МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 517.5

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НАИЛУЧШЕЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССА W^3L_2

А.А.Малюков, И.И.Орлов

Пусть $W^rL_2(0, m) = W^rL_2$ – класс функций, заданных на $(0, m)$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $(r-1)$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, обладающую тем свойством, что

$$\int_0^m |f^{(r)}(x)|^2 dx \le 1 ,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Для этого класса функций рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^m f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(k) + R(f), \qquad (I)$$

относительно которой известно [I], что задача построения наилучшей квадратуры вида (I) эквивалентна минимизации остатка $R(f)$ при варьировании весами p_{kl}.

Наиболее общий результат в этом направлении получен Албергом и Нильсоном в работе [2], где указано, что оптимальные на классе W^rL_2 коэффициенты p_{kl} квадратурной формулы (I) могут быть выражены в виде интегралов от фундаментальных сплайнов $c_{kl}(x)$

$$p_{kl} = \int_0^m c_{kl}(x)dx \qquad (k=0,1,\dots,m;\ l=0,1,\dots,\rho). \qquad (2)$$

Сплайны c_{kl} образуют базис в пространстве сплайнов степени $2r-1$ и дефекта $\rho+1$, построенных на сетке с узлами $0,1,\dots,m$. Для этого пространства мы будем использовать обозначения $S^{\rho}_{m,r}$.

В данной работе для случая $r=3, \rho=1$ получены формулы для весов соответствующей оптимальной квадратуры.

Фундаментальные сплайны $c_{kl}(x)$ из класса S^1_{m3} однозначно определяются соотношениями

$$c^{(j)}_{kl}(\nu) = \delta_{k\nu}\delta_{lj} \quad (k,\nu=0,1,\dots,m;\ j,l=0,1) , \qquad (3)$$

где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. Для построения $c_{kl}(x)$ поступим следующим образом. Произвольную функцию $S(x) \in S^1_{m3}$ при $x \in (k-1,k)$ представим в виде

$$\begin{aligned} S(x) = {} & H_{00}(\tau_k)f^{(0)}_{k-1}+H_{01}(\tau_k)f^{(1)}_{k-1}+H_{10}(\tau_k)f^{(0)}_{k}+H_{11}(\tau_k)f^{(1)}_{k}+ \\ & +H_{02}(\tau_k)\alpha_k+H_{03}(\tau_k)\beta_k \qquad (k=1,2,\dots,m), \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned} & H_{00}(\tau)=1-5\tau^4+4\tau^5, \qquad H_{01}(\tau)=\tau-4\tau^4+3\tau^5, \\ & H_{10}(\tau)=5\tau^4-4\tau^5, \qquad H_{11}(\tau)=\tau^5-\tau^4 , \\ & H_{02}(\tau)=\frac{1}{2}\tau^2-\frac{3}{2}\tau^4+\tau^5,\ H_{03}(\tau)=\frac{1}{6}\tau^3-\frac{1}{3}\tau^4+\frac{1}{6}\tau^5 , \\ & \tau_k=(x-k+1),\ f^{(l)}_k=S^{(l)}(k) \quad (l=0,1;\ k=0,1,\dots,m) , \end{aligned} \qquad (5)$$

при этом функции $H_{k\nu}(\tau)$ являются интерполяционными многочленами Эрмита и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} & H^{(l)}_{0\nu}(0) = \delta_{\nu l},\ H^{(l)}_{1\nu}(0) = 0 \quad (\nu,l=0,1,2,3) , \\ & H^{(l)}_{0\nu}(1)=0,\ H^{(l)}_{1\nu}(1)=\delta_{\nu l}, \quad (\nu,l=0,1) . \end{aligned} \qquad (6)$$

Для величин α_k, β_k $(k=1,2,\dots,m)$ из условия непрерывности второй и третьей производных в точках $x=k$ получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} & \alpha_{k+1}=3\alpha_k+\frac{1}{3}\beta_k+20f^{(0)}_{k-1}+12f^{(1)}_{k-1}-20f^{(0)}_{k}+8f^{(1)}_{k} , \\ & \beta_{k+1}=24\alpha_k+3\beta_k+120f^{(0)}_{k-1}+84f^{(1)}_{k-1}-120f^{(0)}_{k}+36f^{(1)}_{k} \quad (k=1,\dots,m), \end{aligned} \qquad (7)$$

которые позволяют определить функцию $f(x)$, если заданы α_1 и β_1. Так как $f \in S^1_{m3}$, то $\beta_1 = f^{(3)}(0) = 0$, а α_1 определяется из условия $f^{(3)}(m) = \beta_{m+1} = 0$.

Введя обозначения

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/3 \\ 24 & 3 \end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix},\ a_k=\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} (k=1,2,\dots,m) \qquad (8)$$

перепишем соотношения (7) в матричной форме

$$a_{k+1} = A^k a_1 + \sum_{\nu=1}^{k} A^{k-\nu}[20(f^{(0)}_{\nu-1} - f^{(0)}_{\nu})c_1 + 12 f^{(1)}_{\nu-1}c_2 + 4f^{(1)}_{\nu}c_3]. \qquad (9)$$

Из равенства (9) при $k = m$ и условия $\beta_{m+1} = 0$ для α_1 получаем формулу

$$\alpha_1 = \frac{-1}{3\sqrt{2}(t_1^m - t_2^m)} \sum_{\nu=1}^{m} \{60[(\sqrt{2}+1)t_1^{m-\nu} - (\sqrt{2}-1)t_2^{m-\nu}](f^{(0)}_{\nu-1} - f^{(0)}_{\nu}) +$$

$$+ 6 f^{(1)}_{\nu-1}[(6\sqrt{2} + 7)t_1^{m-\nu} - (6\sqrt{2} - 7)t_2^{m-\nu}] +$$

$$+ 6 f^{(1)}_{\nu}[(4\sqrt{2} + 3)t_1^{m-\nu} - (4\sqrt{2} - 3)t_2^{m-\nu}]\}, \qquad (10)$$

где $t_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ – собственные значения матрицы A.

Формулы (9),(10) для произвольной функции $f(x) \in C^3(0,m)$ позволяют построить единственный интерполяционный сплайн $S(x; f) \in S^1_{m3}$ по значениям функции и ее первой производной в целых точках рассматриваемого интервала. Так как, согласно (3), для фундаментального сплайна $C_{ki}(x)$ известны его значения и значения первой производной в точках $x=k$ ($k = 0,1,\dots,m$), то с помощью (4),(9),(10) он может быть явно построен, однако при нахождении весов наилучшей квадратурной формулы в этом построении нет необходимости.

Учитывая, что фундаментальный сплайн $C_{ki}(x)$ на каждом отрезке $(k-1,k)$, $k = 1,2,\dots,m$, может быть представлен в виде (4), то из (2) и (3) для весов p_{ki} получаем выражения

$$p_{ki} = \frac{2}{3}\delta_{i0}(1-\delta_{mk}) + \frac{1}{5}\delta_{i1}(1-\delta_{mk}) + \frac{1}{3}\delta_{i0}(1-\delta_{0k}) - \frac{1}{30}\delta_{i1}(1-\delta_{0k}) +$$

$$+\frac{1}{360}\sum_{\nu=1}^{m}(12\alpha_{\nu,ki} + \beta_{\nu,ki}) \quad (i=0,1;\ k=0,1,\dots,m). \qquad (11)$$

Таким образом, для нахождения p_{ki} достаточно вычислить сумму в (11). Представив сумму в формуле (11) в форме скалярного произведения

$$\sum_{\nu=1}^{m}(12\alpha_{\nu,ki} + \beta_{\nu,ki}) = \langle b, \sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu,ki}\rangle, \qquad (12)$$

где двумерный вектор b имеет соответственно координаты 12 и 1, и используя (3), (9), преобразуем (12) к виду

$$\langle b, \sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu,ki}\rangle = \langle b, (1-A^m)(1-A)^{-1}a_{1,ki}\rangle + \langle b, [20(1-\delta_{mk}) \times$$

$$\times \delta_{i0}(1-A^{m-1-k})(1-A)^{-1}c_1 - 20(1-\delta_{0k})\delta_{i0}(1-A^{m-k})(1-A)^{-1}c_1 +$$

$$+12\delta_{i1}(1-\delta_{mk})(1-A^{m-1-k})(1-A)^{-1}c_2 + 4\delta_{i1}(1-\delta_{0k})(1-A^{m-k})(1-A)^{-1}c_3]\rangle \qquad (13)$$

$$(k = 0,1,\dots,m;\ i = 0,1).$$

Вычислив далее первое слагаемое в формуле (13), где $a_{1,ki}$ определяются согласно (10), получим равенство

$$\langle b,(1-A^m)(1-A)^{-1}a_{1,ki}\rangle = 3(t_1^{m-k} + t_2^{m-k})\times$$

$$\times(20\delta_{i0} - 10\delta_{i0}\delta_{mk} - 3\delta_{i1}\delta_{mk} + 3\delta_{i1}\delta_{0k}) + 6\sqrt{2}(t_1^{m-k} - t_2^{m-k})\times$$

$$\times(5\delta_{i0}\delta_{mk} - 5\delta_{i0}\delta_{0k} - 4\delta_{i1} + 2\delta_{i1}\delta_{0k} + 2\delta_{i1}\delta_{mk}). \qquad (14)$$

Второе слагаемое при этом будет иметь вид

$$-\langle b,(1-A^m)(1-A)^{-1}a_{1,ki}\rangle - 60\delta_{i0}(1-\delta_{mk}) +$$

$$+ 60\delta_{i0}(1-\delta_{0k}) - 42\delta_{i1}(1-\delta_{mk}) - 18\delta_{i1}(1-\delta_{0k}). \qquad (15)$$

С учетом (14) и (15) для суммы в (11) в результате получаем формулу

$$\frac{1}{360}\sum_{\nu=1}^{m}(12\alpha_{\nu,ki} + \beta_{\nu,ki}) = \frac{1}{6}\delta_{mk}\delta_{i0} - \frac{1}{6}\delta_{i0}\delta_{0k} - \frac{7}{60}\delta_{i1}(1-\delta_{mk}) -$$

$$-\frac{1}{20}\delta_{i1}(1-\delta_{0k}) \qquad (i = 0,1;\ k = 0,1,\dots,m). \qquad (16)$$

Окончательно имеем: веса наилучшей квадратурной формулы (1) (с $\rho = 1$) в классе функций $W^3L_2(0,m)$ определены равенством

$$p_{ki} = \delta_{i0} - \frac{1}{2}\delta_{i0}(\delta_{0k} + \delta_{km}) + \frac{1}{12}\delta_{i1}(\delta_{0k} - \delta_{km}), \qquad (17)$$

где $i = 0,1$, $k = 0,1,\dots,m$.

Заметим, что оптимальная **квадратурная формула для класса** $W^3L_2(0,m)$ отличается от обобщенной квадратурной формулы трапеций лишь наличием двух слагаемых, зависящих от значений первых производных в крайних точках интервала интегрирования.

Изложенный способ вычисления весов наилучших квадратурных формул может быть обобщен на случай произвольных r и $\rho = r - 2$.

Так, например, для $r = 2$, $\rho = 0$ веса наилучших квадратурных формул имеют вид [3]

$$p_k = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^{m-k}-\lambda_2^{m-k}}{\lambda_1^m - \lambda_2^m}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1^m - \lambda_2^m}\right) \qquad (k = 1,2,\dots,m-1),$$

$$p_0 = p_m = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}\left(\frac{\lambda_1^{m-1} - \lambda_2^{m-1}}{\lambda_1^m - \lambda_2^m}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}\,(\lambda_1^m - \lambda_2^m)},$$

где $\lambda_1 = -2+\sqrt{3}$, $\lambda_2 = -2-\sqrt{3}$ являются собственными значениями соответствующей матрицы второго порядка.

Литература

I. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Квадратурные формулы. М., "Наука",1974.

2. AHLBERG J.H.,NILSON E.N. The approximation of linear functionals.-"SIAM J.Numer.Analysis",1966,v.3,N 2,p.173-182.

3. МАЛЮКОВ А.А., ОРЛОВ И.И. Построение коэффициентов наилучшей квадратурной формулы для класса $W^2 L_2 (0,N)$ с равноотстоящими узлами. -В кн.: Методы оптимизации и исследование операций (прикладная математика). Иркутск,1976, с.167-170. (СЭИ СО АН СССР).

Поступила в ред.-изд.отд.
II октября 1976 года