МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 517.5

ИЗБЫТОЧНАЯ ГЛАДКОСТЬ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯНТОВ

В.А.Василенко

Для понимания термина "избыточная гладкость" обратимся к простому примеру. Предположим, что решается задача о построении кусочно-полиномиального сплайна на отрезке $[0,1]$ по известным узловым значениям. Задача ставится в вариационной форме: найти функцию $\sigma(x)$, принадлежащую пространству Соболева $W_2^n[0,1]$, которая принимает в узлах сетки заданные значения и минимизирует выражение

$$\int_0^1 \left(\frac{d^n\sigma}{dx^n}\right)^2 dx. \tag{1}$$

Решением такой задачи, как известно, являются кусочно-полиномиальные сплайны, причем степень полиномов равна $2n-1$. Какова соболевская гладкость полученного сплайна? Если при $n=1$ сплайн $\sigma(x)$, являющийся кусочно-линейным интерполянтом, обладает как минимум соболевской гладкостью 1, $\sigma \in W_2^1[0,1]$, то уже при $n=2$ кубический сплайн $\sigma(x)$ принадлежит $W_2^3[0,1]$, при $n=3$ сплайн будет еще более гладким, причем наблюдается "избыточный" рост гладкости сплайна по сравнению с гладкостью пространства функций, в котором решается исходная задача. Точнее, под "избыточной гладкостью" будем понимать разность между соболевской гладкостью сплайнов, составляющих конечномерное пространство, и числом n. Выяснением причин избыточной гладкости и установлением предельной соболевской гладкости сплайн-интерполянтов в многомерных областях в одном частном случае мы и займемся. Для решения этих проблем мы используем пространства Соболева с дробным индексом.

Рассмотрим задачу построения сплайна в общей форме. Пусть X, Y – пара гильбертовых пространств, $T: X \to Y$ – линейный ограниченный оператор и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – линейно-независимая система функционалов, $k_i \in X^*$, $i = \overline{1,n}$. Решается задача об отыскании элемента $\sigma \in X$, удовлетворяющего условиям:

$$
(\sigma, k_i)_X = r_i, \quad i = \overline{1,n},
$$
$$
\|T\sigma\|_Y^2 = \min. \tag{2}
$$

Предположим для простоты, что оператор T имеет нулевое ядро и $TX = Y$. Тогда решение задачи (2) может быть записано (см. [I]) явно:

$$
\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (T^*T)^{-1} k_i. \tag{3}
$$

Здесь коэффициенты λ_i однозначно определяются из решения некоторой линейной алгебраической системы, а оператор $T^*: Y \to X$ сопряжен к T.

Если же оператор T имеет некоторое конечномерное ненулевое ядро, то решение задачи (2) можно представить в виде

$$
\sigma = \sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i (T^* T)^+ h_i + p, \tag{4}
$$

где q – размерность ядра T, $(T^*T)^+$ – обобщенный обратный оператор к $T^* T$, h_i – некоторые линейно-независимые комбинации векторов k_j, $j = \overline{1,n}$, ортогонализованные к ядру T, вектор p принадлежит ядру оператора T.

Из представления (4) очевидно, что гладкость сплайна определяется гладкостью элементов $(T^* T)^+ k_i$, $i = \overline{1,n}$, и гладкостью элементов, входящих в ядро оператора T.

В практических ситуациях элементы, входящие в ядро T, обычно бесконечно дифференцируемы (это, как правило, полиномы); поэтому гладкость сплайна, а значит, и его избыточная гладкость определяются избыточной гладкостью исходной системы функционалов k_i, $i = \overline{1,n}$, в соответствующем функциональном пространстве. Поэтому мы

должны прежде всего изучить гладкость δ-функционалов в конкретных функциональных пространствах, коль скоро мы будем решать вопрос о гладкости сплайна, построенного по значениям функции в точках.

I. Одномерный случай

Рассмотрим числовую прямую R^1 с нанесенными на нее точками $x_i \in R^1$, $i = \overline{1,n}$. Пусть нам известно значение функции в этих точках. Далее, пусть $X = W_2^\alpha[R^1]$, где $\alpha > 0$ – некоторый вещественный, вообще говоря, дробный индекс. Напомним (см. [2]), что пространство Соболева с дробным индексом дифференцирования может быть введено как область определения некоторой положительной вещественной степени оператора $A = (R^*R)^{1/2}$, где R – оператор однократного дифференцирования, рассмотренный как оператор из $L_2[R^1]$ в $L_2[R^1]$, точнее,

$$
W_2^\alpha[R^1] = D(A^\alpha). \tag{5}
$$

Норма в таком пространстве определяется так:

$$
\|u\|_{W_2^\alpha}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|A^\alpha u\|_{L_2}^2. \tag{6}
$$

Естественным образом определяется и скалярное произведение.

Так как в нашей задаче мы говорим о значении функций в точке, мы должны предполагать вложение соболевского пространства $W_2^\alpha[R^1]$ в пространство непрерывных ограниченных функций $C[R^1]$. Для этого необходимо потребовать выполнение условия $\alpha > 1/2$ (см. [2]).

Итак, в качестве X рассматривается $W_2^\alpha[R^1]$, в качестве Y – пространство $W_2^0[R^1] = L_2[R^1]$, в качестве оператора T – оператор $A^\alpha: W_2^\alpha \to L_2$. Решается задача о нахождении элемента $\sigma \in W_2^\alpha$ из условий:

$$
(k_i, \sigma)_{W_2^\alpha} = \sigma(x_i) = r_i, \quad i = \overline{1,n},
$$
$$
\|A^\alpha \sigma\|_{L_2}^2 = \min \tag{7}
$$

при $\alpha > 1/2$.

Исследуем теперь детально соболевскую гладкость " δ-функционала" k_p, дающего значение функции $f\in W_2^{\alpha}[R^1]$ в точке $x_p = P$. Как минимум $k_p \in W_2^{\alpha}$ (теорема Рисса). Какой избыточной гладкостью обладает k_p?

Пусть φ – некоторая основная функция из пространства, над которым определяются обобщенные функции (см. [3]).

Тогда

$$(k_p,\varphi)_{W_2^{\alpha}} = (k_p,\varphi)_{L_2} + (A^{\alpha}k_p, A^{\alpha}\varphi)_{L_2} = (k_p + A^{2\alpha}k_p)(\varphi) = \varphi(P).$$

Таким образом, обобщенная функция $k_p + A^{2\alpha}k_p$ есть δ-функция, сосредоточенная в точке P:

$$k_p + A^{2\alpha}k_p = \delta_p. \tag{8}$$

Соотношение (8) есть дифференциальное уравнение в классе обобщенных функций. Оно разрешимо в соболевском пространстве $W_2^{2\alpha-1/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В самом деле, применим к (8) преобразование Фурье. Получим

$$\hat{k}_p + (ix)^{2\alpha}\hat{k}_p = 1, \tag{9}$$

где $\hat{k}_p$ – преобразование Фурье от распределения k_p, или

$$\hat{k}_p = \frac{1}{1+(ix)^{2\alpha}}. \tag{10}$$

Соболевская гладкость элемента k_p равна максимальной степени β такой, что функция

$$f(y) = \frac{(1+|y|^2)^{\beta/2}}{1+|y|^{2\alpha}} \tag{11}$$

принадлежит пространству $L_2[R^1]$. Очевидно, для этого нужно потребовать $2\alpha - \beta > \frac{1}{2}$, т.е. $\beta < 2\alpha - \frac{1}{2}$. Окончательно получаем $k_p \in W_2^{2\alpha-1/2-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Решим теперь вопрос о гладкости сплайн-функции σ. Оператор A^{α} самосопряжен как оператор из L_2 в L_2. Рассмотрим его теперь как оператор из W_2^{α} в L_2 и найдем ему сопряженный. Очевидно, что для любых функций $u\in W_2^{\alpha}$ и $v\in W_2^{\alpha}$

$$(u, A^{\alpha}v)_{L_2} = (A^{\alpha}u, v)_{L_2} = (u, (A^{\alpha})^*v)_{W_2^{\alpha}} =$$

$$= (u, (A^{\alpha})^*v)_{L_2} + (A^{\alpha}u, A^{\alpha}(A^{\alpha})^*v)_{L_2}. \tag{11}$$

Из этого соотношения видно, что

$$A^{\alpha} = (A^{\alpha})^* + A^{2\alpha}(A^{\alpha})^*, \tag{12}$$

откуда

$$(A^{\alpha})^* = A^{\alpha}(I + A^{2\alpha})^{-1},$$
$$(A^{\alpha})^*A^{\alpha} = A^{2\alpha}(I + A^{2\alpha})^{-1}. \tag{13}$$

Из вида оператора $T^*T = (A^{\alpha})^*A^{\alpha}$ понятно, что он сохраняет неизменной соболевскую гладкость элементов. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА I. Сплайн-функция $\sigma(x)$, являющаяся решением задачи (7), принадлежит соболевскому классу $W_2^{2\alpha-1/2-\varepsilon}$ для $\alpha > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$.

2. Многомерный случай

Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим пространство R^n вещественных векторов n измерений и изотропное пространство Соболева $W_2^{\alpha}(R^n)$. Условие вложения такого пространства в $C(R^n)$ имеет вид $\alpha > \frac{n}{2}$. Пусть $P\in R^n$, $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$. Исследуем гладкость δ-функционала в $W_2^{\alpha}(R^n)$,

$$(k_P, f)_{W_2^{\alpha}(R^n)} = f(P), \qquad \forall f\in W_2^{\alpha}. \tag{14}$$

Проведем через точку P гиперплоскость $x_n = P_n$. Тогда след пространства $W_2^{\alpha}(R^n)$ на этой плоскости есть соболевское пространство $W_2^{\alpha-1/2}(R^{n-1})$ (см. [2]). Проведя в этой гиперплоскости плоскость $x_{n-1} = P_{n-1}$, мы потеряем еще I/2 в соболевской гладкости функций на следе. Продолжая этот процесс до получения одномерного пространства, мы получаем соболевский класс $W_2^{\alpha-(n-1)/2}(R^1)$. Пусть x – неизвестная нам соболевская гладкость δ-функционала k_p. Тогда на основании рассуждений для одномерного случая получим соотношение

$$x - \frac{n-1}{2} = 2\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \varepsilon, \tag{15}$$

откуда немедленно следует соболевская гладкость k_p:

$$x = 2\alpha - \frac{n}{2} - \varepsilon. \tag{16}$$

Пусть теперь $X = W_2^{\alpha}(R^n)$. Норма в этом пространстве вводится следующим образом:

$$\|u\|^2_{W_2^{\alpha}} = \|u\|^2_{L_2} + \|A^{\alpha}u\|^2_{L_2}, \tag{17}$$

где A^{α} – самосопряженный оператор, действующий в L_2, областью определения которого является $W_2^{\alpha}(R^n)$. Если рассмотреть задачу об отыскании элемента $\sigma \in W_2^{\alpha}(R^n)$ из условий:

$$\begin{gathered} \sigma(P^i) = (k_i, \sigma)_{W_2^{\alpha}} = r_i, \qquad i = \overline{1,N}, \\ \|A^{\alpha}\sigma\|^2_{L_2} = \min, \end{gathered} \tag{18}$$

где P^i – некоторые точки в пространстве R^n, и дословно повторить все рассуждения для одномерного случая, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. Сплайн-функция σ, являющаяся решением задачи (I8), принадлежит соболевскому пространству $W_2^{2\alpha-n/2-\varepsilon}$ для $\alpha > n/2$, $\varepsilon > 0$.

Таким образом, нами установлено, что рассмотренные сплайн-функции обладают избыточной гладкостью $\alpha - n/2 - \varepsilon$, где n – размерность пространства, α – соболевская гладкость функций, среди которых отыскивается минимум вариационного функционала. Так, если $\alpha = 2.5$, $n = 2$, сплайн-функции обладают "почти четвертыми" соболевскими производными.

Полученные результаты об избыточной гладкости могут быть распространены на случай пространств $W_2^{\alpha}(\Omega)$, где $\Omega \subset R^n$ – некоторая область, на которой можно применить теоремы продолжения [2].

Литература

1. ANSELONE P.M., LAURENT P.T. A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions.-"Numer. Math.",1968,v.12, N 1, p. 66–82.

2. ЛИОНС Ж.-Л., МАДЖЕНЕС Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир",1971.

3. ГЕЛЬФАНД И.М., ШИЛОВ Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.,Физматгиз, 1959.

Поступила в ред.-изд. отд.
I декабря 1976 года