ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 73

УДК 517

ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРИ ПОМОЩИ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В.П.Маркова

Развитие микропрограммного управления и матричных способов реализации дискретных автоматов с применением параллельных асинхронных режимов работы, в частности, при помощи программируемых логических матриц, ставит по-новому задачи анализа и синтеза, поскольку классические методы не удовлетворяют новым критериям оптимизации автоматов, способам их реализации, ограничены размерностью функций.

В связи с этим важное значение имеют новые подходы к методам анализа и синтеза. Одним из таких направлений является исследование возможностей применения аппарата гармонического анализа на конечных абелевых группах. В статье показана возможность ведения синтеза булевых функций в спектральной области. В частности, разработан и реализован алгоритм приведения д.н.ф. булевой функции к более короткому виду.

§1. Фурье-преобразование булевой функции и основные теоремы

Пусть $f(X)$ - булева функция от n аргументов, определяемая отображением вида: $X^n \to \{0,1\}$, $X^n = \{X_0,\dots,X_{2^n-1}\}$, где X_i - n-мерный (0,1)-вектор, представляющий собой двоичное разложение числа i. С групповых позиций множество векторов $\{X_i\}$, $i=0,\dots,2^n-1$, относительно операции покомпонентного сложения по mod2 образует аддитивную абелеву группу.

Известно [2-5], что функции, определенные на аддитивной группе, допускают разложение по ортогональному базису (здесь будем пользоваться базисом Фурье), т.е. каждая функция $f(X)=(f(X_0)\ f(X_1),\dots,$

$f(X_{2^n-1})$) может быть представлена спектром $f^*(W)=(f^*(W_0), f^*(W_1), \ldots, f^*(W_{2^n-1}))$, где $f^*(W_j)$ – коэффициент Фурье-преобразования, который вычисляется по формуле

$$f^*(W_j) = \sum_{X_i \in X^n} f(X_i) q_{ij} \quad \text{для всех} \quad W_j \in W^n. \tag{I}$$

Здесь $\{W_j\} = W^n$ – область преобразования $f(X)$, тождественно изоморфная X^n, причем W_j – двоичное разложение числа j, $q_{ij} = (-1)^{X_i \cdot W_j^t}$, $X_i W_j^t$ – матричное произведение с операцией сложения по $\bmod 2$ (t – знак транспонирования).

Обратный переход имеет аналогичный вид

$$f(X_i) = 2^{-n} \sum_{W_j \in W^n} f^*(W_j) q_{ji} \text{ для всех } X_i \in X^n.$$

В матричной форме пара Фурье-преобразований записывается как

$$f^*(W) = f(X) \cdot Q_n,$$

$$f(X) = 2^{-n} f^*(W) \cdot Q_n,$$

где $Q_n = [q_{ij}]$ – квадратная матрица порядка 2^n.

Обычно спектр булевой функции $f(X)$ вычисляют по алгоритму быстрого преобразования Фурье [I-3], суть которого заключается в умножении вектора $f(X) = (f(X_0), \ldots, f(X_{2^n-1}))$ на факторизованную матрицу Q_n.

Из определения Фурье-коэффициента видно, что он учитывает поведение $f(X)$ на всей группе X^n, причем при суммировании в (I) $f(X_i)$ берется со знаком, определяемым выражением $(-1)^{X_i W_j^t}$, т.е.

$$(-1)^{X_i W_j^t} = \begin{cases} +1, & \text{если } X_i W_j^t = 0, \\ -1, & \text{если } X_i W_j^t = 1. \end{cases}$$

Для каждого $W_j \in W^n$ обозначим через $d_0(W_j)$ количество конституент единицы булевой функции $f(X)$, для которой $X_i \cdot W_j^t = 0$, и через $d_1(W_j)$ – количество конституент единицы $f(X)$, для которой $X_i W_j^t = I$. Тогда

$$f^*(W_j) = d_0(W_j) - d_1(W_j). \tag{2}$$

Учитывая, что $d_0(W_j)+d_1(W_j) = f^*(W_0)$ для всех $W_j \in W^n$ (так как $X_i W_j^t = 0$ для всех $X_i \in X^n$ и $W_j = W_0$) j-й коэффициент (2) можно выразить либо через $d_0(W_j)$, либо через $d_1(W_j)$:

$$f^*(W_j)=2d_0(W_j)-f^*(W_0)=f^*(W_0)-2d_1(W_j). \qquad (3)$$

Разобьем область преобразования W^n на множества, называемые уровнями, $W^n = \{W^{(0)},\dots,W^{(n)}\}$ и будем говорить, что $W_j \in W^{(l)}$, если норма вектора W_j равна l. Мощность l-го уровня $|W^{(l)}| = C_n^l$. Очевидно, что нулевой уровень состоит из одного вектора $W_j = W_0$, а первый – из векторов единичного базиса $\{1_k\}$ $(k = 1,2,\dots, n)$. В соответствии с этим Фурье-спектр $f^*(W)$ также разбивается на уровни $f^*(W) = \{F^{*(0)},\dots,F^{*(n)}\}$, где $f^*(W_j) \in F^{*(l)}$, если $W_j \in W^{(l)}$.

Частично определенную булеву функцию $f(X)$ будем представлять двумя спектрами $f^*(W)$ и $h^*(W)$, где $h^*(W)$ – спектр булевой функции $h(X)$ такой, что $h(X_i) = 1$ на подмножестве точек $\{X_i\}$, где $f(X)$ не определена.

Импликанту $K(X)$ размерности k булевой функции $f(X)$ будем обозначать через конъюнкцию с в я з а н н ы х переменных $x_{m_{n-k}}^{\sigma_{m_{n-k}}},\dots, x_{m_1}^{\sigma_{m_1}}$, $m_g \in \{m_1,\dots,m_{n-k}\}$, $\sigma_{m_g} \in \{0,1\}$, которые имеют фиксированные значения. Остальные k переменных являются с в о б о д н ы м и.

Предположим, что все связанные переменные имеют инверсные значения, т.е. $\sigma_{m_g} = 0$ для всех $m_g \in \{m_1,\dots,m_{n-k}\}$. Тогда подпространство V, на котором булева функция $f(X)$, равная импликанте $K(X)$, принимает единичные значения $V \subseteq f^{-1}(1)$, представляет собой аддитивную подгруппу порядка 2^k, которую будем обозначать через V_b. Вектор $b \in X^n$ определяется как вектор $b = (b_n^{\sigma_n},\dots,b_1^{\sigma_1})$, в котором элементы, соответствующие связанным переменным, равны нулю, т.е. $b_{m_g}^{\sigma_{m_g}} = 0$ для всех $m_g \in \{m_1,\dots, m_{n-k}\}$, остальные элементы равны единице. Тогда $V_b = \{X_p : X_p \le b\}$, т.е. подгруппа V_b объединяет те векторы X_p, для которых $X_{p_k} \le b_k^{\sigma_k}$ для всех $k = 1,\dots, n$.

Если хотя бы одна из связанных переменных x_{m_g} отлична от нуля, то подпространство V является смежным классом подгруппы V_b, который получается в результате сдвига аддитивной подгруппы V_b по некоторому вектору $c \in X^n$, называемому л и д е р о м смежного класса [5]: $V = V_b \oplus c$. Вектор $c = (c_n^{\sigma_n}, \ldots, c_1^{\sigma_1})$ также определяется по импликанте $K(X)$: элементы, соответствующие связанным переменным, равны σ_{m_g}, т.е. $c^{\sigma_{m_g}} = \sigma_{m_g}$ для всех $m_g \in \{m_1, \ldots, m_{n-k}\}$, остальные элементы равны нулю. Отсюда видно, что лидер – это минимальный элемент смежного класса V. Используя введенные V_b и c, импликанту будем обозначать $K(X) = \{X_p \oplus c: X_p \in V_b\}$.

Множество смежных классов $\{V\}$ подгруппы V_b относительно операции сложения по mod 2 образует фактор-группу $\{X^n/V_b\}$[5]. Из теоремы о характерах фактор-группы [4] следует, что группой характеров для $\{X^n/V_b\}$ является подмножество характеров $Q' = \{Q(X_p): X_p \cdot W_j^t = 0$ для всех $X_p \in V_b\}$. Множество векторов $\{W_j\}$ таких, что $X_p \cdot W_j^t = 0$ для всех $X_p \in V_b$, образует нуль-пространство. В нем содержатся все лидеры смежных классов подгруппы V_b и, следовательно, его размерность 2^{n-k}. Нуль-пространство для V_b будем обозначать через $V_{\bar{b}} = \{W_j: W_j \leq \bar{b}\}$, где $\bar{b}$ – вектор, дополняющий вектор b до $(I \ldots I)$.

Приведем основные теоремы Фурье-преобразования булевых функций.

ТЕОРЕМА (о спектре импликанты) [3]. Пусть $f(X) = K(X) = \{X_p \oplus c: X_p \in V_b\}$ – импликанта размерности k. Тогда

$$K^*(W_j) = \begin{cases} 2^k (-1)^{cW_j^t} & \text{для всех } W_j \in V_{\bar{b}}, \\ 0 & \text{для всех } W_j \notin V_{\bar{b}}, \end{cases} \tag{4}$$

где величина $(-1)^{cW_j^t}$ определяет знак спектрального коэффициента $K^*(W_j)$.

ТЕОРЕМА Пуассона [3]. Пусть V_b – подпространство X^n, $V_{\bar{b}}$ – нуль-пространство, c – лидер смежного класса подгруппы V_b. Тогда

$$\sum_{X_p \in V_b} f(X_p \oplus c) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} f^*(W_j)(-1)^{cW_j^t} . \tag{5}$$

Эта теорема устанавливает соотношение между суммарными значениями булевой функции $f(x)$ на подпространстве $(V_b \oplus c)$, $c \in V_{\bar{b}}$, и ее Фурье-коэффициентами $f^*(W_j)$ на нуль-пространстве $V_{\bar{b}}$.

ТЕОРЕМА (о выделении импликант) [3]. Для любого подпространства V_b и лидера c

$$(V_b \oplus c) \subseteq f^{-1}(1), \text{ если } \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} f^*(W_j)(-1)^{cW_j^t} = 2^n, \tag{6}$$

$$(V_b \oplus c) \subseteq f^{-1}(0), \text{ если } \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} f^*(W_j)(-1)^{cW_j^t} = 0.$$

Смысл теоремы заключается в следующем. Если обратное преобразование спектра $f^*(W)$ на нуль-пространстве $V_{\bar{b}}$ равно 2^n для какого-либо вектора X_i, то вектор X_i – лидер смежного класса подгруппы V_b и подпространство $(V_b \oplus c)$, $c \in V_{\bar{b}}$, является импликантной булевой функции $f(X)$. Аналогично, если обратное преобразование спектра $f^*(W)$ на нуль-пространстве $V_{\bar{b}}$ равно 0 для какого-либо вектора X_i, то вектор X_i – лидер смежного класса подгруппы V_b и подпространство $(V_b \oplus c)$, $c \in V_{\bar{b}}$, является импликантой отрицания булевой функции $f(X)$.

ТЕОРЕМА (о свертке в области преобразования) [3]. Пусть $f_1(X)$ и $f_2(X)$ – произвольные булевы функции, $f_1^*(W)$ и $f_2^*(W)$ – их Фурье-преобразования. Тогда

$$(f_1(X) \cdot f_2(X))^* = f_1^*(W) \otimes f_2^*(W), \tag{7}$$

где $\otimes$ – операция свертки.

Применив операцию свертки к (7), получим

$$f^*(W_\xi) = 2^{-n} \sum_{W_j \in W^n} f_1^*(W_j)\, f_2^*(W_j \oplus W_\xi) \text{ для всех } W_\xi \in W^n, \tag{8}$$

где $f^*(W) = (f_1(X)\, f_2(X))^*$.

§2. Логический синтез в спектральной области

Синтез булевых функций традиционными методами обычно проводится в базисах $\{\neg, \&, \vee\}, \{1, 0, \&, \oplus\}$. Известные свойства и приведенные в §I теоремы Фурье-преобразования позволяют перенести булевы операции $\neg, \&, \vee, \oplus$ в спектральную область.

I. Фурье-преобразование о т р и ц а н и я булевой функции $f(X)$ равно [3]

$$\bar{f}^*(W_0) = 2^n - f^*(W_0),$$

$$\bar{f}^*(W_j) = -f^*(W_j) \text{ для всех } W_j \in W^n,\ W_j \neq W_0.$$

2. Фурье-преобразование к о н ъ ю н к ц и и булевых функций вычисляется по теореме о свертке (7).

3. Фурье-преобразование д и з ъ ю н к ц и и булевых функций определяется согласно следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. П у с т ь $f_1(X)$ и $f_2(X)$ – п р о и з в о л ь н ы е б у л е в ы ф у н к ц и и, $f_1^*(W)$ и $f_2^*(W)$ – и х Ф у р ь е-п р е о б р а з о в а н и я. Т о г д а

$$(f_1(X) \vee f_2(X))^* = f_1^*(W) + f_2^*(W) - f_1^*(W) \circledast f_2^*(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим дизъюнкцию булевых функций $f_1(X)$ и $f_2(X)$ через арифметическую сумму

$$f_1(X) \vee f_2(X) = f_1(X) + f_2(X) - f_1(X) \cdot f_2(X).$$

Согласно свойству линейности Фурье-преобразования

$$(f_1(X) \vee f_2(X))^* = f_1^*(W) + f_2^*(W) - (f_1(X) \cdot f_2(X))^* \quad . \quad (9)$$

Применив теорему о свертке (7) к последнему члену соотношения (9), имеем

$$(f_1(X) \vee f_2(X))^* = f_1^*(W) + f_2^*(W) - f_1^*(W) \circledast f_2^*(W) \ .$$

4. Фурье-преобразование с у м м ы по mod 2 булевых функций вычисляется согласно следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. П у с т ь $f_1(X)$ и $f_2(X)$ – п р о и з в о л ь н ы е б у л е в ы ф у н к ц и и, $f_1^*(W)$ и $f_2^*(W)$ – и х Ф у р ь е-п р е о б р а з о в а н и я. Т о г д а

$$(f_1(X) \oplus f_2(X))^* = f_1^*(W) + f_2^*(W) - 2f_1^*(W) \circledast f_2^*(W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из представления суммы по mod 2 булевых функций $f_1(X)$ и $f_2(X)$ в виде арифметической суммы

$$f_1(X) \oplus f_2(X) = f_1(X) + f_2(X) - 2f_1(X)\cdot f_2(X) ,$$

свойства линейности Фурье-преобразования и теоремы о свертке (7).

Отображение основных булевых операций в спектральную область позволяет привлечь богатый свойствами аппарат гармонического анализа на конечных абелевых группах к решению некоторых задач синтеза булевых функций. При этом будем использовать ряд дополнительных соотношений, основанных на следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(X) = K(X) f_1(X)$, где $K(X) = \{X_p \oplus c : X_p \in V_b\}$ – импликанта размерности k, а $f_1(X)$ – произвольная булева функция. Тогда

$$f^*(W_\xi) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar b}} (-1)^{c W_j^t} f_1^*(W_j \oplus W_\xi) \text{ для всех } W_\xi \in W^n .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы о свертке (7)

$$f^*(W_\xi) = 2^{-n} \sum_{W_j \in W^n} K^*(W_j)\, f_1^*(W_j \oplus W_\xi) \text{ для всех } W_\xi \in W^n .$$

Поскольку коэффициенты Фурье-преобразования $K^*(W)$ отличны от нуля только на векторах из нуль-пространства $V_{\bar b}$ (4), то

$$f^*(W_\xi) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar b}} (-1)^{c W_j^t} f_1^*(W_j \oplus W_\xi) \text{ для всех } W_\xi \in W^n .$$

ТЕОРЕМА 4. Если

$$f^*(W_0) = |f^*(W_j)|, \quad W_j = e_k,\ k = 1,\dots,n ,$$

то переменная $x_k^{\sigma_k}$ является связанной для всех импликант булевой функции $f(X)$, причем $\sigma_k = 1$, если $f^*(W_j) < 0$ и $\sigma_k = 0$, если $f^*(W_j) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим Фурье-коэффициенты из (10) через (3)

$$f^*(W_0) = |f^*(W_0) - 2d_0(W_j)| = |2d_1(W_j) - f^*(W_0)|,$$

откуда видно, что либо $d_0(W_1) = f^*(W_0)$, либо $d_1(W_j) = f^*(W_0)$, т.е. переменная $x_k^{\sigma_k}$ входит во все конституенты единицы булевой функции $f(X)$. Кроме того, из теоремы о спектре импликанты (4) следует, что знак Фурье-коэффициента $f^*(W_j)$ для $W_j=e_k$, определяемый выражением $(-I)^{c\cdot e_k^t}$, отрицательный, если $\sigma_k=1$, и положительный, если $\sigma_k = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Если для нуль-пространства $V_{\bar{b}}$

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} |f^*(W_j)| < 2^n, \quad \bar{b} \in W^n,$$

то подпространство $(V_b \oplus c)$ ни для какого лидера $c \in V_{\bar{b}}$ не является импликантой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} |f^*(W_j)| < 2^n.$$

Из теоремы Пуассона и известного неравенства $\sum_i |A_i| \geq \sum_i A_i$ вытекает, что

$$\sum_{X_p \in V_b} f(X_p \oplus c) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} (-1)^{cW_j^t} f^*(W_j) \leq 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} |f^*(W_j)| < 2^k,$$

т.е. $f(X_p) \neq 1$ для всех $X_p \in V_b$, следовательно, $(V_b \oplus c) \not\subseteq f^{-1}(1)$.

Свойства гармонического анализа булевых функций и приведенные теоремы позволяют построить некоторые алгоритмы преобразования булевых функций. Так например, извлечение импликант, факторизации, определения отсутствия импликант в заданном подпространстве.

В частности, в качестве эксперимента для проверки возможности применения Фурье-преобразования был опробован алгоритм приведения д.н.ф. булевой функции к более короткому виду.

§3. Алгоритм преобразования дизъюнктивной нормальной формы булевой функции

Идея спектрального метода преобразования д.н.ф. булевой функции $f(X)$ состоит в выделении из ее спектра $f^*(W)$ импликант на основе нижеприведенных условий. Порядок извлечения в общем случае может быть любой, однако мы выбираем порядок, соответствующий убывающей размерности импликант. В связи с этим исходный спектр разбиваем по уровням и выделение начинаем с первого уровня, содержащего импликанты максимальной размерности $k = n-1$.

Алгоритм преобразования д.н.ф. булевой функции представляет собой поуровневый процесс. Результатом работы алгоритма на l-м уровне, $l=1,\dots,n$, является множество импликант размерности $k = n-l$. Основной шаг алгоритма внутри уровня работает с коэффициентами спектра $f^*(W)$ по нуль-пространству $V_{\bar{b}}$, по которым устанавливается, являются ли подпространства $(V_b \oplus c)$, $c \in V_{\bar{b}}$ импликантами булевой функции $f(X)$.

Пусть $f_i^*(W)$ - спектр булевой функции на i-м шаге и пусть $f^*(W)=f_0^*(W) + h^*(W)$, где $f_0^*(W)$ - исходный спектр, $h^*(W)$-спектр булевой функции от неопределенных состояний. Тогда внутриуровневый шаг можно записать через следующие две процедуры.

1. Выявление импликант. Здесь на основе теоремы 5 и соотношений (6) определяем существование импликант в подпространствах $(V_b \oplus c)$, $c \in V_{\bar{b}}$. При этом если $(V_b \oplus c) \subseteq f_i^{-1}(1)$, то импликанту будем называть импликантой типа A. Если $(V_b \oplus c) \not\subseteq f_i^{-1}(1)$, но более чем на половине точек подпространства $(V_b \oplus c)$ $f_i(X)$ принимает единичное значение и если $(V_b \oplus c) \not\subseteq F^{-1}(1)$, то импликанту будем называть импликантой типа B. Все остальные импликанты не рассматриваются.

2. Выделение спектра импликант. После того как на i-м шаге выявили импликанту $K_k(X)$, из спектра $f_i^*(W)$ вычитаем спктр $\Phi_k^*(W)$, где $\Phi_k^*(W)$ - спектр той части импликанты $K_k(X)$, которая входит в $f^{-1}(1)$, т.е. $\Phi_k(X) = K_k(X) \times f_i^{-1}(1)$. Спектр $\Phi_k^*(W)$ вычисляем следующим образом:

$$\Phi_k^*(W) = \begin{cases} K_k^*(W), & \text{если } K_k(X) \text{ - импликанта типа A,} \\ K_k^*(W) \otimes f_i^*(W), & \text{если } K_k(X) \text{ - импликанта типа B.} \end{cases}$$

Отсюда видно, что спектр $f^*(W)$ изменяется, а спектр $F^*(W)$ остается постоянным.

На каждом этапе для сокращения перебора нуль-пространств $V_{\bar{b}}$ из W^n в алгоритме используются условия, вытекающие из теорем, приведенных в §§2 и 3. Все условия делятся на три группы. Первая группа определяет номер уровня, к которому переходим после i-го шага, вторая - порядок просмотра векторов W_j претендентов на $\bar{b}$

внутри уровня и третья группа объединяет условия самой процедуры извлечения импликант.

Условия первой группы:

1. Условие нулевого коэффициента. Если $f_i(W_0) < 2^{n-1}$, $i = 1,2,\dots,n$, то не существует импликанты типа A размерности $k = n-1$.

2. Условие доопределения спектра $f_i^*(W)$ по нулевому коэффициенту. Если $f_i^*(W_0) < 2^{n-(i+1)}$, $i=1,2,\dots,n$, то не существует импликанты типа B размерности $k=n-1$.

Условия второй группы:

3. Условие пересечения. Пусть $(V_{b_k} \oplus c_k) \subseteq f_i^{-1}(1)$, $c_k \in V_{\bar{b}_k}$. Тогда: если $\bar{b}_k \cdot \bar{b}_p = 0$, $\bar{b}_k, \bar{b}_p \in W^n$, то $(V_{b_p} \oplus c_k) \cap (V_{b_p} \oplus c_p) \neq \emptyset$ и, следовательно, подпространство $(V_{b_p} \oplus c_p)$ ни для какого лидера $c_p \in V_{\bar{b}_p}$ не может быть импликантой типа A.

При этом если

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}_p}} | f_i^*(W_j) | \geq 2^n - 2^{1+k_1} ,$$

где $\bar{b}_p \in W^{(1)}$, k_1 – размерность импликанты пересечения $K_{kp}(X) = K_k(X) \cdot K_p(X)$, то подпространство $(V_{b_p} \oplus c_p)$, $c_p \in V_{\bar{b}_p}$, может быть импликантой типа B, причем если $1+k_1 = n-1$, то будем относить ее к импликанте типа B_1, а если $1+k_1 < n-1$, то – к импликанте типа B_2.

4. Условие связанной переменной. Если для $f_i(X)$ какая-либо переменная $x_k^{\sigma_k}$ является связанной, согласно теореме 4, и если для $\bar{b}_p$: $e_k \cdot \bar{b}_p = 0$, $\bar{b}_p \in W^{(1)}$ справедливо условие (II), то подпространство $(V_{b_p} \oplus c_p)$, $c_p \in V_{\bar{b}_p}$, может быть импликантой типа B_1, так как $1+k_1 = n-1$.

В соответствии с условиями 3 и 4 каждые выделенная импликанта в подпространстве $(V_{b_k} \oplus c_k)$ и связанная переменная $x_k^{\sigma_k}$ делят множество векторов $\bar{b}_p \in W^n$ на три подмножества: $U_k(B_2)$ включает векторы $\bar{b}_p$, удовлетворяющие (II) при $1+k< n-1$, $U_k(B_1)$ – векторы $\bar{b}_p$, удовлетворяющие (II) при $1+k_1 = n-1$, все остальные векторы $\bar{b}_p$ объединяются в $U_k(A)$.

Пусть после $(i-I)$-го шага эти подмножества были $U_i(B_2)$, $U_i(B_1)$, $U_i(A)$. Тогда выделенная на i-м шаге импликанта $K_k(X)$ или связанная переменная $x_k^{\sigma_k}$ изменяют их следующим образом:

$$U_{i+1}(B_2) = U_i(B_2) \cup U_k(B_2),$$

$$U_{i+1}(B_1) = U_i(B_1) \setminus [U_k(B_2) \cap U_i(B_1)] \cup U_k(B_1),$$

$$U_{i+1}(A) = U_i \setminus U_{i+1}(B_1) \cup U_{i+1}(B_2),$$

где U_i – множество всех еще не просмотренных векторов $\bar{b}_p \in W^n$.

Для того чтобы на каждом шаге покрывать как можно больше единиц булевой функции $f(X)$, порядок просмотра векторов W_j претендентов на $\bar{b}$ внутри уровня будем определять мощностью подмножества пересечения импликанты $K_k(X)$, выделенной на i-м шаге с f_i^{-1} (I). Следовательно, в первую очередь на i-м уровне будем извлекать импликанты типа А, затем – типа B_2. С целью упрощения алгоритма импликанты типа B_1 извлекать не будем, только всякий раз будем отмечать векторы $\bar{b}_p \in U_i(B_1)$, поскольку это сократит перебор векторов W_j претендентов на $\bar{b}$.

<u>Условия третьей группы:</u>

5. Условие отсутствия импликанты. Если для нуль-пространства $V_{\bar{b}_k}$ справедливо условие теоремы 5, то ни $V_{\bar{b}_k}$, ни один ее смежный класс не может быть импликантой типа А.

6. Условие существования импликанты. Если для нуль-пространства $V_{\bar{b}_k}$

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}_k}} |f_i^*(W_j)| \geq 2^n, \qquad \bar{b}_k \in U_i(A),$$

то подпространство $(V_{b_k} \oplus c_k)$, $c_k \in V_{\bar{b}_k}$, может быть импликантой типа А, в существовании которой можно убедиться, применив теорему об извлечении импликант (6).

7. Условие выбора вектора $\bar{b}_p$. Если для нуль-пространства $V_{\bar{b}_p}$

$$\sum_{W_j \in V_{\overline{b}_p}} |f_i^*(W_j)| > 2^{n-1}, \quad \overline{b}_p \in U_i(B_2),$$

то подпространство $(V_{b_p} \oplus c_p)$, $c_p \in V_{\overline{b}_p}$, может быть импликантой типа B_2. Условия 5 и 6 сохраняют силу и для выделения импликант типа B_2 при замене спектра $f_i^*(W)$ на $F^*(W)$.

8. Условие определения спектра $\Phi_k^*(W)$. Пусть $K_p(X) = \{X_p \oplus c: X_p \in V_{b_p}\}$ - импликанта размерности k, выделенная из спектра $F^*(W)$ по нуль-пространству $V_{\overline{b}_p}$ на i-м шаге. Тогда, согласно теореме 3,

$$\Phi_k^*(W_\xi) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\overline{b}_p}} (-1)^{cW_j^t} f_i^*(W_j \oplus W_\xi) \text{ для всех } W_\xi \in W^n .$$

9. Условие укороченной свертки. Если для m коэффициентов первого уровня спектра $\Phi_k^*(W)$

$$\Phi_k^*(W_0) = |\Phi_k^*(W_j)|, \quad W_j \in W^{(1)},$$

то $\Phi_k(X)$ - импликанта размерности $(n-m)$, где $m > n-k$, k - размерность импликанты $K_p(X)$. Это следует из теоремы 4. Лидер c смежного класса определяется по правилу: $c_k = 0$, если $\Phi_k^*(W_j) > 0$, $c_k = 1$, если $\Phi_k^*(W_j) < 0$ для $W_j = 1_k$.

Впервые возможность извлечения импликант булевой функции спектральным методом показана в [3]. Там же приведены сравнительные оценки алгоритма извлечения импликант, на основе которых сделан вывод о его конкурентоспособности с классическим (Квайн-Мак-Класки). В настоящей работе получен ряд условий, которые сокращают перебор нуль-пространств по сравнению с алгоритмом [3].

Предлагаемый алгоритм преобразования д.н.ф. булевой функции реализован на ЭВМ "Минск-32". Общее количество команд ~ 1000, представление исходных данных требует 2^{n+1} ячеек. Алгоритм использовался в конкретной задаче преобразования табличных представлений функций $\sin \frac{\pi}{2} x$, $\log_2(x+1)$, $2^x - 1$, x^2, $\sqrt{x}$, $0 \le x < 1$, для вложения их в программируемые логические матрицы. Аргумент и значения этих функций были представлены в двоичном виде, после чего каждую функцию рассматривали как систему булевых функций от n аргументов $\{f_i(X)\}$.

В результате исследования свойств коэффициентов Фурье-преобразования булевых функций получен ряд условий, позволяющих решить следующие задачи упрощения булевых функций:

I. Вынесение переменной за скобку (теорема 4).

2. Определение максимальной размерности импликант (условия I и 2).

3. Выявление отсутствия импликант в заданном подпространстве (теорема 5).

В спектральной области первая и вторая задачи сводятся к сравнению коэффициентов преобразования, третья - к суммированию коэффициентов спектра на нуль-пространстве.

В работе показана возможность использования этих условий в алгоритме приведения д.н.ф. булевой функции к более короткому виду.

Литература

I. КАРПОВСКИЙ М.Г., МОСКАЛЕВ Э.С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. Л., "Энергия", 1973.

2. ЛАБУНЕЦ В.Г., СИТНИКОВ О.П. Обобщенные и быстрые преобразования Фурье на произвольной конечной абелевой группе. Гармонический анализ на группах в абстрактной теории систем. Межвузовский сборник. Свердловск, изд-во УПИ им.С.М.Кирова, 1976, 24-43.

3. LECHNER R.I. Harmonic analysis of switching functions. - In: Recent Development in Switching Theory. Ed.A.Mukhopadhyay.New York-London,1971, p.122-230.

4. ЛЮМИС Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М., ИЛ., 1956.

5. RUDIN W. Fourier analysis on groups. New York-London,1962.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 июля 1977 года