МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 518.61

МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Имамов, В.П.Роменский

В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области. Для ее численного решения используется метод сплайн-коллокации. В методе коллокации [1] приближенное решение ищется в виде функции определенного вида, содержащей набор неизвестных параметров, которые определяются из условия обращения в нуль невязки в некоторых фиксированных точках - узлах коллокации. Если в качестве такой функции выбирается сплайн, то метод и называется сплайн-коллокацией.

Этот метод с достаточной полнотой разработан для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [2-4]). Известен ряд работ, относящихся к применению метода сплайн-коллокации для решения уравнений математической физики. В работе [5] строится численное решение уравнения Лапласа в прямоугольной области методом сплайн-коллокации (сходимость не исследовалась). Наконец, в работе [6] этот метод обоснован в общем случае для решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве.

Интерес к методу сплайн-коллокации объясняется тем, что в результате получаем аналитическое выражение для приближенного решения сразу во всей области. Это, как правило, облегчает дальнейшее использование приближенного решения. Кроме того, в некоторых случаях, например на неравномерных сетках, схемы метода коллокации эффективнее разностных.

В данной работе исследуется сходимость метода сплайн-коллокации с использованием бикубических сплайнов на произвольной неравномерной сетке. Получены оценки сходимости приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона к точному порядка

$O(h^{\alpha})$, $0<\alpha\le 2$, где α зависит от гладкости точного решения в замкнутой области. Реализация сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей. Предложен, один из возможных, алгоритм ее решения на основе метода дробных шагов [7] с использованием B-сплайнов [8,9].

§I. Постановка задачи

Рассмотрим на прямоугольнике $R = \{(x,y):\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$ с границей Γ, $\bar{R}=R\cup\Gamma$, задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$Lu \equiv \Delta u = f(x,y), \qquad (I)$$

$$u\Big|_{\Gamma_j} = \varphi_j(s),\ j = 1,2,3,4 . \qquad (2)$$

Здесь Γ_j, $j = 1,2,3,4$, – стороны прямоугольника R включая угловые точки, пронумерованные против часовой стрелки, начиная с левой стороны. За начало отсчета дуги s границы Γ примем левый верхний угол, и пусть s_j – начало Γ_j.

Погрешность приближенного решения, как правило, определяется гладкостью точного решения задачи (I), (2) в замкнутой области, которая зависит от гладкости функций $f(x,y)$, $\varphi_j(s)$ и вида области R. Будем предполагать, что заданные функции $f(x,y)$, $\varphi_j(s)$ достаточно гладкие, тогда особенности в решении возникают только из-за наличия угловых точек на границе области. Исчерпывающее исследование для задачи (I),(2) в этом случае было проведено в работе [10]. Обозначим через $C^{k+\lambda}(R)$ класс функций $f(x,y)$, k-раз непрерывно дифференцируемых на R и таких, что

$$\sup_{\substack{P,Q\in\bar{R}\\ P\neq Q}} \frac{|D^{(\alpha,\beta)}f(P)-D^{(\alpha,\beta)}f(Q)|}{|P-Q|^{\lambda}} < \infty ,$$

где $D^{(\alpha,\beta)}$ – оператор дифференцирования по переменным x и y $(\alpha+\beta=k)$, $|P-Q|$ – длина отрезка, соединяющего точки P и Q. Предположим, что

$$\varphi_j(s)\in C^{k+\lambda}(\Gamma_j),\ f(x,y)\in C^{k-2+\lambda}(\bar{R}),\ k\le 2,\ 0<\lambda<1, \qquad (3)$$

и при $s = s_{j+1}$, $j = 1,2,3,4$, выполняются условия сопряжения

$$\varkappa_{jq} \equiv \varphi_{j+1}^{(2q)} - (-1)^q \varphi_j^{(2q)} = \theta_{jq},\quad q=0,1,\dots,[k/2], \qquad (4)$$

$$\theta_{1q} = \sum_{\mu=0}^{q-1} (-1)^{\mu} D^{(2q-2-2\mu,\,2\mu)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}},\quad \theta_{j0}=0, \tag{4}$$

где θ_{jq}, $j = 2,3,4$, имеют выражение (4) в системе координат с осями x и y, проходящими через Γ_{j+1} и Γ_j, $\Gamma_5 = \Gamma_1$.

Приведем теорему Е.А.Волкова [I0], которую мы используем далее.

Для того чтобы решение $u(x,y)$ задачи (I), (2) принадлежало $C^{k+\lambda}(\bar{R})$, $k \le 2$, $0 < \lambda < 1$, необходимо и достаточно выполнения условий (3) и (4).

Если имеют место (3), но не выполнены условия согласования (4), то решение задачи (I), (2) можно представить в виде

$$u = v + z,\quad z = \sum_{j=1}^{4} f_j,$$

где

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{\theta_{1q} - \varkappa_{1q}}{(2q)!} \operatorname{Im}\{z^{2q} \ln z\},\qquad z = x + iy,$$

и f_j, $j = I,2,3,4$, имеют выражение для f_1 в системе координат с осями x и y, проходящими через Γ_{j+1} и Γ_j при замене $\varkappa_{1q} - \theta_{1q}$ на $\varkappa_{jq} - \theta_{jq}$, а $v(x,y) \in C^{k+\lambda}(\bar{R})$ – решение задачи

$$Lv \equiv \Delta v = f(x,y), \tag{5}$$

$$v\big|_{\Gamma_j} = \varphi_j(s) - z\big|_{\Gamma}. \tag{6}$$

Таким образом, теорема Волкова позволяет по исходным данным задачи (I), (2) установить степень гладкости решения в замкнутой области $\bar{R}$ и в случае необходимости преобразовать ее к виду (5), (6), выделив особенности в явном виде. Поэтому, не теряя общности, достаточно ограничиться рассмотрением задачи (I), (2) такой, что выполнены условия (3), (4). Кроме того, краевые условия будем считать однородными, что позволяет упростить дальнейшие определения.

Итак, рассмотрим задачу

$$Lu \equiv \Delta u = f(x,y),\ (x,y) \in R, \tag{7}$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{8}$$

Пусть $f(x,y) \in C^{k-2+\lambda}(\bar{R})$ и выполнены условия согласования (4), которые в данном случае примут вид $\theta_{jq}=0$, $q = 0,I,\ldots,[k/2]$.

$j = 1,2,3,4$. В силу предыдущего, задача (7), (8) имеет решение на $C^{k+\lambda}(\bar{R})$.

Введем на прямоугольнике $\bar{R}$ сетку $\Delta_{nm} = \Delta_{1n} \cdot \Delta_{2m}$, где

$$\Delta_{1n}: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = a\,,$$

$$\Delta_{2m}: 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b\,.$$

Под бикубическим сплайном $s(x,y)$ на Δ_{nm} мы понимаем функцию, совпадающую с полиномом от двух переменных степени не выше трех по каждой из переменных на каждом прямоугольнике $R_{ij} = \{x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$ и такую, что ее производные $D^{(\alpha,\beta)}s(x,y)\,(0 \le \alpha, \beta \le 2)$ непрерывны в R [11]. Будем искать приближенное решение задачи (7), (8) в виде коллокационного бикубического сплайна $s_u(x,y)$ на сетке Δ_{nm}, а именно:

$$\begin{aligned} Ls_u(x_i,y_j) &= f(x_i,y_j),\ (x_i,y_j) \in \Delta_{nm}\,, \\ s_u(x_i,y_j) &= 0,\ \ (x_i,y_j) \in \Delta_{nm} \cap \Gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

§2. Сходимость метода сплайн-коллокаций

Обозначим через $S(\Delta_{nm})$ множество бикубических сплайнов на сетке Δ_{nm}, а через $\bar{h}_n$ и $\underline{h}_n$ – наибольший и наименьший шаги сетки Δ_{1n}, аналогично $\bar{l}_m$, $\underline{l}_m$ для сетки Δ_{2m}. Докажем сходимость решения задачи (9) к точному решению задачи (7), (8) в области $\bar{R}$.

В соответствии с общей теорией проекционных методов [12] задачу (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} P_{nm}L[s_u(x,y)] &= P_{nm}f\,, \\ s_u(x,y) &\in S_0(\Delta_{nm}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $S_0(\Delta_{nm})$ – множество сплайнов из $S(\Delta_{nm})$, обращающихся в нуль на границе прямоугольника R, P_{nm} – проектор, который каждой функции из $C(\bar{R})$ ставит в соответствие интерполяционный сплайн, т.е. $P_{nm}: f(x,y) \to s(f,x,y)$. Для однозначного определения проекторов P_{nm} необходимо задать краевые условия. Осуществим это следующим приемом. Продолжим f на прямоугольник $R_1 \supset R$ с сохранением класса гладкости так, чтобы расширение $\tilde{f}$ было периодической функцией по обеим переменным. Это можно осуществить, например, в виде полинома от двух переменных минимальной степени, такого, что на границе R_1 он и его производные первого и второго порядков равны нулю. Тем самым проектор P_{nm} однозначно определен на функциях из $C(\bar{R})$.

ТЕОРЕМА I. Пусть имеет место сходимость интерполяционного процесса, т.е.

$$\|P_{nm}f-f\| \to 0,\ n,m \to \infty, \bar{h}_n, \bar{l}_m \to 0\ , \tag{II}$$

для всякой функции $f(x,y)$ из $C(\bar{R})$. Тогда если $f(x,y)$ принадлежит классу*) $C_1^{\lambda}(\bar{R})$, $0<\lambda<1$, то при достаточно больших $n \geq n_0$, $m \geq m_0$ существует единственное решение задачи (IO) и имеет место оценка

$$\|s_u - u\| \leq B(\bar{h}_n^{\lambda} + \bar{l}_m^{\lambda})\ . \tag{I2}$$

где B – некоторая постоянная, не зависящая от сетки, $\|f\| = \max\{|f(x,y)|,\ (x,y)\in \bar{R}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем разрешимость приближенной задачи (IO). Так как $f(x,y)\in C_1^{\lambda}(\bar{R})$, то выполнены условия (3),(4) при $k=2$ и, значит, задача (7),(8) имеет решение $u(x,y)\in C_0^{2+\lambda}(\bar{R})$, где $C_0^{2+\lambda}(\bar{R})$ – множество функций из $C^{2+\lambda}(\bar{R})$, обращающихся в нуль на границе Γ прямоугольника R. Возьмем за область определения оператора L задачи (7), (8) $D(L) = C_0^{2+\lambda}(\bar{R})$ и за область значений $R(L) = C_1^{\lambda}(\bar{R})$. В силу теоремы Волкова [IO], приведенной ранее, оператор L переводит $D(L)$ на $R(L)$ взаимнооднозначно, т.е. существует линейный оператор $L^{-1}: R(L) \to D(L)$.

Пространства $D(L)$, $R(L)$ и рассматриваемые далее будем считать нормированными, т.е. с нормой $\|\cdot\|$ пространства $C(\bar{R})$. Из (II) вытекает, что найдутся такие n_0, m_0, что при всех $n \geq n_0$, $m \geq m_0$ будут выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} &\|P_{nm}-E\| \leq \varepsilon(n,m) \leq \varepsilon(n_0,m_0) = \varepsilon < 1\ , \\ &\|P_{nm}f\| = \|(P_{nm}-E)f + f\| \leq (1+\varepsilon)\|f\|\ , \\ &\|P_{nm}f\| = \|f-(E-P_{nm})f\| \geq (1-\varepsilon)\|f\|\ , \end{aligned} \tag{I3}$$

где E – единичный оператор.

Обозначим через $\tilde{P}_{nm}$ сужение проектора P_{nm} на подпространство $L\,S_0(\Delta_{nm})$. Из (IO) имеем

$$\tilde{P}_{nm} z = P_{nm} f,\quad z = L[s_u(x,y)] \in L s_0(\Delta_{nm})\ . \tag{I4}$$

---

*) Здесь $C_1^{\lambda}(\bar{R})$ – множество функций из $C^{\lambda}(\bar{R})$, обращающихся в нуль в вершинах прямоугольника R.

Пространства $LS_0(\Delta_{nm})$ и $P_{nm}C_1(\bar{R})$ конечномерны и, значит [I], банаховы. В силу (I3) отображение, осуществляемое оператором $\tilde{P}_{nm}$, взаимнооднозначно. Так как, кроме того, размерности этих пространств совпадают, то уравнение (I4) имеет единственное решение для любого элемента из $P_{nm}C_1(\bar{R})$. Тем самым выполнены условия теоремы Банаха [I], а значит, существует непрерывный обратный оператор $\tilde{P}_{nm}^{-1}$: $P_{nm}C_1(\bar{R}) \to LS_0(\Delta_{nm})$ и

$$\|\tilde{P}_{nm}^{-1}\| \le \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad n \ge n_0, \quad m \ge m_0. \tag{I5}$$

Из (I4) имеем $z = \tilde{P}_{nm}^{-1}P_{nm}f$, но тогда $s_u(x,y)=L^{-1}z$ - единственный элемент, удовлетворяющий уравнению (I0). Однозначная разрешимость приближенной задачи (I0) доказана.

Покажем как выполняются оценки (I2). Из неравенств (I3) и (I5) следует, что нормы $\|P_{nm}^{-1} P_{nm}\|$ ограничены в совокупности, т.е. $\|\tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}\| \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $n \ge n_0$, $m \ge m_0$. Ясно, что $\tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}\, g = g$ для $g \in LS_0(\Delta_{nm})$, и поэтому справедливы соотношения

$$z-f = \tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}f-f = \tilde{P}_{nm}^{-1} P_{nm}(f-g) - (f-g),$$

$$\|Ls_u-f\| \le [2/(1-\varepsilon)]\|f-g\|.$$

В силу произвольности элемента g из последнего неравенства получаем

$$\|Ls_u-f\| \le \frac{2}{1-\varepsilon} \inf_{s \in S_0(\Delta_{nm})} \| Ls-Lu\|. \tag{I6}$$

Далее нам необходимы неравенство [I3]

$$\|u\| \le B_1\|f\|, \quad b_1 > 0, \tag{I7}$$

справедливое в условиях теоремы I и

ЛЕММА. Пусть $u(x,y)\in C^{2+\lambda}(\bar{R})$ и $s = s(u;x,y)$ - бикубический интерполяционный сплайн, тогда справедливы оценки

$$\|D^{(2,0)}(u-s)\| \le B_2\bar{h}_n^{\lambda}+B_3\bar{l}_m^2 \qquad (B_2, B_3 > 0), \tag{I8}$$

$$\|D^{(0,2)}(u-s)\| \le B_4\bar{l}_m^{\lambda}+B_5\bar{h}_n^2 \qquad (B_4, B_5 > 0). \tag{I9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть функции $s_1 = s_1(u;x,y)$ и $s_2 = s_2(u;x,y)$ – кубические полусплайны по x и y соответственно. При этом неравенство (I8) вытекает из соотношений (см. [II]):

$$\|D^{(2,0)}(u-s_1)\| \le B_{22}\omega(D^{(2,0)}u,\bar{h}_n) \le B_2\bar{h}_n^{\lambda},$$

$$\|D^{(2,0)}(s_1-s)\| \le B_{20}\omega(D^{(2,2)}s_1\ \bar{l}_m)\bar{l}_m^2 \le B_3\bar{l}_m^2 ,$$

где B_{22}, B_{20}, B_2, B_3 – некоторые постоянные, $\omega(u,h_n)$ – модуль непрерывности функции $u(x,y)$ по переменной x с шагом $\bar{h}_n$. Неравенство (I9) доказывается аналогично.

Продолжим доказательство теоремы I. Из неравенства (I7) вытекает, что оператор L^{-1} ограничен на функциях $C^{\lambda}(\bar{R})$. Отсюда и из соотношения $Ls_n(x,y) \in C^{\lambda}(\bar{R})$ получаем оценку

$$\|s_n-u\| \le \|L^{-1}\|\cdot\|Ls_n-f\| .$$

Используя это неравенство и соотношения (I8), (I9) и (I6), имеем

$$\|s_n-u\| \le \frac{2\|L^{-1}\|}{1-\varepsilon} \inf_{s\in S_0(\Delta_{nm})}\|Ls-Lu\| \le$$

$$\le \frac{2\|L^{-1}\|}{1-\varepsilon} \|Ls(u;x,y)-Lu\| \le B(\bar{h}_n^{\lambda} + \bar{l}_m^{\lambda}).$$

Теорема доказана полностью.

Отметим, что оценки типа (I8), (I9) представляют самостоятельный интерес. В них нет ограничений на шаги $\bar{h}_n, \bar{l}_m$, и, кроме того, от интерполируемой функции $u(x,y)$ требуется минимальная гладкость. Ранее такие оценки были известны только для функций $u(x,y)$ таких, что $D^{(p,q)}u \in C(\bar{R})$, где $0<p,q\le 2$. Оценки типа (I8),(I9) впервые получены в [I4].

В случае если решение задачи (7), (8) обладает большей гладкостью, то естественно ожидать более быструю сходимость метода сплайн-коллокации. Из-за отсутствия полного исследования задачи $\inf_{s\in S_0(\Delta_{nm})}\|Ls-Lu\|$ мы ограничимся случаем равномерных сеток Δ_{1n}, Δ_{1m}.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(x,y)\in C^{k-2+\lambda}(\bar{R})$, $0<\lambda<1$, $k=3,4$, и задача (7), (8) имеет решение $u(x,y)\in C^{k+\lambda}(\bar{R})$. Пусть сетки Δ_{1n}, Δ_{1m} равномерные. Тог –

да справедлива оценка

$$\|s_u - u\| \le B(h_n^{k+\lambda} + l_m^{k+\lambda}), \quad k = 3,4,$$

где $h_n = |x_{i+1} - x_i|$, $l_m = |y_{j+1} - y_j|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично доказательству теоремы I. Новизна в доказательстве имеется только в оценках типа (I8),(I9), при выводе которых нужно использовать в качестве промежуточного приближения сплайны пятой степени [I5].

§3. Алгоритм решения

Бикубический сплайн $s_u(x,y)=s(x,y)$, аппроксимирующий решение краевой задачи (7), (8) на сетке $\Delta = \Delta_{NM} = \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_{1N} \cdot \Delta_{2N}$, представим в одной из форм [8]:

$$s(x,y) = \sum_{i,j=-1}^{N+1,M+1} v_{ij}\, \sigma_i(x)\sigma_j(y), \tag{20}$$

$$s(x,y) = \sum_{i=-1}^{N+1} v_i^1(y)\, \sigma_i(x), \tag{2I}$$

$$s(x,y) = \sum_{j=-1}^{M+1} v_j^2(x)\sigma_j(y), \tag{22}$$

где $v_i^1(y) = \sum_{j=-1}^{M+1} v_{ij}\, \sigma_j(y)$, $v_j^2(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} v_{ij}\, \sigma_i(x)$ – кубические сплайны, $\sigma_i(x)$, $\sigma_j(y)$ – B-сплайны [8,9], всевозможные попарные произведения которых образуют базис пространства $S(\Delta)$.

Используя условия коллокации, граничные условия и представление сплайна в форме (20), придем к замкнутой системе алгебраических уравнений $L_h v = F$ относительно параметров сплайна v_{ij}. В силу теорем I и 2, матрица L_h имеет обратную, и, значит, решение можно найти, используя различные как прямые, так и итерационные методы [I6]. Процесс этот трудоемкий, так как размерность системы $(N+1)(M+1)$ может быть большой.

Представления (2I) и (22) сплайна позволяют экономично реализовать вычислительный алгоритм схемами в дробных шагах [7,I6]. Для этого, используя (2I) и (22), введем сеточные операторы Λ_k, $\tilde{\Lambda}_k$, $k = 1,2$, соотношениями:

$$(\Lambda_1 v^1)_i = \sigma''_{i+1}(x_i)v^1_{i+1} + \sigma''_i(x_i)v^1_i + \sigma''_{i-1}(x_i)v^1_{i-1},$$

$$(\tilde\Lambda_1 v^1)_i = \sigma_{i+1}(x_i)v^1_{i+1} + \sigma_i(x_i)v^1_i + \sigma_{i-1}(x_i)v^1_{i-1},$$

$$(\Lambda_2 v^2)_j = \sigma''_{j+1}(y_j)v^2_{j+1} + \sigma''_j(y_j)v^2_j + \sigma''_{j-1}(y_j)v^2_{j-1},$$

$$(\tilde\Lambda_2 v^2)_j = \sigma_{j+1}(y_j)v^2_{j+1} + \sigma_j(y_j)v^2_j + \sigma_{j-1}(y_j)v^2_{j-1}\ ,$$

где нижний индекс i показывает, как вычисляется результат действия операторов $\Lambda_1, \tilde\Lambda_1$ в точке i сетки Δ_1, а j – операторов Λ_2, $\tilde\Lambda_2$ в точке j сетки Δ_2. В результате на сетке Δ имеем соотношения $v^2 = \tilde\Lambda_1 v$, $v^1 = \tilde\Lambda_2 v$, $S = \tilde\Lambda_2 v^2 = \tilde\Lambda_1 v^1$, где v^1, v^2, v, S – сеточные функции.

Используя граничные условия (8) и то, что $D^{(2\ 0)}S(x_k, y) = f(x_k, y)$, $k=0,N$, и $D^{(0,2)}S(x,y_l) = f(x,y_l)$, $l = 0,M$, доопределим сеточные операторы Λ_k, $\tilde\Lambda_k$ в граничных точках:

$$\left.\begin{aligned}(\Lambda_1 v^1)_0 &= \mu^1_0 v^1_0 + \mu^1_1 v^1_1, \quad (\Lambda_1 v^1)_N = \mu^1_N v^1_N + \mu^1_{N-1} v^1_{N-1}\,,\\ (\Lambda_2 v^2)_0 &= \mu^2_0 v^2_0 + \mu^2_1 v^2_1, \quad (\Lambda_2 v^2)_M = \mu^2_M v^2_M + \mu^2_{M-1} v^2_{M-1}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}\mu^1_0 &= \sigma''_0(x_0) - \frac{\sigma''_{-1}(x_0)}{\sigma_{-1}(x_0)}\,\sigma_0(x_0),\\ \mu^1_1 &= \sigma''_1(x_0) - \frac{\sigma''_{-1}(x_0)}{\sigma_{-1}(x_0)}\,\sigma_1(x_0),\\ \mu^1_N &= \sigma''_N(x_N) - \frac{\sigma''_{N+1}(x_N)}{\sigma_{N+1}(x_N)}\,\sigma_N(x_N),\\ \mu^1_{N-1} &= \sigma''_{N-1}(x_N) - \frac{\sigma''_{N+1}(x_N)}{\sigma_{N+1}(x_N)}\,\sigma_{N-1}(x_N),\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

а выражения для μ_k^2, $k=0,1,\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{M}-1$, получаются из (24) заменой x на y и N на M. Операторы $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ определяются в граничных точках по формулам (23) для операторов A_1 и A_2 соответственно, если у сплайнов, содержащих вторую производную, ее убрать, а у не содержащих дифференцирования – поставить.

Система уравнений метода сплайн-коллокации (9) запишется в виде:

$$A_1v^1+A_2v^2=f,\quad \tilde{A}_1v^1+\tilde{A}_2v^2. \qquad (25)$$

Матрицы операторов A_1,A_2 и $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ при выбранных способах упорядочения компонент – клеточно-диагональные, каждая клетка которых квадратная трехдиагональная матрица. Сеточные операторы A_k, $\tilde{A}_k$ влекут следующий способ упорядочения компонент сеточных функций v^1 и v^2:

$$v_j^1=\{v_{0j}^1,v_{1j}^1,\ldots,v_{Nj}^1\}^T,\quad v^1=\{v_0^1,v_1^1,\ldots,v_M^1\}^T,$$

$$v_i^2=\{v_{i0}^2,v_{i1}^2,\ldots,v_{iM}^2\}^T,\quad v^2=\{v_0^2,v_1^2,\ldots,v_N^2\}^T ,$$

где $v_{ij}^1=v_i^1(y_j)$ и $v_{ij}^2=v_j^2(x_i)$.

Перейдем к непосредственному решению системы (25). Ограничимся простейшей неявной двухслойной схемой:

$$\frac{\tilde{A}_1v^{1,n+\frac{1}{2}}-\tilde{A}_2v^{2,n}}{\tau}=A_1v^{1,n+\frac{1}{2}}-\tilde{f},$$

$$\frac{\tilde{A}_2v^{2,n+1}-\tilde{A}_1v^{1,n+\frac{1}{2}}}{\tau}=A_2v^{2,n+1},$$

численная реализация которой сводится к последовательному решению по строкам и столбцам систем уравнений размерности $N+1$ и $M+1$ трехточечной прогонкой

$$(\tilde{A}_1-\tau A_1)v^{1,n+\frac{1}{2}}=\tilde{A}_2v^{2,n}-\tau\tilde{f},$$

$$(\tilde{A}_2-\tau A_2)v^{2,n+1}=\tilde{A}_1v^{1,n+\frac{1}{2}},\quad n=0,1,\ldots .$$

После того как v^1 и v^2 вычислены с требуемой точностью, по ним определяем значения сплайна, а в случае необходимости и его параметры v_{ij}, используя процедуру работы [8]. Устойчивость и сходимость схемы (26) гарантированы, если $\tau > \max(\bar{h}^2/6, \bar{l}^2/6)$ и $h_1 > h_0$, $h_N > h_{N+1}$, $l_1 > l_0$, $l_M > l_{M+1}$. Для доказательства достаточно учесть, что матрицы $\bar{\Lambda}_1 - E - \tau\Lambda_1$ и $\bar{\Lambda}_2 - E - \tau\Lambda_2$ якобиевы и имеют неотрицательный вещественный спектр в силу свойств B-сплайнов [8].

Результаты работы распространяются на случай общей неоднородной краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольной области при условии, что задача имеет достаточно гладкое решение в $\bar{R}$.

Пользуясь случаем, выражаем признательность участникам семинара по сплайн-функциям и особенно руководителю Ю.С.Завьялову и В.Л.Мирошниченко за полезные обсуждения данной работы.

Литература

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. М., "Наука", 1977, с. 548-561.

2. RUSSEL R.D., SHAPINE L.F. A Collocation Method for Boundary Value Problems.-"Numer.Math.",1972,Bd 19,S.1-28.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом методом сплайн-функций.-"Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат.",1972, №5, с. 46-50.

4. ALBASINY E.L.,HOSKINS W.D. Cubic spline solutions to two-point boundary value problems. - "Computer J.", 1969, v.12,N 2, p.151-153.

5. SCHEINERT G. Numerische Losung der Laplace-Gleichung mittels Spline funktionen.- "Wiss.Z.Techn.Hochschule Illmenau",1977, Bd 23, N 5,S.91-99.

6. ИМАМОВ А. Метод сплайнов для решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве. -В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы. Вып. 65.) Новосибирск, 1975, с.89-95.

7. ЯНЕНКО Н.Н. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", 1967.

8. РОМАНСКИЙ В.П. К задаче интерполирования кубическими и бикубическими сплайн-функциями. -В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы. Вып. 68.) Новосибирск, 1976, с. 51-60.

9. BOOR C.de. On calculating with B-splines. - "J.Approximat. Theory",1972,v.6,N 1,p.50-62.

10. ВОЛКОВ Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике.- "Труды МИАН",т.XXVII, 1965, с.89-112.

11. АЛБЕРГ Д.Ж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Д.Ж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

12. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. и др. Приближенное решение оператор - ных уравнений. М., "Наука", 1969.

13. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А., УРАЛЬЦЕВА Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., "Наука", 1973.

14. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ИМАМОВ А. О вариационных задачах теории сплайнов. -В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, "Наука", 1978, с. 27-36.

15. ДУЙСЕКОВ А.К. Об интерполяции сплайнами пятой степени и их применения в методе коллокаций. Автореф. дис. на соис. учен. степени к.ф.-м.н. Алма-Ата, 1976. (Институт математики и механики АН КазССР.)

16. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. М.,"Наука", 1977.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 июня 1978 года