,\mu_{jmin}) = \begin{cases} 1, & \text{если } m_j(x_j\mu_{jmin}) \geq 0{,}5, \\ 0, & \text{если } m_j(x_j,\mu_{jmin}) < 0{,}5, \end{cases}$$

тогда ожидаемые потери от недостатка ЭМ на j-м терминале составят величину

$$\varkappa_j(x_j,\mu_{jmin})\cdot(c_j x_j + K\mu_{jmax}), \quad j=1,\dots,\ell. \qquad (2)$$

Среднее число избыточных ЭМ на j-м терминале равно

$$\sum_{y_{jmax}=0}^{x_j} (x_j - y_{jmax}) \cdot p_j(y_{jmax}, \mu_{jmax}) =$$

$$= x_j - \mu_{jmax} + \sum_{y_{jmax}=x_j}^{\infty} (y_{jmax} - x_j) p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}).$$

Следовательно, ожидаемые потери от избытка ЭМ на j-м терминале составят величину

$$c_j (x_j - \mu_{jmax}) + c_j \sum_{y_{jmax}=x_j}^{\infty} (y_{jmax} - x_j) p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}), \quad (3)$$

$$j = 1, \ldots, \ell.$$

Задача минимизации потерь при распределении ЭМ по терминалам с учетом (I)-(2) примет вид: найти

$$\left. \begin{aligned} \min Z = \sum_{j=1}^{\ell} æ_j (x_j, \mu_{jmin}) \cdot (c_j x_j + K \mu_{jmax}) + \\ + \sum_{j=1}^{\ell} c_j (x_j - \mu_{jmax}) + \sum_{j=1}^{\ell} c_j \sum_{y_{jmax}=x_j}^{\infty} (y_{jmax} - x_j) p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

при условиях: x_j $(j=1, \ldots, \ell)$ – неотрицательные целые числа, $\sum_{j=1}^{\ell} x_j \le n$.

Будем предполагать, что спрос на подсистемы различных рангов подчинен пуассоновскому распределению. Выражения

$$p_j (y_{jmin}, \mu_{jmin}) = \frac{\mu_{jmin}^{y_{jmin}}}{y_{jmin}!} e^{-\mu_{jmin}}, \quad (5)$$

$$p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}) = \frac{\mu_{jmax}^{y_{jmax}}}{y_{jmax}!} e^{-\mu_{jmax}} \quad (6)$$

представляют собой плотности вероятностей случайных величин, подчиненных закону Пуассона. Из (6) следует, что

$$y_{jmax} p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}) = \mu_{jmax} p_j (y_{jmax} - 1, \mu_{jmax}), \ y_{jmax} \ge 1,$$

тогда

$$\sum_{y_{jmax}=x_j}^{\infty} (y_{jmax} - x_j) p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}) = \begin{cases} \mu_{jmax} P_j (x_j - 1, \mu_{jmax}) - \\ - x_j P_j (x_j, \mu_{jmax}) \text{ при } x_j \ge 1, \\ \mu_{jmax} \text{ при } x_j = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$P_j (x_j, \mu_{jmax}) = \sum_{y_{jmax}=x_j}^{\infty} p_j (y_{jmax}, \mu_{jmax}).$$

Подставляя (7) в (4) и (5) в (I), получаем в конечном счете следующую задачу: найти

$$\left. \begin{aligned} \min Z = \sum_{j=1}^{\ell} æ_j (x_j, \mu_{jmin}) \cdot (c_j x_j + K \mu_{jmax}) + \\ + \sum_{j=1}^{\ell} c_j (x_j - \mu_{jmax}) + \sum_{j=1}^{\ell} c_j [\mu_{jmax} P_j (x_j - 1, \mu_{jmax}) - \\ - x_j P_j (x_j, \mu_{jmax})], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

при условиях: x_j – целые числа, $x_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, \ell$, $\sum_{j=1}^{\ell} x_j \le n$.

Здесь

$$æ_j (x_j, \mu_{jmin}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_{jmin} P_j (x_j - 1, \mu_{jmin}) - x_j P_j (x_j, \mu_{jmin}) \ge 0{,}5, \\ 0, \text{ если } \mu_{jmin} P_j (x_j - 1, \mu_{jmin}) - x_j P_j (x_j, \mu_{jmin}) < 0{,}5. \end{cases}$$

Обозначим

$$f_j (x_j) = æ_j (x_j, \mu_{jmin}) (c_j x_j + K \mu_{jmax}) + c_j (x_j - \mu_{jmax}) + \\ + c_j [\mu_{jmax} P_j (x_j - 1, \mu_{jmax}) - x_j P_j (x_j, \mu_{jmax})].$$

Тогда задача (8) сведется к следующей: найти

$$\left. \begin{aligned} \min Z = \sum_{j=1}^{\ell} f_j (x_j), \\ \sum_{j=1}^{\ell} x_j \le n, \ x_j \ge 0, \ x_j, \ j = 1, \ldots, \ell \text{ – целые}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Это задача динамического программирования, для которой схема вычислительной процедуры, позволяющей найти все оптимальные решения x_j^*, $j=1,\ldots,\ell$, и соответствующие им значения целевых функций $\mathcal{Z}^*$, подробно изложена, например, в [2].

По сравнению с полным перебором, когда число различных комбинаций неотрицательных целых чисел, обращающих ограничение в строгое равенство, равное $\frac{(\ell+n-1)!}{n!(\ell-1)!}$, метод динамического программирования требует вычисления для $(n+1)\left(\ell+\frac{n\ell}{2}-n\right)$ различных комбинаций.

Т а б л и ц а

j	c_j	$\mu_{j\max}$	$\mu_{j\min}$	x_j^*		
				K=0,5	K=1	K=2
1	3	1,7	1,2			
2	2	3	1	1	1	1
3	2	3	2	3		3
4	1	3	1,5	2	2	2
5	2	3	3			
6	5	2,7	2,5			
7	4	1	1			
8	2	1,2	1			1
9	3	1,7	1,5			
10	7	2	2			
11	2	2	1	1	1	1
12	1	2	1,5	2	2	
13	3	1,5	1		1	1
14	5	2,5	1	1	1	1
15	2	2	1,7		2	

ПРИМЕР. Система имеет I0 ЭМ и обслуживает I5 терминалов. Значения c_j, $\mu_{j\min}$, $\mu_{j\max}$ даны в таблице. Здесь же приведены оптимальные решения x_j^*. Соответствующие минимальные ожидаемые потери $\mathcal{Z}^*$ составляют II, 3I; I9, 62 и 35, 85 для значений коэффициента штрафа K, равных 0,5; I и 2. Время счета по программе, приведенной в приложении, на машине БЭСМ-6 не более 0,I мин для одного варианта.

Таким образом, зная средний спрос на вычислительные ресурсы, а также стоимость пользования одной ЭМ с каждого терминала, всегда можно осуществить стохастически оптимальное распределение машин системы по терминалам за незначительное время.

Л и т е р а т у р а

I. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", I966.

2. ПАВСКИЙ В.А., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Организация функционирования однородных вычислительных систем и стохастическое программирование. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 63. Новосибирск, I975, с.3-I4.

3. ХЕДЛИ Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., "Мир", I967.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 января I977 года

ПРИЛОЖЕНИЕ

П р о г р а м м а

расчета оптимального распределения $\{x_1^*,\dots,x_j^*,\dots,x_\ell^*\}$ ЭМ по терминалам и соответствующих минимальных потерь Z^*.

Программа записана на языке АЛГОЛ.
Вводятся следующие исходные данные:
n - число ЭМ в сосредоточенной ОВС,
ℓ - число терминалов,
K - коэффициент штрафов,
c_j - стоимость эксплуатации одной ЭМ с терминала j, $j=1,2,\dots,\ell$,
$\mu_{j\,max}$, $j=1,\dots,\ell$, - средний спрос на j-м терминале при максимальном ранге.
$\mu_{j\,min}$, $j=1,\dots,\ell$, - средний спрос на j-м терминале при минимальном ранге.
На печать выдаются значения Z^*, x_j^*, $j=1,\dots,\ell$.

```
begin  integer n,l,x,r,j; real d,ro,Z,K;
       read (n,l,K);
begin  real array c,mi 1,mi 2[1:l], П1, П2 ,P1, P2, Λ1, Λ2, omega
       [0:n]; integer array m[1:l], ksi[0:n, 0:l-1]; read (c,mi 1,
       mi 2); j:= 1;
ПУАС:  P1[1]:= P1[0]:= P2[0]:= П1[1]:= П1[0]:= П2[0]:= 1; x:= 0;
       ro:= exp(-mi 1[j]); d:= exp(-mi 2[j]); P2[1]:= 1-ro;П2[1]:=
       1-d; for x:=1,...,n-1 do
begin  ro:= ro x mi 1[j]/x; d:= d x mi 2[j]/x; P1[x+1]:= P2[x];
       П1[x+1]:= П2[x];P2[x+1]:= P2[x] - ro; П2[x+1]:= П2[x] - d
end;
       if j> 1 then go to  ДИН; for r:= 0,...,n do ksi[r,0]:= r;
       ksi[0,j]:= 0; Λ1[0]:= c[j] x mi1[j]; if mi2[j]≥0.5 then
       Λ1[0]:=Λ1[0] + K x mi1[j]; for x:=1,...,n do
begin  Λ1[x]:= c[j] x x + c[j] x (mi1[j] x P1[x] - x x P2[x]);
       if(mi2[j] x П1[x] - x x П2[x])≥ 0.5 then Λ1[x]:= Λ1[x] +
       K x mi1[j] + c[j] x x; ksi[x,j]:= x; if Λ1[x]> Λ1[x-1]then
begin   Λ1[x]:= Λ1[x-1]; ksi[x,j]:= ksi[x-1,j]
end
end;
```



```
       j:= j+1; go to ПУАС;
ДИН:   for x:= 0,...,n do
begin  omega[x]:= c[j] x x + c[j] x (mi1[j] x P1[x] - x x P2[x]);
       if (mi2[j] x П1[x] - x x П2[x]≥ 0.5 then omega[x]:= omega
       [x] + c[j] x x + K x mi1[j]
end;   if j=l then go to КОН; Λ2[0]:= omega[0] + Λ1[0]; ksi[0,j]:=
       0; for r:= 1,...,n do
begin   Λ2[r]:= omega[0] + Λ1[r];  ksi[r,j]:= 0; for x:= 1,...,r
       do
begin  ro:= omega[x]+ Λ1[r-x]; if ro< Λ2[r] then
begin   Λ2[r]:= ro; ksi[r,j]:= x
end
end
end;
       for x:= 0,...,n do Λ1[x]:=  Λ2[x]; j:=j+1; if j≤l then go
       to ПУАС;
КОН:   Z:= omega[0] + Λ1[n]; m[l]:= 0; for x:= 1,...,n do
begin  ro:= omega[x] + Λ1[n-x]; if ro < Z then
begin  Z:= ro; m[l]:= x
end
end;
       x:= m[l]; for r:= 1,...,l=1 do
begin  m[l-r]:= ksi[n-x, l-r]; x:= x+m[l-r]
end;
       for j:= 1,...,l do Z:= Z-mi1[j] x c[j];
       print (Z,m)
end
end
```