МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 517.5

СХОДИМОСТЬ СПЛАЙНОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

И.А. Пахнутов

1. Рассмотрим разбиения $\Delta_N = \{x_p: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$ конечного отрезка $K = [a,b]$. Пусть заданы числа $n, \gamma, r, k \ge 0$ так, что $r = k+\gamma+1 \le n$, и множество целых чисел $s = \{s_i: 0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_r \le n-1\}$. Выберем $k+2$ неотрицательных числа $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{k+1} = 1$ и по ним построим множество $\delta_{pN} = \{x_{pi} = x_p + h_p\tau_i : x_p \in \Delta_N,\ i = 0,1,\ldots,k+1\}$, $p = 0,\ldots,N-1$, $h_p = x_{p+1} - x_p$. Назовем множество $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ правильным, если $\tau_i = 1 - \tau_{k+1-i}$, $i = 0,\ldots,k+1$. Сетки $\delta = \delta_N = \bigcup_{p=0}^{N-1} \delta_{pN} \supset \Delta_N$ будем называть правильными, если множество τ правильное. Обозначим также $I = \{i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $C^i(K) = \{f: f^{(i)}$ непрерывна на $K\}$,

$$\|\cdot\|_{C(K)} = \sup_{x\in K}|\cdot|,\quad \omega(f,t) = \sup_{|x-y|\le t,\ x,y\in K}|f(x) - f(y)|.$$

Пусть задана функция $f \in C^\mu(K)$, $\mu = n + \gamma$. Сплайн $S = S_N = S(\Delta_N, f)$ степени μ (сплайн с дополнительными узлами склейки) определим условиями [1] - [3], [10]:

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } S_N \in C^{n-1}(K); \\ \text{б) на каждом отрезке } [x_p, x_{p+1}],\ \forall p,\ S_N \in C^{\mu-1}([x_p,x_{p+1}]); \\ \text{в) на каждом отрезке } [x_{pj}, x_{p,j+1}],\ 0 \le p < N,\ 0 \le j \le k, \\ S_N \in P_\mu, \text{ то есть является полиномом степени не выше } \mu; \\ \text{г) } S_N^{(i)}(x_p) = f^{(i)}(x_p) \text{ для всех } i \in I, \text{ если } p=0 \text{ и } i \\ \text{пробегает } s \text{ при } p > 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Можно показать, что сплайны с дополнительными узлами определяются на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]$ только значениями своих производных порядка $i \in I$ в точке x_p и порядка $i \in s$ в точке x_{p+1}. При $k = 0$ и $\gamma = n-1$ эти сплайны совпадают с эрмитовыми сплайнами. При остальных допустимых значениях k и γ условия на сплайн на

концах каждого отрезка $[x_p, x_{p+1}]$ распределены неравномерно. Большая часть условий задается в точке x_p. Таким образом, на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]$ сплайны можно строить последовательно для $p = 0,1,\ldots,N-1$, так что для определения коэффициентов сплайна нет необходимости решать большие линейные системы уравнений. Сплайны с дополнительными узлами обладают некоторой локальностью: для построения сплайна на $[x_p, x_{p+1}]$ используется информация, задаваемая лишь в узлах x_i, $0 \le i \le p+1$. Такие сплайны удобно применять для приближенного решения задач с начальными условиями (например, задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, восстановление функций на отрезке, где на левом конце задано больше информации о функции, чем в других точках отрезка, и т.д.), несмотря на невысокий порядок сходимости по сравнению с обычными полиномиальными сплайнами, интерполирующими те же сеточные данные (см., например, [4]).

Лоскалцо [5] показал, что применение полиномиальных сплайнов дефекта 1 (т.е. при $\gamma=0$, $k=0$) к задачам с начальными условиями ограничивает степень сплайнов (при $n > 3$ приближенное решение не сходится к точному). Приближенное решение таких задач с помощью эрмитовых сплайнов [6], т.е. сплайнов, использующих некоторые производные решения в узлах сетки, сходится к точному при произвольной степени сплайна. Однако эрмитовы сплайны имеют высокую степень и небольшую гладкость (сплайны степени $2n-1$ имеют дефект n). Введение дополнительных узлов позволяет уменьшить степень сплайна, не уменьшая его гладкости.

В работе изучаются условия сходимости (расходимости) процесса последовательного построения сплайнов с дополнительными узлами (в дальнейшем просто сплайнов) и приводятся соответствующие оценки уклонения сплайнов от интерполируемых функций. Показано, в частности, что с точки зрения сходимости равномерное распределение узлов склейки для таких сплайнов не является наилучшим. В некоторых случаях специальный выбор дополнительных узлов позволяет улучшить сходимость сплайнов, в частности, оказывается возможным построить сплайн дефекта 1 (т.е. при $\gamma = 0$), степень и порядок сходимости которого совпадают со степенью и порядком сходимости соответствующего эрмитового сплайна (см.следствие к теореме 4, стр. 42).

2. Пусть наряду с τ произвольно заданы числа $\tau_\xi < \tau_{\xi-1} < \ldots < \tau_{-1} < 0$, где $\xi = -\mu$, если $\gamma > 0$, и $\xi = 0$ при $\gamma = 0$. В [2] было показано, что сплайн S на каждом отрезке $[x_p, x_{p+1}]$ можно представить в виде

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} S^{(i)}(x_p)\,\frac{(x-x_p)^i}{i!} + \frac{1}{\mu!}\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_j(x-x_{pj})_+^{\mu} \tag{2}$$

единственным образом, где $x_{pj} = x_p + h_p\tau_j$, $\xi \le j \le k$, $\varphi(x)_+ = \max(0,\varphi(x))$, а коэффициенты α_j определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_j(1-\tau_j)^{\mu-l} = (\mu-l)!\,h_p^{l-\mu}\left[S^{(l)}(x_{p+1}) - \sum_{i=l}^{n-1} S^{(i)}(x_p)\frac{h_p^{i-l}}{(i-l)!}\right], l\in s,\\ &\sum_{j=\xi}^{-1}\alpha_j\tau_j^{\mu-i} = 0, \quad i\in I. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассматривая последовательность сеток Δ_N будем всюду в дальнейшем предполагать, что $\tau=\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ не зависит от N. Приведем в удобном для последующего изложения виде результат:

ТЕОРЕМА I [2]. Пусть задана последовательность сеток Δ_N, $N\to\infty$, и $s=\{s_i=s_1+i-1,\ i=1,\dots,r,\ s_r=n-1\}$. Тогда для произвольной $f\in C^{\mu}(K)$

$$\|S^{(l)} - f^{(l)}\|_{C(K)} \le CH^{m(l)}\omega(f^{(\mu)},H), \tag{4}$$

где $l=0,\dots,\mu$, $m(l) = \mu - s_1 - (l-s_1)_+$, $h=\max_p h_p$ и константа C не зависит от H.

Фактически константа C в теореме I зависит лишь от типа сплайна, т.е. от h,γ,r,s,τ. Это замечание в равной мере относится ко всем последующим оценкам уклонения сплайнов и не будет оговариваться особо.

Покажем, что если s не удовлетворяет условиям теоремы I, то оценки (4) могут не выполняться.

В [2] было показано, что если положить

$$\sigma_{lt} = S^{(l)}(x_p+th_p)\cdot h_p^l/l!,\ l = 0,\dots,\mu,\ t\in[0,1],$$

то

$$\sigma_{lt} = \sum_{i=0}^{n-1}\eta_{li}(t)\sigma_{i0} + \sum_{j=1}^{r}\rho_{lj}(t)\sigma_{s_j,1}, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{li}(t) = \binom{i}{l}t^{i-l} - \sum_{j=1}^{r}\binom{i}{s_j}\rho_{lj}(t),\\ &\rho_{lj}(t) = \binom{\mu}{l}\binom{\mu}{s_j}^{-1}\nu_{lj}(t),\quad \nu_{lj}(t) = \sum_{q=\xi}^{k} g_{q-\xi+1,j}(t-\tau_q)_+^{\mu-l}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

g_{ij} – элементы матрицы $G = A^{-1}$, $A = (a_{ij})$ – матрица системы (3),

$$\binom{i}{j} = \begin{cases} \dfrac{i!}{j!(i-j)!}, & i \ge j \ge 0\\ 0 & \end{cases}.$$

При этом для любой функции $f\in C^{\mu}(K)$

$$f^{(l)}(x)h_p^l/l! = \sum_{i=0}^{n-1}\eta_{li}(t)f^{(i)}(x_p)h_p^i/i! + \sum_{j=1}^{r}\rho_{lj}(t)f^{(s_j)}(x_{p+1})h_p^{s_j}/s_j! + R_{lp}(x), \tag{7}$$

$$0\le l\le\mu,\quad |R_{lp}(x)| \le C\omega(f^{(\mu)},h_p)h_p^{\mu}/l!,\quad t = (x-x_p)/h_p.$$

В дальнейшем для краткости будут употребляться обозначения

$$\eta_{lj} = \eta_{lj}(1),\quad \rho_{lj} = \rho_{lj}(1),\quad \nu_{lj} = \nu_{lj}(1). \tag{8}$$

Если $s_1 > 0$, то можно ограничиться изучением сходимости $S^{(i)}$ к $f^{(i)}$ для $i = s_1, s_2,\dots,s_r$. Сходимость (соответственно расходимость) $S^{(i)}$ для $i = 0,1,\dots,s_1-1$ получается тогда интегрированием разности $(S^{(s_1)} - f^{(s_1)})(x)$ по отрезку K с учетом начальных условий (I,r) (соответственно применением неравенства Маркова для норм производных полинома). Поэтому в дальнейшем, не уменьшая общности, будем полагать $s_1 = 0$. В таком случае множества s будут рассматриваться лишь следующих двух видов.

Для натурального $j<n$

$$s = \{s_i = 0,1,\dots,j-1,\ j+1,\dots,n-2,n-1\}. \tag{9}$$

Для некоторого целого $q \ge 0$

$$s = \{s_i = i-1,\ i = 1,2,\dots,r,\ r = n-q\}. \tag{10}$$

Заметим, что в (5) и (7) входят лишь первые r компонент вектора $\nu_l(t) = \{\nu_{l1}(t),\dots,\nu_{l,r+m}(t)\}^T$, где индекс T вверху обозначает транспонирование. Если обозначить $b_l = \{(1-\tau_\xi)^{\mu-l},\dots,(1-\tau_k)^{\mu-l}\}^T$, то, как нетрудно видеть из (3), (6) и (8), вектор

$\nu_l = \{\nu_{l1}, \ldots, \nu_{l,n+r}\}^T$ является решением системы уравнений

$$A^T \nu_l = b_l \; . \tag{II}$$

Из последних k уравнений (II) имеем

$$Q_{\mu,l}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{l1}\, x^{\mu-s_1} + \ldots + \nu_{lr}\, x^{\mu-s_r} = x^{\mu-l} \tag{I2}$$

при $x = x_i = 1 - \tau_{k+1-i}$, $i = 1, \ldots, k+1$.

Из первых $\mu+1$ уравнений (II) следует, что

$$\nu_{l1}(1-x)^{\mu-s_1} + \ldots + \nu_{lr}(1-x)^{\mu-s_r} + \nu_{l,r+1}x^{\mu} + \ldots + \nu_{l,r+n}x^{\gamma+1} = (1-x)^{\mu-l} \tag{I3}$$

при $x = \tau_i$, $i = 0, -1, \ldots, \xi$, т.е. в $\mu+1$-й точке равенство (I3) выполняется тождественно. Приравнивая в (I3) коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получаем

$$\sum_{j=1}^{r} \binom{\mu-s_j}{i} \nu_{lj} = \binom{\mu-l}{i}, \quad i = 0, 1, \ldots, \gamma \; .$$

Отсюда и из (I2) приходим к равенствам

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i \left(Q_{\mu,l}(x) - x^{\mu-l}\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \gamma \; . \tag{I4}$$

Пусть $l \in I \setminus s$. При условии (9) $l = j$, и тогда из (I2) и (I4) сразу следует, что полином $Q_{\mu,j}$ имеет вид

$$Q_{\mu,j}(x) = x^{\mu-j} + Cx^{\gamma+1}\omega(x)(x-1)^{\gamma+1} \; ,$$

где $\omega(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)$, $x_i = 1 - \tau_{k+1-i}$, причем $Q^{(\mu-j)}_{\mu,j}(0) = 0$. Отсюда сразу получаем выражение для константы

$$C = -(n-j-1)! \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j-1} \left\{\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}\right\}_{x=0}\right]^{-1} .$$

Но тогда

$$Q_{\mu,j}(x) = x^{\mu-j} - \frac{(n-j-1)!\, x^{\gamma+1}\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}}{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j-1} \{\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}\}_{x=0}} \; . \tag{I5}$$

Если же выполнены условия (I0), то из (I2) и (I4) получаем

$$Q_{\mu,l}(x) = x^{\mu-l}\left(1 + \omega(x)(x-1)^{\gamma+1} R_{l-r}(x)\right), \tag{I6}$$

где $R_{l-r}(x) = \sum_{i=0}^{l-r} c_i x^i$ – некоторый полином, и

$$Q^{(i)}_{\mu,l}(0) = 0, \quad i = \mu-1, \ldots, \mu-r. \tag{I7}$$

Очевидно, (I7) эквивалентно следующим условиям:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i \left[1 + \omega(x)(x-1)^{\gamma+1} R_{l-r}(x)\right]_{x=0} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-r, \tag{I8}$$

которыми полином R_{l-r} определяется однозначно. Нам понадобится также выражение, которое сразу же следует из (6), (8) и (I2):

$$\eta_{li} = \frac{i!}{l!(\mu-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-i} \left[x^{\mu-l} - Q_{\mu,l}(x)\right]_{x=1} \quad \forall l, i \in I \setminus s. \tag{I9}$$

При $k > 0$ выберем произвольно k чисел a_i, $i = 1, \ldots, k$, так чтобы $0 < a_1 < \ldots < a_k < 1$, и положим

$$\tau_i = \lambda a_i, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \lambda \in (0, 1]. \tag{20}$$

Тогда, очевидно, условиями (I2), (I6) и (I8) числа ν_{lj} , а следовательно, и ρ_{lj} и η_{li} $\forall l, i \in I \setminus s$, $j = 1, \ldots, r$, определяются как непрерывные функции λ . Покажем, что ν_{lj} , а также ρ_{lj} и η_{li} равномерно ограничены по λ ($\lambda \in (0,1]$). При $\lambda \to 0$ выражение (I6) переходит в следующее

$$Q_{\mu,l}(x) = x^{\mu-l}\left(1 + (x-1)^r R_{l-r}(x)\right), \tag{2I}$$

где $R_{l-r}(x)$ при $l=j$ имеет вид $C\,x^{\gamma+1}$, **условия (I7) остаются** без изменений. Отсюда и из (I7) сразу следует ограниченность ν_{lj}, ρ_{lj}, η_{li} при $\lambda \to 0$ и, следовательно, равномерная ограниченность по всем $\lambda \in (0,1]$. При любых $\lambda \in (0,1]$ соотношения (5) точны для всех полиномов степени не выше μ , а тогда по теореме Пеано получим равномерную ограниченность по λ константы C в оценке остаточного члена $R_{lp}(x_{p+1})$ в (7). Можно также показать, что $|\nu_{lj}(t)|$, а также $|\rho_{lj}(t)|$, $|\eta_{li}(t)|$ и $|R_{lp}(x_p + th_p)|$ равномерно ограничены по $\lambda \in (0,1]$ при всех $t \in (\tau_k, 1]$. Однако для $t \in [0, \tau_k]$ можно гарантировать лишь неравенство $|\nu_{lj}(t)| \le C_1 \lambda^{-k+1}$, где C_1 уже не зависит от λ, а тогда для R_{lp} из (7) имеем оценку

$$|R_{lp}(x)| \le C_2 \lambda^{-k+1} h_p^{\mu} \omega(f^{(\mu)}, h_p), \tag{22}$$

где константа C_2 не зависит от λ.

При условии (9) (тогда $r = n-1$) и $l = j$ из (2I), (I5) и (I9) получаем

$$\eta_{jj} \to (-1)^j \binom{\gamma+1}{j} \binom{r}{j}^{-1} = (-1)^j \varkappa, \quad \lambda \to 0, \tag{23}$$

и так как $r = k+\gamma+1$, то $\varkappa<1$ при $k > 0$. Если s удовлетворяет условию (I0), то из (I9) и (2I) имеем

$$\eta_{ii} \to 0 \text{ при } \lambda \to 0, \quad i \ge \mu - r + 1 = n-k. \tag{24}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть фиксировано j, $s_1 < j \le n-1$ и $s = \{s_1, \dots, j-1, j+1, \dots, n-1\}$, тогда

а) для любой последовательности правильных сеток δ_N, $N \to \infty$, и любой $f \in C^{\mu}(K)$

$$\|S^{(l)} - f^{(l)}\|_{C(K)} \le C\omega(f^{(\mu)}, H) H^{\varkappa(l)-1}, \quad l = 0, \dots, \mu, \tag{25}$$

при этом оценки (25) неулучшаемы на классе $C^{\mu}(K)$;

б) если $k > 0$, то числа $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ можно выбрать так, что справедливы оценки (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, будем считать $s_1 = 0$. Так как сетки δ_N правильные, то $\tau_i = 1-\tau_{k+1-i}$, $i=1,2,\dots,k$. Тогда, пользуясь симметрией $\omega(x)$ относительно середины отрезка $[0,1]$, из (I5) и (I9) приходим к равенству $|\eta_{jj}| = 1$. Из (5) и (7) (для $l = j$) и условий интерполяции (I, r) получаем

$$\varepsilon_{p+1,j} h_p^j / j! \le \varepsilon_{pj} h_p^j / j! + C h_p^{\mu} \omega(f^{(\mu)}, H),$$

где $\varepsilon(x)_j = |S^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)|$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(x_i)_j$, $x_i \in \Delta_N$, и вследствие (I, r) $\varepsilon_{0j} = 0$, $\varepsilon_{pi} = 0$, $\forall p$, $\forall i \in s$ или

$$\varepsilon_{p+1,j} \le \varepsilon_{pj} + C_1 h_p^{\mu-j} \omega(f^{(\mu)}, H) \le C_2 H^{\mu-j-1} \omega(f^{(\mu)}, H), \quad p = 0,1,\dots .$$

Пусть теперь $l \ne j$. Учитывая полученную для ε_{pj} оценку, из (5)-(7) и (I, r) имеем, как и выше,

$$\varepsilon(x)_l h_p^l / l! \le \sum_{i=0}^{n-1} |\eta_{li}(t)| \varepsilon_{pi} h_p^i / i! + \sum_{i=1}^{r} |\rho_{li}(t)| \varepsilon_{p,s_i} h_p^{s_i} / s_i! +$$

$$+ C H^{\mu} \omega(f^{(\mu)}, H) \le |\eta_{lj}(t)| \varepsilon_{pj} h_p^j / j! + C H^{\mu} \omega(f^{(\mu)}, H).$$

Отсюда из оценки для ε_{pj} и ограниченности $\eta_{lj}(t)$ на $[0,1]$ получим оценки (25) для всех l. Докажем теперь неулучшаемость оценок (25) на классе функций $C^{\mu}(K)$. Рассмотрим для простоты равномерные разбиения Δ_N отрезка $[0,1]$ точками $x_p = p/N$, $p = 0,1,\dots,N$. Для сплайна S_N с параметрами n, γ, r выберем условия интерполяции следующим образом. Положим $S_N^{(j)}(x_0) = 0$, $S_N^{(i)}(x_0) = a_{i0} h_N^{\mu-i}$ $\forall i \in I \setminus \{j\}$, $S_N^{(i)}(x_p) = a_{ip} h_N^{\mu-i}$ $\forall i \in s$, $p > 0$, $h_N = 1/N$, где a_{ip}, $p \ge 0$, выбираются в соответствии с условиями

$$\sum_{i=1}^{r} (\eta_{j,s_i} a_{s_i,p} + \rho_{ji} a_{s_i,p+1}) / s_i! = [\operatorname{sign}(\eta_{jj})]^p$$

и для некоторого $M > 0$ пусть $|a_{ip}| \le M$ $\forall i, p$. В остальном выбор a_{ip} произволен. Из (6), (8), (I2) и (I4) следует, что все η_{j,s_i}, ρ_{ji} равны нулю и, следовательно, такой выбор a_{ip} возможен. Возьмем в качестве $\varphi_N \in C^{\mu}(K)$ сплайн с параметрами $\bar{n} = \mu+1$, $\bar{\gamma} = 0$, $\bar{r} = \mu+1$, $\bar{s} = \{s_i = i-1,\ i = 1,\dots,\bar{r}\}$ при следующих условиях интерполяции:

$$\varphi_N^{(i)}(x_p) = \begin{cases} S_N^{(i)}(x_p), \forall i \in I \text{ при } p=0 \text{ и } \forall i \in s \text{ при } p > 0, \\ 0 \text{ для } i=n,\dots,\mu \text{ при } p=0 \text{ и } \forall i \in \{0,\dots,\mu\} \setminus s, \text{ если } p > 0. \end{cases}$$

Из (5) сразу получим $\omega(\varphi_N^{(\mu)}, h_N) \le C$, где C зависит лишь от выбора a_{ip}, но не от h_N. Тогда, очевидно,

$$\sigma_{j,p+1} = \eta_{jj} \sigma_{jp} + [\operatorname{sign}(\eta_{jj})]^p h_N^{\mu}, \quad p = 0,\dots,N.$$

Так как $|\eta_{jj}| = 1$ для правильных сеток, то из предыдущего соотношения имеем $\max_p |\sigma_{jp}| = h_N^{\mu-1}$ и, следовательно, $\|S_N^{(j)} - \varphi_N^{(j)}\|_{C[0,1]} \ge$ $\ge C h_N^{\mu-j-1} \omega(\varphi_N^{(\mu)}, h_N)$. Тогда по неравенству Маркова $\|S_N^{(l)} - \varphi_N^{(l)}\|_{C[0,1]} \ge C h_N^{\mu-l-1} \omega(\varphi_N^{(\mu)}, h_N)$ для $l=0,\dots,j$. Отсюда и из (5) получим аналогичные оценки снизу для всех $l = 0,\dots,\mu$. Рассмотрим для произвольного $\varepsilon > 0$ оператор $L_N : C^{\mu}([0,1]) \to C([0,1])$, который каждой $\varphi \in C^{\mu}([0,1])$ ставит в соответствие функцию $(\varphi^{(n-1)} - S_N^{(n-1)}) h_N^{n-\mu-\varepsilon}$. Тогда по предыдущему последовательность $\|L_N\|$ не является ограниченной и по теореме Банаха-Штейнгауза найдется функция $f \in C^{\mu}([0,1])$ такая, что

$$\|L_N(f)\| = \|f^{(n-1)} - S_N^{(n-1)}\|_{C[0,1]} h_N^{n-\mu-\varepsilon} \to \infty.$$

Отсюда в силу произвольности ε имеем $\|f^{(i)} - S_N^{(i)}\|_{C[0,1]} \ge C h_N^{\mu-i-1}$, $i=0,\dots,n-1$. Таким образом пункт "а" теоремы доказан полностью.

Докажем "б". Если $k > 0$, то в соответствии с (20) и (23) выберем τ так, чтобы $|\eta_{jj}| = \varkappa < 1$. Тогда по аналогии с доказательством пункта "а" получим

$$\varepsilon_{p+1,j} \le \varkappa\varepsilon_{p,j} + C\, h_p^{\mu-j}\omega(f^{(\mu)},H) \le \frac{1}{1-\varkappa}\, C_1 H^{\mu-j}\omega(f^{(\mu)},H),$$

$$\varepsilon_{0j} = 0, \quad p = 0,1,\ldots ,$$

и, таким образом, для $l=j$ оценки (4) выполняются. Теперь из (5), (7) и (I,г) легко получить оценки (4) для всех l. Теорема доказана.

Заметим, что сплайн S, интерполирующий в узлах Δ_N не все производные f порядка от s_1 до $n-1$, принято называть лакунарным [7]. Теорема 2 гарантирует сходимость лакунарных сплайнов рассматриваемого типа с одним пропуском интерполяции независимо от того, где этот пропуск находится в списке сеточных данных.

3. Займемся теперь вопросами сходимости сплайнов, не интерполирующих старшие производные функции. Приведем сначала несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА I. Для любого целого x

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{x+1}{p-i}\binom{x+i}{i} = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 0, & p>0. \end{cases} \qquad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (26) есть следствие формулы Брила [8].

ЛЕММА 2. Пусть $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, удовлетворяют условию $x_i = 1 - x_{k+1-i}$ и $\omega(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i)$, тогда $\omega^{(i)}(1) = |\omega^{(i)}(0)|$ $\forall i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально.

ЛЕММА 3. Пусть даны полиномы $\tilde R_q(x) = \sum_{i=0}^{q}\tilde c_i x^i$, $\tilde c_0 = 1$, $\tilde c_i \ge 0$, $i > 0$, и $\omega(x)$ из леммы 2, $a = 1/\omega(0)$. Если полином $R_q(x) = \sum_{i=1}^{q} c_i x^i$ удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i [a\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}R_q(x) - (x-1)^{\gamma+1}\tilde R_q(x)]_{x=0} = 0,\ i=0,\ldots,q,\ \gamma\ge 0, \qquad (27)$$

то $c_i \ge \tilde c_i$ $\forall i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $x_i > 0$, то условия (27) эквивалентны следующим

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i [a\omega R_q - \tilde R_q]_{x=0} = 0, \quad i = 0,\ldots,q. \qquad (28)$$

При $k=0$ имеем $R_q \equiv \tilde R_q$, и, следовательно, в этом случае лемма верна. Пусть $k > 0$. Рассмотрим функцию $U(x) = a\omega(x)R_q(x) - \tilde R_q(x) = -\frac{1}{x_k}(x-x_k)\, V(x) - \tilde R_q(x)$, где $V(x) = -x_k\frac{a\omega(x)}{x-x_k}R_q(x)$. Тогда, по условию леммы, $V(0) = U(0) + \tilde R_q(0) = \tilde R_q(0) = \tilde c_0$. Предположим, что $V^{(i-1)}(0) \ge \tilde R_q^{(i-1)}(0)$, $i \ge 1$. Но тогда $U^{(i)}(0) = V^{(i)}(0) - \frac{1}{x_k}V^{(i-1)}(0) - \tilde R_q^{(i)}(0) = 0$, откуда $V^{(i)}(0) = \frac{1}{x_k}V^{(i-1)}(0) + \tilde R_q^{(i)}(0) \ge \tilde R_q^{(i)}(0)$ и, таким образом, по индукции предыдущее неравенство справедливо для всех $i = 0,\ldots,q$, что, по определению V, эквивалентно неравенствам $R_q^{(i)}(0) \ge \tilde R_q^{(i)}(0)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4 [9]. Пусть $\rho(T)$ – спектральный радиус матрицы $T = (t_{ij})_{i,j=1}^{n}$ и $Sp(T) = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}$ – след матрицы. Если $|Sp(T)| > n$, то $\rho(T) \ge |Sp(T)|/n > 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть s удовлетворяет условию (IO) и $q = n - s_r - 1 \ge 2$. Тогда найдется функция $f \in C^{\mu}(K)$ такая, что на всякой последовательности правильных равномерных сеток δ_N $\|S-f\|_{C(K)} \to \infty$ при $N \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана последовательность равномерных сеток Δ_N, $H=h$. Обозначим через $B = (\eta_{ij})$, $i,j = r, r+1, \ldots, n-1$, $\sigma_p = \{S^{(r)}(x_p)h^r/r!, \ldots, S^{(n-1)}(x_p)h^{n-1}/(n-1)!\}^T$ $\forall p$. Тогда из (5) и (6) получим

$$\sigma_{p+1} = B\sigma_p + D_p, \qquad p = 0,1,\ldots, \qquad (29)$$

где

$$D_p = \{D_{r,p},\ldots,D_{n-1,p}\}^T,\ D_{lp} = \sum_{i=1}^{r}(\eta_{l,s_i}S^{(s_i)}(x_p) + \rho_{li}S^{(s_i)}(x_{p+1}))h^{s_i}/s_i!$$

Пусть Λ – максимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы B и $b = \{b_1,\ldots,b_{n-1}\}^T$ – соответствующий этому значению собственный вектор. Построим функции $f_N \in C^{\mu}(K)$, удовлетворяющие в узлах сеток Δ_N условиям

$$f_N^{(i)}(x_p) = \begin{cases} b_i\, i!\, h^{n-i-1} & \text{при } p = 0,\ i \in s, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \quad i = 0,\dots,\mu,\ \forall p. \end{cases}$$

Тогда для сплайна S, интерполирующего f_N на сетке Δ_N, получим из (29) равенства $\sigma_p = A^p \sigma_0$ $\forall p$, откуда в случае $|A| > 1$ по теореме Банаха–Штейнгауза будет следовать существование функции $f \in C^\mu(K)$ такой, что $\| S-f\|_{C(K)} + \|f\|_{C(K)} \ge \|S\|_{C(K)} \to \infty$ при $N \to \infty$. Покажем теперь, что спектральный радиус $\rho(B) \ge 2$.

Из (I9) имеем

$$Sp(B) = \sum_{l=r}^{n-1} \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-1}\left(x^{\mu-1} - Q_{\mu,l}(x)\right)\Big|_{x=1} = \sum_{l=r}^{n-1} M_{k,l}, \qquad (30)$$

где

$$M_{k,l} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-1}\left[x^{\mu-1}\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}R_{l-r}(x)\right]_{x=1}.$$

Пусть сначала $k = 0$. Тогда $\omega(x) \equiv 1$. Обозначим в этом случае полином R_{l-r} в (I6) через $\tilde R_{l-r} = \sum_{i=0}^{l-r} \tilde c_i x^i$. Полагая в (I8) последовательно $i = 0, 1, \dots, l-r$, приходим к системе уравнений относительно $\tilde c_i$

$$\begin{cases} (-1)^{\gamma+1}\tilde c_0 + 1 = 0, \\ \binom{\gamma+1}{1}\tilde c_0 - \tilde c_1 = 0, \\ \dots \\ \binom{\gamma+1}{l-r}\tilde c_0 - \binom{\gamma+1}{l-r-1}\tilde c_1 + \dots + (-1)^{l-r}\tilde c_{l-r} = 0, \end{cases}$$

решая которую с помощью (26), получим $\tilde c_i = (-1)^\gamma \binom{\gamma+i}{\gamma}$ $\forall i$. Тогда

$$M_{0l} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-1}\left[x^{\mu-1}(x-1)^{\gamma+1}\tilde R_{l-r}(x)\right]_{x=1} =$$

$$= \frac{1}{(n-l-1)!}\left[x^{\mu-1}\tilde R_{l-r}\right]_{x=1}^{(n-l-1)} = (-1)^\gamma \sum_{i=0}^{l-r}\binom{\mu-l+i}{n-l-1}\binom{\gamma+i}{\gamma}.$$

Так как $q = n-r \ge 2$, то нетрудно проверить, что $|M_{0l}| \ge 2$.

Пусть теперь $k > 0$. Обозначим через d_i симметрические функции полинома $\omega(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-x_i) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} d_{k-i}\, x^i$. Из (I8) при

$i = 0$ получим $c_0 = (-1)^{\gamma+k}/d_k$. Полином $(-1)^\gamma \tilde R_{l-r}(x)$ имеет положительные коэффициенты $(-1)^\gamma \tilde c_i = \binom{\gamma+i}{\gamma} \ge 1$. С другой стороны, $\omega R_{l-r}|_{x=0} = (-1)^k d_k c_0 = (-1)^\gamma$, а тогда отсюда и из (I8) следует, что полиномы $(-1)^\gamma \tilde R_{l-r}$ и $(-1)^{k+\gamma} d_k R_{l-r}$ удовлетворяют условиям леммы 3, откуда имеем $|c_i| \ge \binom{\gamma+i}{\gamma}/d_k$ $\forall i$, причем все c_i имеют один и тот же знак. Тогда с помощью леммы 2 получим

$$M_{kl} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-1}\left[x^{\mu-1}\omega(x)(x-1)^{\gamma+1}R_{l-r}(x)\right]_{x=1} =$$

$$= \frac{1}{(n-l-1)!}\left[x^{\mu-1}\omega(x)R_{l-r}(x)\right]_{x=1}^{(n-l-1)},$$

откуда

$$|M_{kl}| = \frac{1}{(n-l-1)!}\left|\omega(x)\left[x^{\mu-1}R_{l-r}(x)\right]^{(n-l-1)} + \dots\right|_{x=1} \ge |M_{0l}|.$$

Здесь использован тот факт, что все слагаемые в предыдущей сумме одного знака. Из лемм 2 и 3 следует, что все M_{kl} также одного знака. Теперь, используя полученные неравенства для $|M_{kl}|$, из (30) имеем $|Sp(B)| \ge 2q$, и, по лемме 4, $\rho(B) \ge 2$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 обобщает известный результат [5] о расходимости сплайнов.

4. Выпишем условия, при которых последовательность сплайнов из теоремы 3 можно сделать сходящейся.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть s удовлетворяет условию (I0) при $q \ge 0$ и пусть сетки Δ_N таковы, что $H/h \le \beta$ для некоторого $\beta > 0$ при всех N. Тогда если $k \ge q$, то $\tau = \{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ можно выбрать так, что сплайны S_N сходятся к интерполируемой функции и справедливы оценки (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи $q=0$ и $q=1$ рассмотрены соответственно в теоремах I и 2,б. Пусть задана $f \in C^\mu(K)$ и последовательность сеток Δ_N, $N \to \infty$, удовлетворяющая условиям теоремы. Обозначим $E_{pi} = |f^{(i)}(x_p) - S_N^{(i)}(x_p)|\, H^i/i!$, $E_p = \{E_{pr}, \dots, E_{p,n-1}\}^T$, $B = (\eta_{ij})_{i,j=r}^{n-1}$. Тогда из (5)-(7) и (I,г) получим

$$\|E_{p+1}\| \le \beta^{n-1}\|B\|\cdot\|E_p\| + \|D_p\| , \quad p = 0,1,\ldots , \qquad (31)$$

где $D_p = \{R_{rp}(x_{p+1}),\ldots,R_{n-1,p}(x_{p+1})\}^T$, $R_{ip}(x_{p+1})$ – остаточный член в (7) и $\|D_p\| \le CH^{\mu}\omega(f^{(\mu)},H)$. Фиксируем некоторое $\varkappa, 0<\varkappa<1$. Поскольку $\|B\| \le q \max\limits_{ij}|\eta_{ij}|$, то, выбрав $\{\tau_i\}_{i=1}^{k}$ в соответствии с (20), найдем $\lambda_0=\sup\{\lambda: \max\limits_{ij}|\eta_{ij}| \le \beta^{1-n}\varkappa/q\}$ (по (24), такое $\lambda=\lambda_0$ существует). Тогда для такого τ получим из (31), учитывая оценки для $\|D_p\|$ $\forall p$,

$$\max_p|f^{(i)}(x_p) - S_N^{(i)}(x_p)| \le CH^{\mu-i}\omega(f^{(\mu)},H), \quad i = 0,\ldots,\mu ,$$

и C не зависит от H и f. Отсюда и из (5)-(7) сразу приходим к оценкам (4), однако теперь в (4) константа C зависит от β и λ_0 (см., например, (22)). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в узлах сетки Δ_N заданы значения производных $\pi_{ip} = f^{(i)}(x_p)$, $x_p\in\Delta_N$, $i = 0,1,\ldots,m$, функции $f\in C^{2m+1}(K)$. Существует сплайн $S\in C^{2m}(K)$ с параметрами $n=2m+1$, $\gamma = 0$, $r = m+1$, $s = \{0,1,\ldots,m\}$, интерполирующий значения π_{ip} в узлах сетки Δ_N, и константа C, не зависящая от H и f такие, что

$$\|S^{(i)} - f^{(i)}\|_{C(K)} \le CH^{2m+1-i}\omega(f^{(2m+1)},H), \quad i=0,1,\ldots,2m+1. \qquad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим полином Лагранжа $L_m(x)$ степени m, интерполирующий π_{mp}, $p=0,1,\ldots,m$. Построим теперь сплайн S_N, указанный в условии, при ограничении $S_N^{(j)}(x_0) = L_m^{(j-m)}(x_0)$, $j = m+1,\ldots,2m$. По теореме 4 выберем $\{\tau_i\}_{i=1}^{m}$ так, чтобы $S_N\to f$, $N\to\infty$. Тогда из [2, лемма 1.4] и (4) получим оценки (32), что и требовалось. Константа C здесь снова будет зависеть от $\beta = H/h$.

Отметим, что условие $k \ge q$ в теореме 4 существенно. Рассмотрим пример сплайна с параметрами $n = 4$, $\gamma=0$, $r=2$, $s=\{0,1\}$. Здесь $1=k<q = n-s_r - 1 = 2$. Обозначим $x = 1 - \tau_1$. После элементарных вычислений из (6) и (29) получаем следующее характеристическое уравнение для матрицы B

$$x^2\lambda^2 - (1 + 4x - 4x^2)\lambda + (1 - x)^2 = 0, \quad x\in (0,1),$$

из которого видно, что $\rho(B) > 1$ при всех $x\in (0,1)$ и, следовательно, итерации (29) могут расходиться. Пример вычислений с несходящимися сплайнами приведен в [2]. Для сплайна с параметрами $n = 5$, $\gamma = 0$, $r=3$, $s=\{0,1,2\}$ (здесь уже $q = k = 2$) имеем при $\tau_1 = 0,15$, $\tau_2= 0,3$ спектральный радиус $\rho(B) > 1$, а при $\tau_1 \le 0,1$, $\tau_2 \le 0,2$ имеем $\rho(B) \le 0,8$, т.е. здесь уже можно получить сходящийся интерполяционный процесс с оценками (4).

Автор благодарит Ю.Н.Субботина за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. СУББОТИН Ю.Н., ЧЕРНЫХ Н.И. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций. -"Мат.заметки". 1970, т.7, №1, с. 31-42.

2. ПАХНУТОВ И.А. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью сплайнов. -В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, 65.) Новосибирск, 1975, с.96-129.

3. БОЯНОВ Б.Д. Наилучшие методы интерполирования для некоторых классов дифференцируемых функций.-"Мат.заметки". 1975, т. 17, № 4, с. 511-524.

4. SWARTZ B.K., VARGA R.S. Error Bounds for Spline and L-Spline Interpolation.-"J.Approximat.Theory", 1972, V.6, p.6-49.

5. LOSCALZO F.R., TALBOT T.D. Spline function approximation for solution of ordinary differential equations. - "SIAM J.Numer. Analysis", 1967, v.4, N 3, p.433-445.

6. VARGA R.S., Error Bounds for Spline Interpolation.- In: Approximation with special Emphasis on Spline Functions. Ed. I.J. Schoenberg. Acad.Press, New York-London, 1969, p.367-388.

7. MEIR A., SHARMA A. Lacunary Interpolation by Splines. - "SIAM J.Numer.Analysis", 1973, v.10, N 3, p.433-442.

8. GOULD H.W. Combinatorial Identities. Publ. by the author. Morgantown, W.Va., 1972.

9. ГАНТМАХЕР В.Ф. Теория матриц. М., 1953, 77 с.

10. КВАСОВ Б.И. Получение сплайнов осреднением кусочно-постоянных функций. Сплайны с дополнительными узлами. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1973, т.4, № 1, с. 39-55.

Поступила в ред.-изд.отд.
25 октября 1977 года