ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
1977 год (Вычислительные системы) Выпуск 70

УДК 681.142.2:621.019.3

ЗАГРУЗКА ОДНОРОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОТОКОМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

В.Г.Кербель

Однородные вычислительные системы (ОВС) [1] представляют собой совокупность одинаковых и регулярно соединенных между собой элементарных машин (ЭМ) [2]. Решаемые на ОВС задачи представляются параллельными (р-) программами [1,3]. Р-программа - это совокупность взаимодействующих ветвей (последовательных программ), которые выполняются одновременно на R различных ЭМ, образующих подсистему; R называется рангом р-программы (подсистемы).

Представляет интерес исследование организации загрузки ОВС случайным потоком р-программ. Указанная задача возникает при разработке программного обеспечения ОВС МИНИМАКС [4], предназначенной для работы в режиме коллективного пользования. При наличии внешней памяти на магнитных дисках или лентах есть смысл организовать очередь р-программ ранга R, для которых в момент их поступления в ОВС число свободных ЭМ меньше R. Каждая ветвь такой р-программы записывается в отдельный файл, таким образом, р-программа ранга R занимает на внешней памяти R файлов, а при загрузке ее в ОВС эти файлы освобождаются одновременно. Число занятых файлов на внешней памяти определяет длину очереди.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. В ОВС из N элементарных машин и с (потенциально) бесконечной внешней памятью поступает пуассоновский поток р-программ с интенсивностью α. Вероятность поступления р-программы ранга n есть a_n ($\sum_{n=1}^{R} a_n = 1, a_n > 0$; R - максимальный ранг поступающих р-программ). Время обслуживания р-программ подчинено экспоненциальному закону с параметром β. Предполагается, что в ОВС могут одновременно существовать подсистемы всех рангов от 1 до R, т. е. ($N \geq R(R+1)/2$). Выделим в ОВС множество из $K \in E$ ($E = \{0, 1, \ldots, N\}$) ЭМ и разобьем его на подсистемы. Число подсистем ранга n, образованных в момент t указанным разбиением, обозначим через $\ell_{K,n}(t)$, $\ell'_{S,n}(t)$ - число р-программ ранга n, находящихся в очереди длиной S в момент t. Введем случайный процесс $\Omega(t) = \{\ell_{K,n}(t), \ell'_{S,n}(t) \mid K \in E, n = \overline{1,R}, S = \overline{0,\infty}\}$. В силу предположения относительно законов распределения он будет марковским. Пусть $P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R}(t)$ - вероятность того, что в момент t $K_1 (\sum_{n=1}^{R} n \cdot \ell_{K_1,n}(t))$ ЭМ занято обслуживанием р-программ и в очереди занято $K - K_1 (\sum_{n=1}^{R} \ell'_{K-K_1,n}(t))$ мест (в системе K ветвей).

Требуется вычислить P_K - вероятность того, что в ОВС находится ровно K ветвей, $N_{cp} = \sum_{K=1}^{N} K \cdot P_K + N \sum_{S=1}^{\infty} P_{N+S}$ - среднее число занятых ЭМ, $K_з(N) = N_{cp}/N$ - коэффициент занятости ОВС, где

$$P_K = \sum P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R} = \sum \lim_{t \to \infty} P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R}(t)$$

(суммирование ведется по всем возможным разбиениям K ЭМ на подсистемы) в предположении, что выполняется условие нормировки:

$$\sum_{K=0}^{\infty} P_K = 1. \tag{I}$$

Случайный процесс эргодичен [5]. Чтобы значения P_K были отличны от нуля, необходимо, чтобы $N\beta > \alpha \sum_{n=1}^{R} n \cdot a_n$. Отсюда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \rho < N \Big/ \sum_{n=1}^{R} n \cdot a_n.$$

Перейдем к нахождению P_K. В силу того, что $K < N$ элементарных машин ОВС могут занять р-программы различных рангов, например, одна задача ранга K или K задач ранга один и т.д., нам необходимо найти вероятности занятости этих K ЭМ конкретным набором р-программ $P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R}$, при котором имеется ℓ_1 р-программ ранга один,

ℓ_2 – ранга два и, вообще, ℓ_R р-программ ранга R, причем $\sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n = K$. Пусть $N_{K,R}$ – число способов, которыми можно разбить K ЭМ р-программами, максимальный ранг которых равен R. Тогда, суммируя $N_{K,R}$ раз $P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R}$, мы получим нужное нам значение P_K.

Значение $N_{K,R}$ находится по рекуррентной формуле

$$N_{K,R} = \sum_{j=1}^{R}\sum_{i=1}^{j} N_{K-j,i} \qquad (2)$$

при следующих начальных условиях:

$$N_{K,1}=1;\quad N_{K,K}=1;\quad N_{K,j}=0,\ K<j. \qquad (3)$$

В самом деле, если $N_{K,j}$ – число способов, которыми можно разбить $K\in E$ ЭМ р-программами с максимальным рангом $j=\overline{1,R}$, причем подсистема ранга j, образованная р-программой этого же ранга, обязательно входит (по крайней мере один раз) в это разбиение, то ясно, что $N_{K,K}=1$, т.е. K ЭМ можно занять только одной подсистемой ранга K; $N_{K,1}=1$, т.е. имеется K подсистем ранга один и $N_{K,j}=0$ при $K<j$, так как нет способа образования подсистемы ранга j.

Выделим в ОВС подсистему ранга j. Ясно, что остальные $K-j$ ЭМ можно $N_{K-j,i}$ способами занять подсистемами ранга $i=\overline{1,j}$. Суммируя $N_{K-j,i}$ по i, мы определяем число способов, которыми можно занять K ЭМ, если максимально возможный ранг подсистемы равен j, т.е. $N_{K,j}=\sum_{i=1}^{j}N_{K-j,i}$. При загрузке системы значение максимального ранга изменяется от I до R. Поэтому, суммируя $N_{K,j}$ по индексу j, мы и определяем число возможных способов, которыми можно занять $K\in E$ ЭМ ОВС подсистемами рангов $\overline{1,R}$, т.е. $N_{K,R}=\sum_{j=1}^{R}N_{K,j}=\sum_{j=1}^{R}\sum_{i=1}^{j}N_{K-j,i}$, что и требовалось доказать.

Приведем более удобную (для практических расчетов) формулу для нахождения P_K. Для этого рассмотрим разбиение $K\in E$ элементарных машин ОВС на подсистемы, при котором имеется ℓ_j подсистем ранга j, $j=\overline{1,R}$ и $\sum_{j=1}^{R} j\cdot\ell_j = K$. Из последнего ясно, что для всех j имеем $\ell_j=\overline{0,m_j}$, где $m_j=[K/j]$. По аналогии с тем, как мы выводили рекуррентную формулу для нахождения $N_{K,R}$, определим возможные значения для ℓ_j, $j=\overline{1,R}$. Зафиксируем подсистему ранга R. Число таких подсистем $\ell_R=\overline{0,m_R}$. В зависимости от того, сколько ЭМ мы отвели для подсистем ранга R, т.е. какое выбрано ℓ_R, мы

можем определить более точно максимальное значение ℓ_{R-1}, а именно $\ell_{R-1}=\overline{0,f(R-1,K)}$, где $f(R-1,K)=[(K-R\cdot\ell_R)/(R-1)]$. Зная ℓ_R и ℓ_{R-1}, можно определять $f(R-2,K)$ и т.д., а ℓ_1 определяется из условия согласования $\sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n=K$, т.е.

$$\ell_1 = K-\sum_{n=2}^{R} n\cdot\ell_n = K-\sum_{n=2}^{R} n\cdot f(n,K) = f(1,K).$$

В итоге получаем, что

$$P_K=\sum_{\ell_R=0}^{f(R,K)}\ \sum_{\ell_{R-1}=0}^{f(R-1,K)}\dots\sum_{\ell_2=0}^{f(2,K)}\ \sum_{\ell_1=0}^{f(1,K)}P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R}, \qquad (4)$$

где

$$f(n,K)=\left[\frac{K-\sum_{i=n+1}^{R} i\cdot\ell_i}{n}\right] \quad \text{для}\ n=\overline{1,R}.$$

Вероятности $P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R,\ell'_1,\dots,\ell'_R}$ того, что в ОВС ровно K ветвей при определенном разбиении ℓ_n, ℓ'_n $(n=\overline{1,R})$, находятся как решение системы линейных уравнений, составленной методами теории массового обслуживания. Найдем вероятность занятости K ЭМ ОВС в момент времени $t+\Delta t$. Эта вероятность находится как сумма вероятностей трех несовместных событий:

– в момент t K ЭМ заняты разбиением ℓ_n, и за время Δt не пришло ни одной р-программы, и ни одна подсистема не закончила обслуживание;

– в момент t занято $K-n$ ЭМ, но за время Δt поступила р-программа ранга n; $n=\overline{1,R}$;

– в момент t занято $K+n$ ЭМ, но за время Δt закончилось обслуживание р-программы ранга n; $n=\overline{1,R}$.

Вероятность первого из указанных событий равна:

$$P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R,\ell'_1,\dots,\ell'_R}(t)\cdot(1-\beta\Delta t)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot(1-\beta\Delta t)^{\ell_R}\cdot(1-\alpha\Delta t)+o(\Delta t)=$$

$$=P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R,\ell'_1,\dots,\ell'_R}(t)\cdot(1-\Delta t(\alpha+\beta(\ell_1+\ldots+\ell_R)))+o(\Delta t).$$

Вероятность второго события

$$\sum_{n=1}^{R} P_{K-n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n-\delta_n,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n-\sigma_n,\ldots,\ell'_R}(t)\cdot(\alpha\Delta t)\cdot\Delta_n\cdot b_n+o(\Delta t),$$

где $b_n = sign(\ell_n+\ell'_n)$; $\sigma_n = sign\,\ell'_n$; $\delta_n = 1-\sigma_n$.

Вероятность третьего события

$$\sum_{n=1}^{R} P_{K+n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n+\Delta_n,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n+\Delta'_n,\ldots,\ell'_R}(t)\cdot\left(C^1_{\ell_n+\Delta_n}\right)\beta\Delta t+o(\Delta t),$$

где

$$\Delta_n = \begin{cases} \text{I, если } K-\sum_{j=1}^{R} j\cdot\ell_j \geq n, \\ 0 - \text{в противном случае; } \Delta'_n = 1-\Delta_n. \end{cases}$$

Если $K \leq N$, то все $\ell'_n = 0$ и употребляется запись $P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R}$, т.е. ℓ'_n опускаются.

Складывая эти вероятности, находим:

$$\frac{P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R}(t+\Delta t)-P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R}(t)}{\Delta t} =$$

$$= -(\alpha+\beta\sum_{n=1}^{R}\ell_n)P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R}(t) +$$

$$+\alpha\sum_{n=1}^{R} b_n\,\alpha_n\,P_{K-n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n-\delta_n,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n-\sigma_n,\ldots,\ell'_R}(t)+$$

$$+\beta\sum_{n=1}^{R}(\ell_n+\Delta_n)P_{K+n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n+\Delta_n,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n+\Delta'_n,\ldots,\ell'_R}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, а затем при $t\to\infty$, получаем, что всевозможные состояния ОВС запишутся системой линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha P_0^0 = \beta\sum_{n=1}^{R} P_n^n$$

для $K \leq N$, $K = \sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n$

$$\left.\begin{aligned}
&(\beta\cdot\sum_{n=1}^{R}\ell_n+\alpha)P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R} = \alpha\sum_{n=1}^{R} b_n\,\alpha_n\,P_{K-n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n-\delta_n,\ldots,\ell_R}+\\
&\qquad+\beta\sum_{n=1}^{R}(\ell_n+\Delta_n)P_{K+n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n+\Delta_n,\ldots,\ell_R,\Delta'_n}\\
&\text{для } K>N,\ \sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n = N,\ \sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell'_n = K-N-\\
&\quad-(\beta\sum_{n=1}^{R}\ell_n+\alpha)P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R} =\\
&\quad=\alpha\sum_{n=1}^{R} b_n\alpha_n P_{K-n}^{\ell_1,\ldots,\ell_n-\delta_n,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n-\sigma_n,\ldots,\ell'_R}+\\
&\quad+\beta\sum_{n=1}^{R}\ell_n P_{K+n}^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_n+1,\ldots,\ell'_R},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

где P_0^0 – вероятность того, что все ЭМ свободны; P_n^n – вероятность занятости n ЭМ одной подсистемой ранга n; $b_n = sign(\ell_n+\ell'_n)$; $\sigma_n = sign\,\ell'_n$; $\delta_n = 1-\sigma_n$, $\Delta_n = 1$, если $K-\sum_{j=1}^{R} j\cdot\ell_j \geq n$, в противном случае $\Delta_n = 0$; $\Delta'_n = \text{I}-\Delta_n$. Для $K\leq N$ решение (5) запишется в виде:

$$P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R} = P_0^0\,(\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(\alpha_i^{\ell_i}))/(\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)),\qquad(6)$$

где $\rho = \alpha/\beta$, $\sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n = K \leq N$.

Для $K>N$

$$P_K^{\ell_1,\ldots,\ell_R,\ell'_1,\ldots,\ell'_R} = \frac{\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(\alpha_i^{\ell_i})}{\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)}\cdot\frac{\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell'_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(\alpha_i^{\ell'_i})}{\prod_{i=1}^{R}(\ell_i^{\ell'_i})}\cdot P_0^0 = d_K\cdot P_0^0.\qquad(7)$$

Используя нормирующее условие (I), находим P_0^0:

$$P_0^0=\left(\sum_{K=0}^{N} P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R}+\sum_{S=1}^{\infty} P_{N+S}^{\ell_1,\dots,\ell_R,\ell_1',\dots,\ell_R'}\right)^{-1}=$$

$$=\Bigg(1+\sum_{K=1}^{N}\sum_{\ell_R=0}^{f(R,K)}\dots\sum_{\ell_2=0}^{f(2,K)}\sum_{\ell_1=f(1,K)}^{f(1,K)}\left(\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(a_i^{\ell_i})\right)\Big/\left(\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)\right)+$$

$$+\sum_{S=1}^{\infty}\sum_{\ell_R=0}^{f(R,N)}\dots\sum_{\ell_1=f(1,N)}^{f(1,N)}\sum_{\ell_R'=0}^{f(R,S)}\dots\sum_{\ell_1'=f(1,S)}^{f(1,S)}\frac{\rho^{\sum_{i=1}^{R}(\ell_i+\ell_i')}\cdot\prod_{i=1}^{R}\left(a_i^{\ell_i+\ell_i'}\right)}{\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!\cdot\ell_i'^{\ell_i'})}\Bigg)^{-1}. \quad (8)$$

Из (8) ясно, что для вычисления значения P_0^0 необходимо реализовать $2(R-1)$ вложенных циклов, а для нахождения второго слагаемого не приходится суммировать до бесконечности, так как для $S>2R^2$ и $N=1,5\sum_{n=1}^{R} n\cdot a_n$ значение суммы хвоста ряда $\sum_{K=S}^{\infty} d_K$ имеет порядок 10^{-4}.

На рис.I представлены зависимости между значением коэффициентов при P_K и K для различных значений $\rho, \rho=\overline{1,4}$.

Некоторый рост коэффициентов при $K>N$ вполне объясним. Например, для случая $a_n = 0{,}25$ ($n=\overline{1,4}$) вероятность того, что в очереди одна ветвь, должна быть меньше вероятности двух ветвей, так как одно место можно занять единственным образом, а два – двумя, три – тремя, четыре – пятью способами и т.д. в соответствии с (2). Рост P_K/P_0^0 должен наблюдаться, по аналогии с $K\leqslant N$, до $S=\overline{7,10}$, а затем P_K/P_0^0 убывает с увеличением K.

Значение $\sum_{K=N+m}^{\infty} P_K$ определяет $P(S\geqslant m)$ – вероятность того, что число мест в очереди превышает m. Для $m=2R^2$ $P(S\geqslant m)\approx 10^{-4}$, т.е. с вероятностью $1-10^{-4}$ длина очереди не превысит $2R^2$. В примере $R=4$, и, следовательно, на диске с вероятностью $1-10^{-4}$ число занятых файлов не превысит 32 при условии, что обслуживание ведет I5 ЭМ ($\rho=4$).

Рассмотрим два частных случая решенной задачи, представляющих практический интерес. Первый из них – когда отсутствие носителя на внешней памяти компенсируется большим числом ЭМ ($N\to\infty$). Для $N\to\infty$ решение получим в виде:

$$P_K^{\ell_1,\dots,\ell_R}=P_0^0\cdot\left(\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(a_i^{\ell_i})\right)\Big/\left(\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)\right)=C_K\cdot P_0^0,$$

где $\rho=\alpha/\beta$, $\sum_{n=1}^{R} n\cdot\ell_n=K$.

Учитывая условие нормировки $\sum_{K=0}^{\infty} P_K=1$ и используя (4) и (6), находим P_0^0:

$$P_0^0=\left(1+\sum_{K=1}^{\infty}\sum_{\ell_R=0}^{f(R,K)}\dots\sum_{\ell_2=0}^{f(2,K)}\sum_{\ell_1=f(1,K)}^{f(1,K)}\frac{\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(a_i^{\ell_i})}{\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)}\right)^{-1}.$$

При проведении практических расчетов суммировать до бесконечности не приходится, так как значение P_K уже для $K=(R+1)^2$ и $\rho=3$ меньше 10^{-4} и убывает с возрастанием K. Остаточный член ряда $\sum C_K$ для $K>(R+1)^2$ равен $2\cdot10^{-4}$. На рис.2 изображены зависимости между коэффициентом при P_K для различных K. Алгоритм расчетов по описанным формулам дан в приложении.

Второй случай – обслуживание с отказами ($N<\infty$, $S=0$).

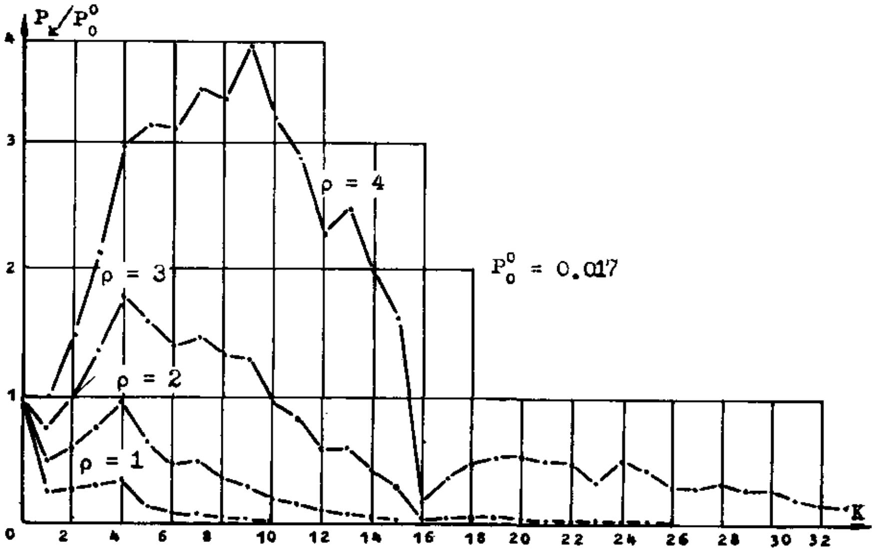
Напомним, что $S=0$ означает, что p-программа ранга n получает отказ в обслуживании (теряется), если к моменту ее поступления в ОВС число свободных ЭМ меньше n.

Аналогично предыдущей задаче решение запишется в виде (6). Учитывая условие нормировки (I), находим P_0^0:

$$P_0^0=\left(1+\sum_{K=1}^{N}\sum_{\ell_R=0}^{f(R,K)}\dots\sum_{\ell_2=0}^{f(2,K)}\sum_{\ell_1=f(1,K)}^{f(1,K)}\frac{\rho^{\sum_{i=1}^{R}\ell_i}\cdot\prod_{i=1}^{R}(a_i^{\ell_i})}{\prod_{i=1}^{R}(\ell_i!)}\right)^{-1}. \quad (9)$$

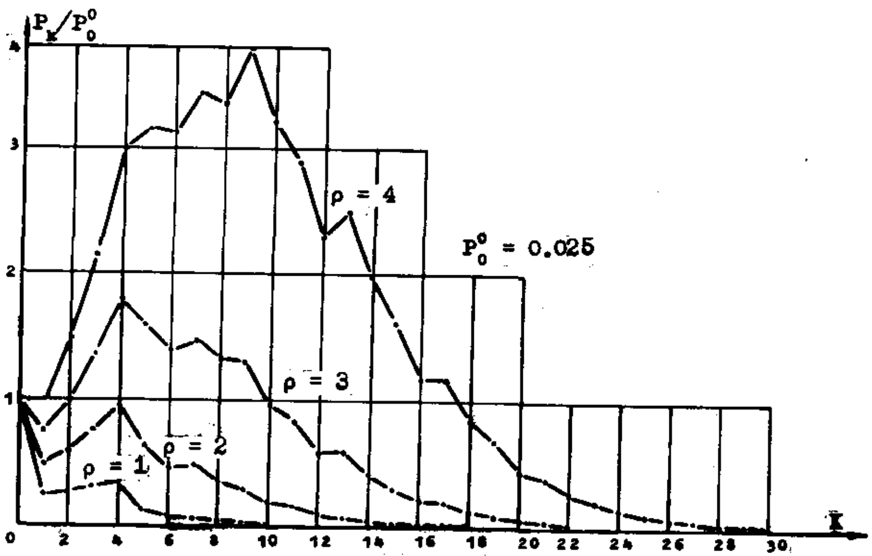
При обслуживании с отказами можно определить вероятность отказа $P_{отк}$ требованию в обслуживании:

$$P_{отк}=1-\left(\sum_{K=1}^{N} K\cdot P_K\right)\Big/\left(\rho\cdot\sum_{n=1}^{R} n\cdot a_n\right)=1-\frac{N_{ср}}{\rho\sum_{n=1}^{R} n\cdot a_n}. \quad (10)$$



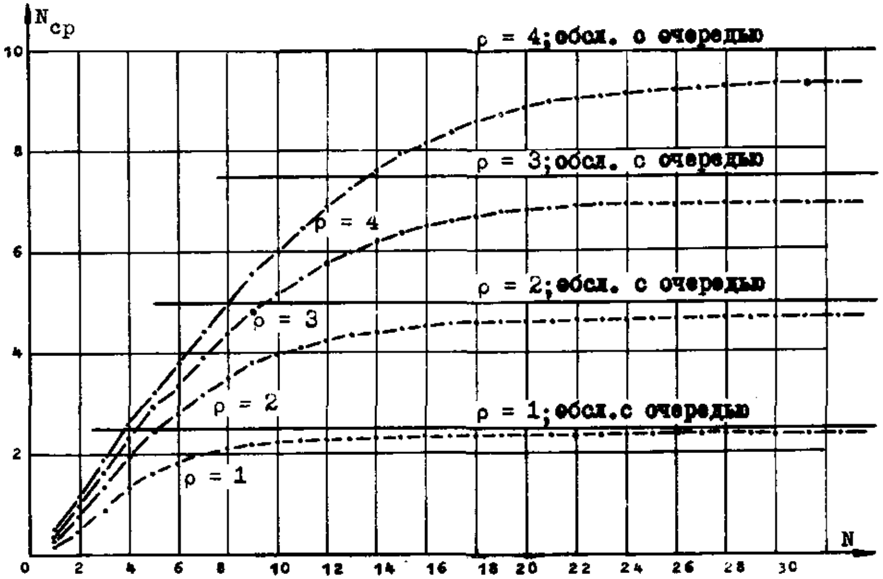
$a_n = 0.25$, $n = \overline{1,4}$

Рис. I



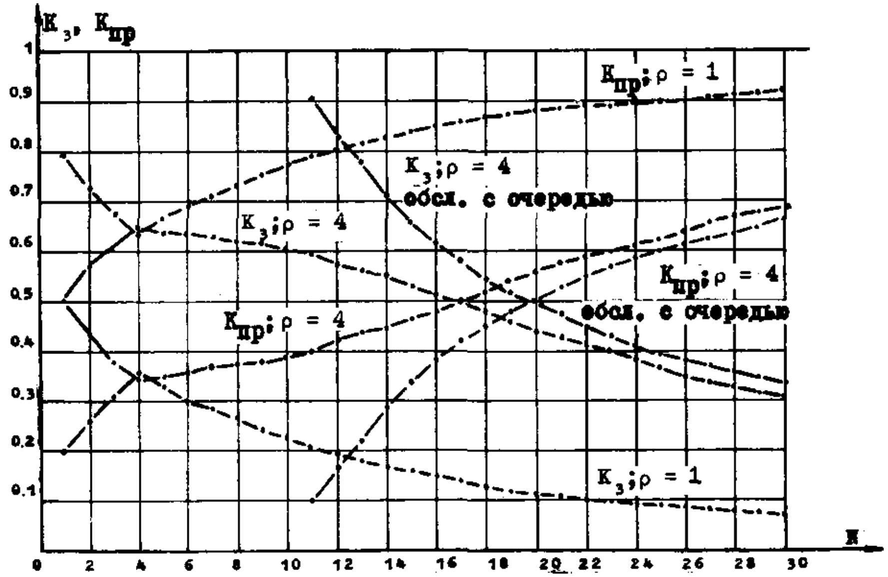
$a_n = 0.25$, $n = \overline{1,4}$

Рис. 2



$a_n = 0.25$; $n = \overline{1,4}$

Рис. 3



$a_n = 0.25$; $n = \overline{1,4}$

Рис. 4

Для равновероятного случая ($\alpha_n = 1/R$, $n = \overline{1,R}$)

$$P_{отк} = 1-(2\mathcal{N}_{cp})/(\rho(R+1)). \qquad \text{(II)}$$

Определив из (IO) $P_{отк}$, можно назначить такое число $\mathcal{N}$ ЭМ для об - служивания потока, чтобы $P_{отк}$ не превосходила некоторой пороговой величины P^*.

На рис.3 показана зависимость между средним числом $\mathcal{N}_{cp}$ занятых ЭМ и общим числом $\mathcal{N}$ машин в ОВС.

Предположим, необходимо определить число $\mathcal{N}$ ЭМ для обслужи - вания равновероятного потока (α_n = 0,25, $n = \overline{1,4}$; ρ = 4), чтобы вероятность отказа в обслуживании р-программ не превосходила P^* = = 0,I, т.е. $P_{отк} \leqslant P^*$. Тогда из (II) определяем $\mathcal{N}_{cp} \geqslant \rho(1-P^*)(R+1)/2$. Подставляя значения P^*, ρ и R, получаем $\mathcal{N}_{cp} \geqslant$ IO (I-0.I) = 9. Из рис.3 находим необходимое значение $\mathcal{N} \geqslant$ 2I.

Значения коэффициентов занятости ($K_з$) и простоя ($K_{пр}$) опре - деляются из рис.4, где приведены графики этих коэффициентов для различных режимов обслуживания потока. В частности, $K_з$(2I) – коэффициент занятости $\mathcal{N}$ = 2I ЭМ при S = 0 равен 0,43, для $\mathcal{N}$ = I5 – $K_з$(I5) = 0,53. Если $S \neq 0$, то из рис. 4 можно определить $K_з$(I5) при обслуживании с очередью. В последнем случае $K_з$(I5) = 0,66.

Для $\mathcal{N} \to \infty$ из рис.2 определяется $P(\mathcal{N} \geqslant m) = \sum_{K=m}^{\infty} P_K$ – вероятность того, что в ОВС будет занято больше m ЭМ. Для m = 20 имеем $P(\mathcal{N} \geqslant 20) \approx 0{,}11$ ($\rho = 4$).

Литература

1. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.

2. КЕРБЕЛЬ В.Г., МИРЕНКОВ Н.Н. и др. Управляющая программа системы МИНИМАКС. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Новосибирск, 1974, с. I29-I42.

3. КЕРБЕЛЬ В.Г., МИРЕНКОВ Н.Н. и др. Язык параллельных алгоритмов. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 57. Новосибирск,1974, с. 35-54.

4. МИРЕНКОВ Н.Н. МИНИМАКС - вычислительная система коллективного пользования. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Новосибирск, 1974, с. II5-I28.

5. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. Исследование операций. М., "Сов.радио",1972.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 июня 1975 года

Описывается алгоритм нахождения всех разбиений К элементар - ных машин на подсистемы рангов $\overline{1,R}$ и, следовательно, определения P_K – вероятности занятости ровно К ЭМ в однородной вычислительной системе. Зная значения P_K, нетрудно определить $\mathcal{N}_{cp}$, $K_з$ и $K_{пр}$ = = I-$K_з$.

Операторная схема для нахождения значения P_K при R = 4 имеет вид:

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8\ P_1\ A_9\ A_{10}\ A_{11}\ A_{12}\ A_{13}\ A_{14}\ P_Ц\ A_{15}\ P_2\ Я$

где A_1 – вводит значения $\rho, R, S, \mathcal{N}, \alpha_n (n=\overline{1,R})$, $Y:=1$;

A_2 – оператор цикла по $K=1$ до $\mathcal{N}+S$;

A_3 – если $K \leqslant \mathcal{N}$, то I:=K, иначе I:= $\mathcal{N}$;

A_4, A_5, A_6 – операторы цикла соответственно по i, j, n = 0 до $f(i, I)$, $i = \overline{4,2}$, и присвоения $\ell_4 := i$, $\ell_3 := j$, $\ell_2 := n$;

A_7 – ℓ_1 присваивает значение $f(1, I)$;

A_8 – $X := (\rho^{\sum_{i=1}^{R} \ell_i} \cdot \prod_{i=1}^{R} (\alpha_i^{\ell_i}))/(\prod_{i=1}^{R} (\ell_i!))$;

P_1 – передает управление на A_{14}, если $K \leqslant \mathcal{N}$;

A_9, A_{10}, A_{11} – операторы цикла соответственно по $i1, j1, n1$ = 0 до $f(i, K-\mathcal{N})$, $i = \overline{4,2}$, и присвоения $\ell'_4 := i1$, $\ell'_3 := j1$, $\ell'_2 := n1$;

A_{12} – $\ell'_1 := f(1, K-\mathcal{N})$;

A_{13} – $Y := \left(\rho^{\sum_{i=1}^{R} \ell'_i} \cdot \prod_{i=1}^{R} (\alpha_i^{\ell'_i})\right) / \left(\prod_{i=1}^{R} (\ell_i^{\ell'_i})\right)$;

A_{14} – $Z := Z + X \cdot Y$;

$P_Ц$ – оператор завершения циклов по $n1, j1, i1, n, j, i$ соот - ветственно;

A_{15} – печатает значение $X \cdot Y$, $Y := 1$;

P_2 – конец цикла по K, $P_0^o := \frac{1}{1+Z}$ и Z:=0;

Я – оператор конца;

Расчетная программа написана на ОВС-языке [3] и реализована на ЭВМ "Минск-22".