М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1977 год   Выпуск 72

УДК 517.5

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ТРЕТЬИХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Н.Л.Зматраков

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы трижды непрерывно дифференцируемая функция $f\in C^3[a,b]$ и сетка

$$\Delta_n:\ a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{N_n}^{(n)} = b\,.$$

Обозначим через $h_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}$, $\delta_n = \max\limits_i h_i^{(n)}$, S_n – кубический сплайн, интерполирующий функцию f в узлах сетки Δ_n, т.е.

$$S_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}) \qquad (i = 0,1,\ldots,N_n;\quad N_n \geq 3).$$

Так как S_n на каждом отрезке $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ является кубическим полиномом, то S_n''' является кусочно-постоянной функцией с разрывами в точках $x_i^{(n)}$. Положим $S_n'''(x_i^{(n)}) = S'''(x)$ для $x\in(x_{i-1}, x_i^{(n)})$ (в случае непериодического сплайна $S_n'''(x_0^{(n)}) = S_n'''(x_1^{(n)})$). На концах отрезка $[a,b]$ S_n удовлетворяет краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} &2h_1^{(n)}r_1 + \mu_n h_2^{(n)} r_2 = d_1^{(n)},\\ &\lambda_n h_{N_n-1} r_{N_n-1} + 2h_{N_n} r_{N_n} = d_{N_n}^{(n)},\\ &r_i = S_n'''(x_i^{(n)}) - f'''(x_i^{(n)}) \quad (i=1,2,\ldots,N_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если же f является $(b-a)$-периодической функцией $(f\in C^3(-\infty,\infty))$, то S_n удовлетворяет условиям

$$S_n'(a) = S_n'(b), \qquad S_n''(a) = S_n''(b), \qquad (2)$$

а сетка Δ_n продолжается по периодичности на всю прямую.

Биркгоф и де Бор [1] получили сходимость третьих производных кубических сплайнов для функций, у которых третья производная абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а на последовательность сеток Δ_n наложено ограничение

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \qquad \max_i \frac{\delta_n}{h_i^{(n)}} \leq K < \infty, \qquad (3)$$

где K – абсолютная постоянная.

Алберг, Нильсон, Уолш [2] при ограничениях (3) доказали сходимость третьих производных для класса $C^3[a,b]$. Мейер и Шарма [3] рассмотрели ограничение на последовательность сеток Δ_n

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \qquad \max_{|i-j|=1} \frac{h_i^{(n)}}{h_j^{(n)}} \leq \rho, \qquad 1 \leq \rho < \infty, \qquad (4)$$

и доказали для периодических кубических сплайнов, что если $\rho < 2$, то для любой $f\in C^3$ в равномерной метрике $\|f''' - S_n'''\| \to 0$ при $n\to\infty$. Далее, Ю.С.Завьялов [4] при ограничениях (4) получил сходимость для $\rho < \bar\rho \approx 2{,}55$, где $\bar\rho$ – корень некоторого уравнения. Примеров расходимости третьих производных ранее не было.

В этой работе доказано, что при $\rho < \rho^* = \frac{3+\sqrt5}{2} \approx 2{,}618$ для любой $f\in C^3$ будет $\|f''' - S_n'''\| \to 0$ при $n\to\infty$. Если же в (4) $\rho \geq \rho^*$, то в этом случае приведен пример функции $f\in C^3$ и последовательности сеток, удовлетворяющей (4), таких что $\|S_n'''\| \to \infty$ при $n\to\infty$. Заметим, что для $f\in C^2$ (см., например, [2]) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f^{(i)} - S_n^{(i)}\| = 0$ $(i=0,1,2)$, если только $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$.

В §1 работы доказана теорема типа Джексона для уклонений $\|f''' - S_n'''\|$ при ограничениях

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0, \qquad \max_{|i-j|=s} \frac{h_i^{(n)}}{h_j^{(n)}} \leq \rho < \infty, \qquad (5)$$

$$\inf_n \min\{4-\mu_n,\ 4-\lambda_n\} = \gamma > 0, \quad \sup_n \max\{|\mu_n|, |\lambda_n|\} = M, \qquad (6)$$

где s – фиксированное натуральное число, а ρ, γ, M – абсолютные постоянные. Из этой теоремы следует сходимость третьих производ -

ных при дополнительных ограничениях

$$\max_{|i-j|\le s} \frac{h_i^{(n)}\,\omega(h_i^{(n)})}{h_j^{(n)}} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{|d_1^{(n)}|}{\min\limits_{1\le i\le s} h_i^{(n)}} + \frac{|d_{N_n}^{(n)}|}{\min\limits_{N_n-s\le i\le N_n} h_i^{(n)}} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty \tag{7}$$

и если, кроме того, в (5) $\rho<\rho_s\,(\rho_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\rho_s=2^s$, $s=2,3,\dots$), где $\omega(t)$ – модуль непрерывности f'''. Отметим, что если выполнено условие (3), то из этой теоремы также следует сходимость третьих производных.

В §2 приведен пример функции из C^3 и последовательности сеток Δ_n, удовлетворяющей (7) и (5) при $\rho \ge (\rho_1)^s$, для которых $\|S_n'''\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

§I. Теорема типа Джексона для третьих производных

В случае интерполяционных кубических сплайнов для $a_i=S'''(x_i^{(n)})$ справедливо соотношение (см., например, [2], [4])

$$\frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i}a_{i-1} + \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i+h_{i-1}} + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right)h_i a_i +$$

$$+\frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}}a_{i+1} = c_i - c_{i-1}\,, \tag{8}$$

где

$$c_i = \frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left[\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}\right], \qquad f_i=f(x_i),$$

$$c_i-c_{i-1}=\frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i}f'''_{i-2,i-1} + \left(1+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right)h_i f'''_{i-1,i} +$$

$$+\frac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}}f'''_{i,i+1}\;,$$

$$f'''_{i-1,i} = f'''(\xi_i), \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Здесь и далее индекс сетки n будем опускать.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f\in C^3$ и кубический сплайн S_n интерполирует f в узлах сетки Δ_n и удовлетворяет краевым условиям (I) с ограничениями (6) и пусть на последовательность сеток Δ_n накладываются ограничения (5), где $\rho<\rho_s$ $(\rho_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\rho_s = 2^s$, $s = 2,3,\dots)$. Далее, если натуральное число $j=ks$ $(k\ge 2,\ s\ge 2)$ и при $s=1$ удовлетворяет условию

$$2\rho\,(1+\rho) - (1+\rho^3\sqrt[j]{\rho^2}\,) > 0\,, \tag{9}$$

то

$$\|f''' - S_n'''\| \le \omega(\delta_n) + \frac{|d_1|}{2h_1} + \frac{|d_N|}{2h_N} +$$

$$+ A_s\left(3\tilde{B}_s + s\,\frac{|d_1|}{\min\limits_{1\le i\le s} h_i} + s\,\frac{|d_N|}{\min\limits_{N-s+1\le i\le N} h_i}\right)\max\left\{1, \frac{2}{\gamma}, \frac{M}{\gamma}, \frac{M}{2}\right\}, \tag{10}$$

где

$$\tilde{B}_s = 5s\max_{|m-l|\le s}\frac{h_m\,\omega(h_m)}{h_l}, \quad A_s = \max\left\{1, \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}, \tilde{A}_s\right\}\rho^{j-1},$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{\rho(1+\rho)}{2\rho(1+\rho) - (1+\rho^3\sqrt[j]{\rho^2})}, \quad \tilde{A}_s = \frac{1}{2-\sqrt[s]{\rho}} \quad (s=2,3,\dots\ ),$$

$\omega(t)$ – модуль непрерывности f'''.

В периодическом случае имеем

$$\|f''' - S_n'''\| \le \omega(\delta_n) + \tilde{A}_s\tilde{B}_s\,\rho^{j-1}\,.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, учитывая обозначение (I), имеем

$$|f'''(x) - S_n'''(x_i)| \le |f'''(x) - f'''(x_i)| + |f'''(x_i) - S_n'''(x_i)| \le$$

$$\le \omega(h_i) + |r_i| \le \omega(\delta_n) + |r_i|. \tag{II}$$

Для доказательства утверждения теоремы достаточно оценить $|r_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Перепишем (8) для r_i (см., например, [4])

$$\frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i} r_{i-1} + \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right) h_i r_i + \frac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} r_{i+1} =$$

$$= \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i} \omega_{i-1} + h_i \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right) \omega_i + \frac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} \omega_{i+1} = d_i, \qquad (12)$$

где $\omega_i = f'''(\xi_i) - f'''(x_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Рассмотрим сначала случай периодических сплайнов. Умножим обе части равенства (I2) на $\eta_i = P_i P_{i+1} \ldots P_{i+j-1}$, где

$$P_i = \sqrt[j]{\frac{1}{h_{i-2}} + \frac{1}{h_{i-1}} + \ldots + \frac{1}{h_{i+s-3}}}$$

а $j = ks$ $(s \ge 2)$ и удовлетворяет условию (9) при $s = 1$. Введем обозначения:

$$\tilde{b}_i = h_i \eta_i r_i, \; \tilde{q}_i = \eta_i d_i, \quad \alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} \, \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \, \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}},$$

$$\gamma_i = 1 + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \; , \qquad (I3)$$

$$\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_N)^T, \qquad \tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_N)^T .$$

В силу периодичности сплайна и сетки Δ_n имеем $\alpha_1 = \alpha_N$, $\beta_1 = \beta_{N+1}$, $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_{N+1}$, $\tilde{b}_0 = \tilde{b}_N$, и для определения $\tilde{b}_i$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_i \tilde{b}_{i-1} + \gamma_i \tilde{b}_i + \beta_i \tilde{b}_{i+1} = \tilde{q}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \\ &\tilde{b}_0 = \tilde{b}_N \; , \qquad \tilde{b}_{N+1} = \tilde{b}_1 , \end{aligned} \qquad (I4)$$

или в матричном виде

$$\tilde{Q} \, \tilde{b} = \tilde{q} . \qquad (I5)$$

Так как для всех i, используя (5), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt[j]{\rho}} P_{i+1} \le P_i \le \sqrt[j]{\rho} \, P_{i+1}, \quad \frac{1}{\sqrt[j]{\rho}} P_{i+s} \le P_i \le \sqrt[j]{\rho} \, P_{i+s}, \\ &\rho^{\frac{1-j}{2}} P_i^j \le \eta_i \le \rho^{\frac{j-1}{2}} P_i^j, \quad \frac{1}{h_i} \le P_i^j \le s \max_{i-2 \le l \le i+s-3} \frac{1}{h_l}, \end{aligned} \qquad (I6)$$

то для r_i выводим

$$|r_i| = \frac{|\tilde{b}_i|}{h_i \eta_i} \le \rho^{\frac{j-1}{2}} \|\tilde{b}\| \le \rho^{\frac{j-1}{2}} \|\tilde{Q}^{-1}\| \|\tilde{q}\|, \qquad (I7)$$

где под нормой матрицы $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$ понимается $\max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{ij}|$.

Для $\tilde{q}_i$, используя (I6), выводим оценку

$$|q_i| = \eta_i |d_i| \le 5 s \rho^{\frac{j-1}{2}} \max_{|m-l| \le s} \frac{h_m \omega(h_m)}{h_l} = \rho^{\frac{j-1}{2}} \tilde{B}_s . \qquad (I8)$$

Оценим норму матрицы $\tilde{Q}^{-1}$. Для этого покажем, что матрица $\tilde{Q}$ обладает доминирующей главной диагональю, т.е.

$$\theta_i = \gamma_i - \alpha_i - \beta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (I9)$$

и, следовательно ([2], стр. 25),

$$\| \tilde{Q}^{-1} \| \le \max_{1 \le i \le N} \theta_i^{-1} . \qquad (20)$$

Обозначив через $y = \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}}$ и учитывая, что $j = ks$, получаем оценки

$$\frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} = \frac{P_i \ldots P_{i+j-1}}{P_{i-1} \ldots P_{i+j-1}} = \frac{P_{i+1} \ldots P_{i+j}}{P_i \ldots P_{i+j-1}} \cdot \frac{P_i P_{i+j-1}}{P_{i-1} \, P_{i+j}} \le \frac{1}{y} \sqrt[j]{\rho^2}, \qquad (21)$$

$$\frac{1}{\sqrt[s]{\rho}} \le \frac{\eta_i}{\eta_{i-1}} \le \sqrt[s]{\rho}, \qquad \frac{1}{\sqrt[s]{\rho}} \le \frac{\eta_i}{\eta_{i+1}} \le \sqrt[s]{\rho} . \qquad (22)$$

При $s = 1$, так как $\max\limits_{|i-l|=1} \frac{h_i}{h_l} \le \rho$, то, учитывая (2I), выводим

$$\theta_i = 1 + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\left(1-\frac{\eta_i}{\eta_{i-1}}\right) + \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\left(1-\frac{\eta_i}{\eta_{i+1}}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\left(1-\frac{\sqrt[3]{\rho^2}}{y}\right) + \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}(1-y) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{\rho}{1+\rho}\left(1-\rho\sqrt[3]{\rho^2}\right) + \frac{1}{1+\rho}\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \geq$$

$$\geq \frac{2\rho(1+\rho) - (1+\rho^3\sqrt[3]{\rho^2})}{\rho(1+\rho)} > 0 . \qquad (23)$$

Из условия теоремы следует, что при $s = 1$

$$\|\tilde{Q}^{-1}\| \leq \frac{\rho(1+\rho)}{2\rho(1+\rho) - (1+\rho^3\sqrt[3]{\rho^2})} = \tilde{A}_1 . \qquad (24)$$

При $s \geq 2$, учитывая (22), получаем

$$\theta_i \geq \begin{cases} 2-\sqrt[s]{\rho}, & \text{если } y \leq 1 \text{ или } y \geq \sqrt[3]{\rho^2}, \\ 3-\dfrac{\sqrt[3]{\rho^2}}{y} - y, & \text{если } 1 < y < \sqrt[3]{\rho^2}, \end{cases}$$

а так как $k \geq 2$, то

$$\theta_i \geq 2 - \sqrt[s]{\rho} \qquad (25)$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{Q}^{-1}\| < (2-\sqrt[s]{\rho})^{-1} = \tilde{A}_s . \qquad (26)$$

Учитывая (I7), (I8), (24) и (26), окончательно выводим

$$\|r\| = \max_{1\leq i\leq N} |r_i| \leq \rho^{j-1}\tilde{A}_s\tilde{B}_s . \qquad (27)$$

В периодическом случае теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай непериодических сплайнов. Учитывая (I) и (I2), запишем систему уравнений для определения r_i в этом случае

$$\left.\begin{array}{l} 2h_1r_1 + \mu_n h_2 r_2 = d_1 , \\ \dfrac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i} r_{i-1} + \left(1+\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}+\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right)h_i r_i + \dfrac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} r_{i+1} = d_i \\ \qquad (i = 2,3,\ldots,N-1), \\ \lambda_n h_{N-1} r_{N-1} + 2h_N r_N = d_N . \end{array}\right\}$$

Исключив отсюда неизвестные r_1 и r_N, получим новую систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 2h_2r_2 + \mu_n' h_3 r_3 = d_2' , \\ \dfrac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i} r_{i-1} + \left(1+\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}+\dfrac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right)h_i r_i + \dfrac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} r_{i+1} = d_i \\ \qquad (i = 3,4,\ldots,N-2), \\ \lambda_n' h_{N-2} r_{N-2} + 2h_{N-1} r_{N-1} = d_{N-1}' , \end{array}\right\} (28)$$

где

$$\mu_n' = \frac{4\dfrac{h_3}{h_2+h_3}}{2\dfrac{h_3}{h_2+h_3} + 2\dfrac{h_2}{h_1+h_2} + (4-\mu_n)\dfrac{h_1}{h_1+h_2}} ,$$

$$d_2' = \frac{4d_2 - 2\dfrac{h_1}{h_1+h_2}d_1}{2\dfrac{h_3}{h_2+h_3} + 2\dfrac{h_2}{h_1+h_2} + (4-\mu_n)\dfrac{h_1}{h_1+h_2}} ,$$

$$\lambda_n' = \frac{4\dfrac{h_{N-2}}{h_{N-2}+h_{N-1}}}{2\dfrac{h_{N-2}}{h_{N-2}+h_{N-1}} + 2\dfrac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N} + (4-\lambda_n)\dfrac{h_N}{h_{N-1}+h_N}} ,$$

$$d'_{N-1} = \frac{4d_{N-1} - 2\dfrac{h_N}{h_{N-1}+h_N}\, d_N}{2\dfrac{h_{N-2}}{h_{N-2}+h_{N-1}} + 2\dfrac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N} + (4-\lambda_n)\dfrac{h_N}{h_{N-1}+h_N}} .$$

Чтобы применить схему доказательства периодического случая, определим h_{i+N} $(1 \le i \le j+s-5)$ следующим образом $h_{N+i} = h_{N+i-s}$. Тогда, очевидно, для h_i $(1\le i\le N+j+s-5)$ будет выполнено условие (5).

Положим $\eta_2=\eta_3$, $\eta_{N-1}=\eta_{N-2}$, $\eta_i=P_iP_{i+1}\ldots P_{i+j-1}$ $(i=3,4,\ldots,N-2)$ и умножим обе части i-го уравнения на η_i. Далее, введем обозначения $b_i=h_i\eta_i r_i$, $q_i=\eta_i d_i$, $q_2=\eta_2 d'_2$, $q_{N-1} = \eta_{N-1}d'_{N-1}$; α_i, β_i, γ_i,

$(i = 3,4,\ldots,N-2)$, такие же, как в (I3). В этих обозначениях перепишем систему (28) в виде

$$\left.\begin{aligned} &2b_2 + \mu'_n b_3 = q_2,\\ &\alpha_i b_{i-1} + \gamma_i b_i + \beta_i b_{i+1} = q_i \ (i=3,4,\ldots,N-2),\\ &\lambda'_n b_{N-2} + 2b_{N-1} = q_{N-1} \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

или в матричном виде $Qb = q$, где $b = (b_2, b_3,\ldots, b_{N-1})^T$, $q = (q_2, q_3,\ldots, q_{N-1})^T$. Для $q_i (3\le i\le N-2)$ верна оценка (I8), а для остальных i, учитывая (I6), получаем

$$|q_2| = \eta_3|d'_2|\le (4\eta_3|d_2| + 2\eta_3|d_1|)\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma}\right\} \le$$

$$\le \left[10 \max_{|m-i|\le s} \frac{h_m\,\omega(h_m)}{h_i} + \frac{|d_1|}{\min\limits_{1\le i\le s} h_i}\right] s\rho^{\frac{j-1}{2}}\max\left\{1,\frac{2}{\gamma}\right\}$$

и аналогично

$$|q_{N-1}| \le \left[10 \max_{|m-i|\le s} \frac{h_m\,\omega(h_m)}{h_i} + \frac{|d_N|}{\min\limits_{0\le i\le s-1} h_{N-i}}\right] s\rho^{\frac{j-1}{2}}\max\left\{1,\frac{2}{\gamma}\right\} .$$

Для $\| q\|$ выводим оценку

$$\| q \| \le \left[2\tilde{B}_s + s\frac{|d_1|}{\min\limits_{1\le i\le s} h_i} + \frac{|d_N|}{\min\limits_{0\le i\le s-1} h_{N-i}}\right]\rho^{\frac{j-1}{2}}\max\left\{1,\frac{2}{\gamma}\right\} . \qquad (30)$$

Покажем теперь, что матрица Q обладает доминирующей главной диагональю. Действительно,

$$\theta_2 = 2 - |\mu'_n| = 2\left[1+2\frac{h_3}{h_2+h_3}\left(2\frac{h_2}{h_1+h_2} + (4-\mu_n)\frac{h_1}{h_1+h_2}\right)^{-1}\right]^{-1} \ge$$

$$\ge 2\left(1 + \max\left\{1,\frac{2}{\gamma}\right\}\right)^{-1} > 0,$$

и аналогично

$$\theta_{N-1} = 2 - |\lambda'_n| \ge 2\left(1 + \max\left\{1,\frac{2}{\gamma}\right\}\right)^{-1} > 0,$$

а для θ_i $(i=3,4,\ldots, N-2)$ справедливы оценки (23) и (25). Следовательно, при $s=1$ получаем

$$\|Q^{-1}\| \le \max\left\{\tilde{A}_1,\ 1,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma}\right\} = A_1\,\rho^{1-j}, \qquad (31)$$

а при $s\ge 2$ имеем

$$\|Q^{-1}\| \le \max\left\{1\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma},\ \tilde{A}_s\right\} = A_s\,\rho^{j-1} . \qquad (32)$$

Далее, для r_i $(i=2,3,\ldots, N-1)$ имеем

$$|r_i| = \frac{|b_i|}{h_i\eta_i} \le \rho^{\frac{j-1}{2}}\| b \| . \qquad (33)$$

Осталось оценить r_1 и r_N, для которых выводим

$$|r_1| = \frac{|d_1-\mu_n h_2 r_2|}{2h_1} \le \frac{|d_1|}{2h_1} + \frac{M}{2}\frac{\|b\|}{h_1\eta_2} \le \frac{|d_1|}{2h_1} + \frac{M}{2}\rho^{\frac{j-1}{2}}\|b\|$$

и аналогично

$$|r_N| = \frac{|d_N - \lambda_n h_{N-1} r_{N-1}|}{2h_N} \le \frac{|d_N|}{2h_N} + \frac{M}{2}\rho^{\frac{j-1}{2}}\| b\| .$$

Окончательно имеем

$$\|r\| \le \frac{|d_1|}{2h_1} + \frac{|d_N|}{2h_N} + \rho^{\frac{j-1}{2}} \|b\| \max\left\{1, \frac{M}{2}\right\} \le$$

$$\le \frac{|d_1|}{2h_1} + \frac{|d_N|}{2h_N} + \rho^{\frac{j-1}{2}} \|Q^{-1}\| \, \|q\| \max\left\{1, \frac{M}{2}\right\} \qquad (34)$$

и, учитывая оценки (30) и (32), заканчиваем доказательство теоремы I.

§2. Расходимость третьих производных кубических сплайнов

Пусть задано действительное число $\rho \ge 2$. На отрезке $[-I, I]$ построим функцию $f_\rho \in C^3$ следующим образом. Будем строить ее последовательно на отрезках $\left[\frac{1}{2\rho^{r^2}}, \frac{1}{2\rho^r}\right]$ ($r=2^2, 2^4, 2^8, \ldots$). Разобьем отрезок $\left[\frac{1}{2\rho^{r^2}}, \frac{1}{2\rho^r}\right]$ точками $\frac{1}{2\rho^{r^2}} = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{(r-1)^2-1} \le \frac{1}{2\rho^r}$, выбрав ξ_i из условия $\xi_i - \xi_{i-1} = \rho^{i-r^2}$ $(i=1,2,\ldots,(r-1)^2-1)$. Такое разбиение возможно, так как

$$\xi_{(r-1)^2-1} = \frac{1}{2\rho^{r^2}} + \frac{1}{\rho^{r^2}}(\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{(r-1)^2-1}) = -\frac{1}{2\rho^{r^2}} + \frac{1}{\rho^{r^2}}\frac{\rho^{(r-1)^2}-1}{\rho-1} \le$$

$$\le \frac{1}{\rho-1}\,\frac{1}{\rho^{2r-1}} = \frac{1}{2\rho^r}\,\frac{1}{\rho-1}\,\frac{2}{\rho^{r-1}} < \frac{1}{2\rho^r} .$$

Пусть на каждом отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,(r-1)^2)$ функция f_ρ является полиномом седьмой степени и удовлетворяет условиям

$$f_\rho^{(j)}(\xi_i) = 0 \ (i = 1,2,\ldots,(r-1)^2-2;\ j = 1,2,3),$$

$$f_\rho\ (\xi_i) = \frac{1}{r}(\xi_i - \xi_{i-1})^3 \ \ (i = 2,4,\ldots,(r-1)^2-3),$$

$$f_\rho\ (\xi_i) = 0 \ (i = 1,3,\ldots,(r-1)^2-2).$$

Далее, на отрезках $[\xi_0, \xi_1]$, $\left[\xi_{(r-1)^2-2}, \frac{1}{2\rho^r}\right]$, $\left[\frac{1}{2\rho^4}, 1\right]$ положим $f_\rho(x) \equiv 0$. По непрерывности положим $f_\rho(0) = 0$ и для $x \in [-1, 0]$ $f_\rho(x) = -f_\rho(-x)$.

Легко показать, что построенная функция

$$f_\rho \in C^3[-1,1] \qquad f_\rho'''(0) = 0 . \qquad (35)$$

Построим сетку $\bar\Delta_n$ $(n=2^2, 2^4, 2^8, \ldots)$. Пусть

$$\bar\Delta_n:\ -1 = x_{-(n-1)^2-k-1} < \ldots < x_{-1} < x_0 < \ldots < x_{(n-1)^2+k} = 1, \qquad (36)$$

где $x_0 = 2^{-1}\rho^{-n^2}$, $x_{-i} = -x_{i-1}$, точки x_i $(i = 1,2,\ldots,(n-1)^2+k)$ определяются заданием шагов $h_i = x_i - x_{i-1}$ формулами

$$h_i = \rho^{i-n^2} \ (i = 1,2,\ldots,(n-1)^2-1),$$

$$h_i = \rho^{-2n} \ \ (i = (n-1)^2,\ldots,(n-1)^2+k-1), \qquad (37)$$

$$h_{(n-1)^2+k} = d_n\rho^{-2n} \ (1 \le d_n < 2),$$

а числа $k = k(n)$ и d_n находятся из условий $1 \le d_n < 2$, $\frac{1}{2}h_0 + h_1 + \ldots + h_{(n-1)^2+k} = 1$.

Отметим, что для $k = k(n)$ справедлива оценка

$$k > 2^{-1}\rho^{2n} . \qquad (38)$$

Оценим σ_n – число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ с постоянной длиной, лежащих на $\left[\frac{1}{2\rho^{n^2}}, \frac{1}{2\rho^n}\right]$

$$\sigma_n > \rho^{2n}\left[\frac{1}{2\rho^n} - \frac{1}{2\rho^{n^2}} - \frac{1}{\rho^{n^2}}(\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{(n-1)^2-2})\right] - 1 > \frac{1}{3}\rho^n. \qquad (39)$$

Оценим сейчас ν_n – число всех отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, лежащих на отрезке $\left[\frac{1}{2\rho^n}, \frac{1}{2\rho^4}\right]$

$$\nu_n < \rho^{2n}\left(\frac{1}{2\rho^4} - \frac{1}{2\rho^n}\right) < \frac{1}{2}\rho^{2n-4}. \qquad (40)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если в (5) $\rho \ge \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^s = \rho_1^s$, то существуют последовательность сеток $\bar\Delta_n$, удовлетворяющая условию (5), и функция $f_\rho \in C[-1,1]$ такие, что

$$f_\rho'''(0) - S_n'''(0) \geq \begin{cases} \beta \cdot n, \text{ если } \rho = \rho_1, \\ \dfrac{\beta}{n}\left(\dfrac{\sqrt[s]{\rho^3}}{\varepsilon}\right)^{(n-1)^2}, \text{ если } \rho > \rho_1, \end{cases} \tag{41}$$

где β – положительная постоянная, зависящая только от ρ, $\varepsilon = \sqrt[s]{\rho}\left(\sqrt[s]{\rho}+1+\sqrt{\sqrt[s]{\rho^2}+\sqrt[s]{\rho}+1}\right)$, S_n – кубический сплайн, интерполирующий f_ρ в узлах сетки $\bar{\Delta}_n$ и удовлетворяющий краевым условиям (I) с ограничениями (6) и (7), или является 2-периодическим вместе с функцией f_ρ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 1$. Возьмем сетку $\bar{\Delta}_n$ (36), тогда для функции f_ρ (35) имеем

$$f_\rho'''(0) - S_n'''(0) = -S_n'''(0) = -a_0 . \tag{42}$$

Покажем, что периодический случай можно рассматривать как частный случай краевых условий (I). Продолжим функцию f_ρ на всю прямую с периодом 2 и построим для нее интерполяционный, периодический сплайн. Так как f_ρ – нечетная функция и узлы интерполирования симметричны относительно $x=0$, то легко доказать, что S_n тоже будет нечетной функцией. То же самое можем утверждать о функции $\varphi(x) = f_\rho(x-1)$ на отрезке $[0,2]$, т.е. здесь S_n будет нечетной функцией относительно $x=1$, и, учитывая (2), получаем $S_n''(1) = S_n''(-1) = 0$, и, следовательно, S_n на отрезке $[-I,I]$ совпадает с интерполяционным сплайном, удовлетворяющим условиям (I) с $\mu_n = \lambda_n = \dfrac{2}{3+2d_n}$, $d_{-(n-1)^2-k} = d_{(n-1)^2+k} = 0$.

В случае непериодических сплайнов для функции f_ρ и сетки $\bar{\Delta}_n$, используя (I) и (8), запишем систему уравнений для определения $a_i = S_n'''(x_i)$

$$\left.\begin{aligned} & 2h_{-(n-1)^2-k}\, r_{-(n-1)^2-k} + \mu_n h_{-(n-1)^2-k+1}\, r_{-(n-1)^2-k+1} = d_{-(n-1)^2-k}, \\ & \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}+h_i} a_{i-1} + \left(1+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\right) h_i a_i + \frac{h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} a_{i+1} = c_i - c_{i-1} \\ & \qquad (i=-(n-1)^2-k+1, \ldots, -1, 0, \ldots, (n-1)^2+k-1), \\ & \lambda_n h_{(n-1)^2+k-1}\, r_{(n-1)^2+k-1} + 2h_{(n-1)^2+k}\, r_{(n-1)^2+k} = d_{(n-1)^2+k}, \\ & \text{где в данном случае } r_j = a_j \ (j=\pm[(n-1)^2+k], \pm[(n-1)^2+k-1]). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Подставим в (43) значения h_i из (37) и запишем ее в виде:

$$\left.\begin{aligned} & 2a_{-(n-1)^2-k} + \frac{\mu_n}{d_n} a_{-(n-1)^2-k+1} = b_{-(n-1)^2-k}, \\ & \frac{2d_n^2}{1+d_n} a_{-(n-1)^2-k} + \frac{3+5d_n}{1+d_n} a_{-(n-1)^2-k+1} + a_{-(n-1)^2-k+2} = b_{-(n-1)^2-k+1}, \\ & a_{i-1} + 4a_i + a_{i+1} = b_i \quad (i = -(n-1)^2-k+2, \ldots, -(n-1)^2), \\ & \rho(1+\rho)\, a_{-(n-1)^2} + \rho(5+3\rho) a_{-(n-1)^2+1} + 2a_{-(n-1)^2+2} = b_{-(n-1)^2+1}, \\ & \rho^3 a_{i-1} + 2\rho(1+\rho) a_i + a_{i+1} = b_i \quad (i = -(n-1)^2+2, \ldots, -1), \\ & \rho^3 a_{-1} + \rho(1+3\rho) a_0 + \rho^3 a_1 = b_0, \\ & a_{i-1} + 2\rho(1+\rho) a_i + \rho^3 a_{i+1} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, (n-1)^2-2), \\ & 2a_{(n-1)^2-2} + \rho(5+3\rho) a_{(n-1)^2-1} + \rho(1+\rho) a_{(n-1)^2} = b_{(n-1)^2-1}, \\ & a_{i-1} + 4a_i + a_{i+1} = b_i \quad (i = (n-1)^2, \ldots, (n-1)^2+k-2), \\ & a_{(n-1)^2+k-2} + \frac{3+5d_n}{1+d_n} a_{(n-1)^2+k-1} + \frac{2d_n^2}{1+d_n} a_{(n-1)^2+k} = b_{(n-1)^2+k-1}, \\ & \frac{\lambda_n}{d_n} a_{(n-1)^2+k-1} + 2a_{(n-1)^2+k} = b_{(n-1)^2+k}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{6}{n}\rho^3, \quad b_2 = -\frac{6(1+\rho+\rho^2)}{n}, \\ & b_{-i} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, (n-1)^2+k-1), \\ & b_i = \frac{6(\rho^5+\rho^2+\rho+1)}{n\rho^2} \quad (i = 3, 5, \ldots, (n-1)^2-4), \\ & b_i = -\frac{6(\rho^5+\rho^4+\rho^3+1)}{n\rho^3} \quad (i = 2, 4, \ldots, (n-1)^2-3), \\ & b_{(n-1)^2-2} = \frac{6(1+\rho+\rho^2)}{n\rho^2}, \quad b_{(n-1)^2-1} = -\frac{6}{n\rho^2}, \\ & \vdots \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$b_i = 0 \qquad (i = (n-1)^2, \dots, (n-1)^2+\sigma_n-2),$$

$$b_i = 6\frac{c_i - c_{i-1}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}} \qquad (i = (n-1)^2+\sigma_n-1, \dots, (n-1)^2+\sigma_n+\nu_n),$$

$$b_i = 0 \qquad (i = (n-1)^2+\sigma_n+\nu_n+1, \dots, (n-1)^2+k-1),$$

$$b_{-(n-1)^2-k} = \frac{d_{-(n-1)^2-k}}{h_{-(n-1)^2-k}}, \qquad b_{(n-1)^2+k} = \frac{d_{(n-1)^2+k}}{h_{(n-1)^2+k}}.$$

Для b_i, учитывая (8) и (7), получаем

$$(-1)^i b_i \le -\frac{6}{n\rho^2} = -\frac{\alpha_1}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, (n-1)^2-1),$$

$$|b_i| \le 30\|f_\rho^{n'''}\|_{C[-1,1]} = \alpha_2 \qquad (i = (n-1)^2+\sigma_n-1, \dots, (n-1)^2+\sigma_n+\nu_n), \quad (46)$$

$$|b_{-(n-1)^2-k}| + |b_{(n-1)^2+k}| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Найдем по формуле Крамера $a_0 = \frac{B}{A}$, где A – основной определитель системы (44), а B – определитель, который соответствует a_0 и отличается от A лишь $[(n-1)^2+k+1]$-м столбцом.

Предварительно оценим вспомогательные определители (аналогичные оценки проводились в [5]). Для определителя

$$F_j = F_j(\rho) = \begin{vmatrix} 2\rho(1+\rho) & \rho^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\rho(1+\rho) & \rho^3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & 2\rho(1+\rho) & \rho^3 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\rho(1+\rho) \end{vmatrix}$$

при $\rho \ge 2$, $j \ge 1$ справедливы оценки

$$\frac{3}{4}\,\frac{\varepsilon^{j+1}}{2\rho\sqrt{1+\rho+\rho^2}} \le F_j \le \frac{\varepsilon^{j+1}}{2\rho\sqrt{1+\rho+\rho^2}}, \qquad (47)$$

где $\varepsilon = \rho(1+\rho+\sqrt{1+\rho+\rho^2})$. Отсюда следует оценка

$$\frac{3}{4}\,\frac{\varepsilon_1^{j+1}}{2\sqrt{3}} \le E_j \le \frac{\varepsilon_1^{j+1}}{2\sqrt{3}}, \quad E_j = F_j(1), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon(1) = 2+\sqrt{3}.$$

Для определителей

$$M_j = \begin{vmatrix} 2 & g & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad K_j = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \cdots & & 0 & g & 2 \end{vmatrix}$$

при $j \ge 3$, полагая $E_0 = I$, получаем

$$K_j = M_j = (2\beta - \alpha g)E_{j-2} - E_{j-3}. \qquad (48)$$

Так как $\alpha = \frac{2d_n^2}{1+d_n}$, $\beta = \frac{3+5d_n}{1+d_n}$, $1 \le d_n < 2$, $0 < 4 - gd_n < M+4$, то легко получить оценки

$$0 < M_{j-1} \le M_j, \quad M_j \ge (2\beta - 1 - \alpha g)E_{j-2} \ge 3E_{j-2} \ge \frac{9}{4}\,\frac{\varepsilon_1^{j-1}}{2\sqrt{3}},$$
$$M_j \le (2\beta - \alpha g)E_{j-2} = 2\left(\beta - \frac{d_n}{1+d_n}d_n g\right)E_{j-2} \le \frac{(5+M)\varepsilon_1^{j-1}}{\sqrt{3}}. \qquad (49)$$

Оценим определители

$$\Delta_{k+2+i} = \begin{vmatrix} 2 & g & 0 & & & \cdots & & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & & & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 4 & 1 & & & \\ \vdots & & & \rho(1+\rho) & \rho(5+3\rho) & 2 & & \\ & & & & \rho^3 & 2\rho(1+\rho) & 1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \rho^3 & 2\rho(1+\rho) & 1 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & \rho^3 & 2\rho(1+\rho) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left.\right\} k+2 \\ \\ \\ \\ \\ \left.\right\} i \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$D_{k+2+i} = \begin{vmatrix} 2\rho(1+\rho) & \rho^3 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 1 & 2\rho(1+\rho) & \rho^3 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & 2\rho(1+\rho) & \rho^3 & & & & \vdots \\ \vdots & & 2 & \rho(5+3\rho) & \rho(1+\rho) & & & \\ \vdots & & & 1 & 4 & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & & & \cdots & & 0 & g & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \left.\right\} k+2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

где $i, k \ge 0$, а ограничения на α, β и g такие же, как и выше. Для этих определителей получаем

$$\Delta_{k+2+i} = D_{k+2+i} = F_i[\rho(5+3\rho)M_{k+1} - \rho(1+\rho)M_k] - 2\rho^3 M_{k+1}F_{i-1} =$$

$$= F_i M_{k+1}\rho(4+2\rho) - \rho(1+\rho)(M_{k+1} - M_k) - 2\rho^3 M_{k+1}F_{i-1} \geq$$

$$\geq F_i M_{k+1}\left[2\rho(1+\rho) - \frac{2\rho^3}{3\varepsilon}\right] \geq \beta_1\varepsilon_1^k\varepsilon^i, \qquad (50)$$

и также

$$\Delta_{k+2+i} = D_{k+2+i} \leq \rho(5+3\rho)F_i M_{k+1} \leq \beta_2\varepsilon_1^k\varepsilon^i, \qquad (5I)$$

где β_1 и β_2 положительные постоянные, зависящие только от ρ.

Сейчас, полагая для определителей M_j и Δ_{k+2+i} $g=\frac{\mu_n}{d_n}$, а для K_j и D_{k+2+i} $g=\frac{\lambda_n}{d_n}$, можем оценить определители A и B.

Раскрывая определитель A по элементам $[(n-1)^2+k+1]$-й строки, получаем оценки

$$0 < A < \rho(1+3\rho)\Delta_{k+(n-1)^2} D_{k+(n-1)^2} \leq \beta_3\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{2(n-1)^2}, \qquad (52)$$

где β_3 – положительная постоянная, зависящая только от ρ.

Оценим теперь определитель B, который отличается от A тем, что $[(n-1)^2+k+1]$-й столбец определителя A заменен на столбец из свободных членов системы (44). Раскрывая B по элементам b_i, получаем

$$B = L_1 + L_2 + L_3 + L_4, \qquad (53)$$

где

$$L_1 = \Delta_{k+(n-1)^2}\sum_{i=1}^{(n-1)^2-1}(-1)^i b_i\rho^{3i}D_{k+(n-1)^2-i},$$

$$L_2 = D_{k+(n-1)^2}\sum_{i=1}^{(n-1)^2-1}(-1)^i b_{-i}\rho^{3i}\Delta_{k+(n-1)^2-i},$$

$$L_3 = (-1)^{\sigma_n}\rho^{3(n-1)^2-2}(1+\rho)\Delta_{k+(n-1)^2}\sum_{i=0}^{\nu_n+1}(-1)^i b_{(n-1)^2+\sigma_n+i-1}\times$$

$$\times K_{k-\sigma_n-i+1} + (-1)^{k+1}b_{(n-1)^2+k}\rho^{3(n-1)^2-2}(1+\rho)\Delta_{k+(n-1)^2}\frac{2d_n^2}{1+d_n},$$

$$L_4 = (-1)^{\sigma_n}\rho^{3(n-1)^2-2}(1+\rho)D_{k+(n-1)^2}\sum_{i=0}^{\nu_n+1}(-1)^i b_{-(n-1)^2-\sigma_n-i+1}\times$$

$$\times M_{k-\sigma_n-i+1} + (-1)^{k+1}b_{-(n-1)^2-k}\rho^{3(n-1)^2-2}(1+\rho)D_{k+(n-1)^2}\frac{2d_n^2}{1+d_n}.$$

Подставляя значения b_i (45) и учитывая оценки (46),(50),(5I), получаем для $j = 1,2$

$$L_j \leq -\beta_1\varepsilon_1^k\varepsilon^{(n-1)^2-2}\sum_{i=1}^{(n-1)^2-1}\frac{\alpha_1}{n}\rho^{3i}\varepsilon_1^k\varepsilon^{(n-1)^2-i-2} \leq$$

$$\leq -\beta_4\frac{\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{2(n-1)^2}}{n}\sum_{i=1}^{(n-1)^2-1}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^i.$$

Далее, учитывая (49), получаем для $j = 3,4$

$$|L_j| \leq \beta_2\varepsilon_1^k\varepsilon^{(n-1)^2-2}\rho^{3(n-1)^2-2}(\rho+1)\sum_{i=0}^{\nu_n+1}\alpha_2\frac{(5+M)}{\sqrt{3}}\varepsilon_1^{k-\sigma_n-i+1} +$$

$$+3(|b_{-(n-1)^2-k}|+|b_{(n-1)^2+k}|)\rho^{3(n-1)^2-2}(\rho+1)\beta_2\varepsilon_1^k\varepsilon^{(n-1)^2-2} \leq$$

$$\leq \beta_5\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{(n-1)^2}\frac{\nu_n\rho^{3(n-1)^2}}{\varepsilon_1^{\sigma_n}} + \beta_6(|b_{-(n-1)^2-k}| +$$

$$+ |b_{(n-1)^2+k}|)\rho^{3(n-1)^2}\varepsilon_1^k\varepsilon^{(n-1)^2},$$

где β_4, β_5 и β_6 – положительные постоянные, зависящие только от ρ.

Так как $\nu_n\rho^{3(n-1)^2}\varepsilon_1^{-\sigma_n} \to 0$ и $\rho^{3(n-1)^2}\varepsilon_1^{-k} \to 0$ при $n \to \infty$, то для B получаем оценку

$$B \leq L_1 + L_2 + |L_3|+|L_4| \leq -2\beta_4\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{2(n-1)^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(n-1)^2-1}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^i +$$

$$+ 2\beta_5\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{2(n-1)^2}\frac{\nu_n\rho^{3(n-1)^2}}{\varepsilon_1^{\sigma_n}} +$$

$$+\, 2\beta_6\left(|b_{-(n-1)^2-k}|+|b_{(n-1)^2+k}|\right)\frac{\rho^{3(n-1)^2}}{\varepsilon_1^{k}}\,\varepsilon_1^{2k}\,\varepsilon^{(n-1)^2}\le$$

$$\le -\frac{\beta_7}{n}\,\varepsilon_1^{2k}\varepsilon^{2(n-1)^2}\sum_{i=1}^{(n-1)^2}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^i , \qquad (54)$$

где β_7 – положительная постоянная, зависящая только от ρ.

Учитывая (52) и (54), для a_0 выводим оценку

$$a_0=\frac{B}{A}\le -\frac{\beta_7}{n\beta_3}\sum_{i=1}^{(n-1)^2}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^i=-\frac{\beta_8}{n}\sum_{i=1}^{(n-1)^2}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^i .$$

Заметим, что если $\rho^3=\varepsilon$, то $\rho=\rho_1$ и $\rho^3>\varepsilon$, если $\rho>\rho_1$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{(n-1)^2}\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)=\begin{cases}(n-1)^2, & \text{если } \rho=\rho_1,\\[2mm] \dfrac{\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^{(n-1)^2}-\left(\frac{\rho^3}{\varepsilon}\right)}{\frac{\rho^3}{\varepsilon}-1}, & \text{если } \rho>\rho_1 .\end{cases}$$

Значит, окончательно получаем

$$a_0\le\begin{cases}-\beta_9 n, & \text{если } \rho=\rho_1,\\[2mm] -\dfrac{\beta_9}{n}\left(\dfrac{\rho^3}{\varepsilon}\right)^{(n-1)^2}, & \text{если } \rho>\rho_1 .\end{cases}$$

Этим заканчивается доказательство теоремы для случая $s=1$. Очевидно, что при $s\ge 2$, заменив при построении сетки $\bar{\Delta}_n$ и функции f_ρ число ρ на $\sqrt[s]{\rho}$, получим оценку (4I).

Литература

I. BIRKHOFF G., BOOR C. de Error bounds for spline interpolation. - "J.Math.Mech.", 1964, v.13, p.827-835.

2. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", I972.

3. SHARMA A., MEIR A. Degree of approximation of spline interpolation. - "J.Math.Mech.", 1966, v.15, p.759-767.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с.23-73.

5. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. -"Труды МИАН СССР", I975, т. I38, с. 7I-93.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 ноября I976 года