МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 518:517.944/947

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.П. Гаевой

Метод интегрального тождества был предложен Г.И. Марчуком [1] для приближенного решения одной краевой задачи с разрывными коэффициентами. Недавно [2,3] была дана вариационная формулировка этого метода и при достаточно общих предположениях относительно базисных функций и исходных данных задачи доказана сходимость приближенного решения к точному [4].

В данной работе предлагается некоторое обобщение метода интегрального тождества в его невариационной формулировке, доказывается теорема сходимости в банаховом пространстве, в качестве примера строится система разностных уравнений для краевой задачи с разрывными коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

1. Пусть E и F – вещественные банаховы пространства, L – линейный (возможно, неограниченный) оператор с областью определения $D(L) \subset E$ и областью значений $R(L) = F$. Предположим, что обратный оператор L^{-1} существует и ограничен, и рассмотрим вопрос о построении приближенного решения следующего уравнения:

$$Lu = f, \quad f \in F. \tag{1}$$

Зададим последовательности линейных операторов L^n, $n = 1, 2, \ldots$, $D(L^n) = D(L)$, $R(L^n) = F$, и предположим, что область определения $D(L - L^n)$ допускает расширение естественным образом на некоторое банахово пространство E_1, возможно, более широкое, чем E, или совпадающее с ним, и такое, что операторы $T_n = L^{-1}(L^n - L)$ ограничены из E_1 в E. Зададим на E_1 последовательность проекций –

ных операторов P_n и некоторых элементов $\phi_n \in E_1$, $n = 1,2,\ldots$.Приближенное решение задачи (I) определим как решение уравнения

$$L^n u^n + (L-L^n)P_n u^n = f + (L^n-L)\phi_n . \qquad (2)$$

Преобразуем уравнение (2) к эквивалентному виду

$$(I+T_n(I-P_n))u^n = L^{-1}f + T_n\phi_n , \qquad (3)$$

где I – единичный оператор.

Теперь легко видеть, что для разности $u-u^n$ справедливо соотношение $(I+T_n(I-P_n))(u-u^n) = T_n(u-P_n u-\phi_n)$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $q_n = \|T_n(I-P_n)\| \to q < 1$ и $\|u-P_n u-\phi_n\| \to 0$ при $n\to\infty$, тогда для достаточно больших n задача (2) однозначно разрешима, u^n сходится к u при $n\to\infty$ и имеют место оценки

$$\|u^n\|_E \le (1-q_n)^{-1}(\|L^{-1}\|\cdot\|f\|_F + \|T_n\|\ \|\phi\|_{E_1}) , \qquad (4)$$

$$\|u-u^n\|_E \le (1-q_n)^{-1}\|T_n\|\ \|u-P_n u-\phi_n\|_{E_1} . \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $q_n \to q<1$ при $n\to\infty$, то найдется такое $N\ge 1$, что для всех $n\ge N$ будет выполнено неравенство $q_n < 1$. Тогда, в силу известной теоремы (см. [5, с. 156]), оператор $I+T_n(I-P_n)$ имеет при $n\ge N$ обратный, норма которого не превосходит величины $(1-q_n)^{-1}$. Отсюда следует однозначная разрешимость уравнений (3) и (2) и справедливость оценок (4), (5). Сходимость приближенного решения к точному следует из оценки (5).

2. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Lu = -(p(x)u_x)_x + r(x)u_x + q(x)u = f(x), \qquad (6)$$

$$-\alpha_0 u_x(0) + \beta_0 u(0) = \beta_0\gamma_0 , \quad \alpha_1 u_x(1) + \beta_1 u(1) = \beta_1\gamma_1 , \qquad (7)$$

$$|\alpha_j| + |\beta_j| \ne 0, \quad j=0,1.$$

Будем предполагать, что решение, обладающее непрерывным дифференцируемым потоком $p(x)u_x$, существует и единственно. Зададим на отрезке [0,I] сетку: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots n$. Выберем коэффициенты дифференциального оператора

$$L^n = -\frac{d}{dx}\, p^n(x)\, \frac{d}{dx} + r^n(x)\, \frac{d}{dx} + q^n(x)$$

таким образом, чтобы на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$, можно было легко выписать в квадратурах решение краевой задачи

$$L^n v = f,\ x\in(x_{i-1}\ x_i),\ v(x_{i-1}) = \mu_{i-1},\ \ v(x_i) = \mu_i. \qquad (8)$$

Обозначим через $S^n v(x)$ некоторый интерполянт функции $v(x)\in C[0,1]$ такой, что $S^n v(x)\in D(L-L^n)$ и $S^n v(x_i) = v(x_i)$, $i=\overline{0,n}$ $(i=0,1,\ldots,n)$.

Приближенное решение задачи (6), (7) будем искать как решение уравнения

$$L^n u^n + (L-L^n)S^n u^n = f\ , \qquad (9)$$

удовлетворяющее граничным условиям (7) и имеющее непрерывный поток $p(x)u^n_x\ (x\ )$.

Пусть $G^i_n(x,\xi)$ $(i = \overline{1,n})$ – функция Грина краевых задач (8), а функции $v^i_n(x)$ и $\bar v^i_n(x)$ $(i=\overline{1,n})$ удовлетворяют условиям $L^n v^i_n = L^n \bar v^i_n = 0$, $x\in(x_{i-1}, x_i)$, $v^i_n(x_{i-1}) = \bar v^i_n(x_i) = 1$, $v^i_n(x_i) = \bar v^i_n(x_{i-1}) = 0$. Тогда для решения уравнения (9) имеют место равенства:

$$u^n(x) = u^n_{i-1}\, v^i_n(x) + u^n_i \bar v^i_n(x) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} G^i_n(x,\xi) F_n(\xi)\, d\xi,$$

$$x\in[x_{i-1}\ x_i],\quad u^n_i = u^n(x_i),\quad F_n = (L^n - L)S^n u^n + f, \qquad (10)$$

$$i = 1,2,\ldots,n \quad (i=\overline{1,n}).$$

В дальнейшем, где это не вызывает недоразумения, индекс n будем опускать.

Продифференцировав равенства (10), найдем выражения для производных слева и справа в узлах сетки:

$$u^-_{x,i} = u_{i-1} v^i_{x,i} + u_i \bar v^i_{x,i} + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} G^i_x(x_i,\xi) F_n(\xi)\, d\xi,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$(11)$$

$$u^+_{x,i} = u_i v^{i+1}_{x,i} + u_{i+1} \bar v^{i+1}_{x,i} + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} G^{i+1}_x(x_i,\xi) F_n(\xi)\, d\xi,\ i=0,1,\ldots,n,$$

где

$$u^{\pm}_{x,i} = u_x(x_i\pm 0),\quad v^i_{x,j} = v^i_x(x_j)\ .$$

Равенства (II) вместе с граничными условиями

$$-\alpha_0 u^{+}_{\bar{x},0}+\beta_0 u_0 = \beta_0 \gamma_0, \quad \alpha_1 u^{-}_{\bar{x},n}+\beta_1 u_n = \beta_1 \gamma_1 \tag{I2}$$

и условиями непрерывности потока

$$p^{-}_i u^{-}_{\bar{x},i} = p^{+}_i u^{+}_{\bar{x},i}, \quad i=\overline{1,n-1} \quad (p^{\pm}_i = p(x_i \pm 0)) \tag{I3}$$

дают нам полную систему тождеств для построения разностных урав - нений.

Рассмотрим некоторые из возможных способов задания интерпо - лянта.

I. Пусть $p(x)\geq p_0>0$, $p(x)\in C^{m-1}[0,1]$, $p^{m}(x)\in Q^{m-1}[0,1], m\geq 2$, $r(x)$, $q(x)$, $f(x)\in C^{m-2}[0,1]$, $r^{m}(x), q^{m}(x)\in Q^{m-2}[0,1]$ ($Q^{m}[0,1]$ - пространство кусочно-непрерывных вместе с производными до m-го порядка функций на $[0,I]$ с возможными разрывами первого рода в конечном числе точек), тогда в качестве $S^{m}u$ можно взять интерполянт с узлами интерполяции x_i, $i=0,1,\dots,n$, кратность которых не превосходит m.

Зададим систему базисных функций $\varphi_{ij}(x)$, $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}\varphi_{ij}(x)\in C^{m}[0,1],\\ D^{\alpha}\varphi_{ij}(x_l) = \delta_{\alpha l}\,,\delta_{ij}, \quad \alpha l=\overline{0,m}, \quad i,j=\overline{0,n}\,,\end{gathered} \tag{I4}$$

где $D^{\alpha} = \dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$, $\delta_{ij},\delta_{\alpha l}$ - символы Кронекера.

Для интерполянта выпишем следующее представление

$$Su = \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} D^{l}u(x_i)\varphi_{li}(x). \tag{I5}$$

Продифференцировав уравнение (9) последовательно m - 2 раза (гладкость коэффициентов операторов L,L^{m} и функций $f(x)$ и $S^{m}u^{m}$ позволяют выполнить эти операции) и подставив последовательно выражения для производных порядка m, $m-1,\dots,2$ в (I5), получим

$$Su = \sum_{i=0}^{n}\{u_i\sum_{l=0}^{m}\alpha_{li}\varphi_{li} + u_{\bar{x}i}\sum_{l=1}^{m}\beta_{li}\varphi_{li} + \sum_{l=2}^{m}c_{li}\varphi_{li}\}. \tag{I6}$$

Коэффициенты α_{li},β_{li} вычисляются через значения функций $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ и их производные в узлах сетки, c_{li} зависят, кроме того, от $f(x)$ и ее производных. Подставив выражение (I6) в правые части равенства (II), получим систему $2n$ уравнений относительно $2n+2$ неизвестных

$$u_{\bar{x}i} = u_{i-1}v^i_{\bar{x}i} + u_i\bar{v}^i_{\bar{x}i} + \sum_{j=0}^{m}(A_{ij}u_j + B_{ij}u_{\bar{x}j}) + F_i,$$

$$i = 1,2,\dots,n,$$

$$u_{xi} = u_i v^{i+1}_{xi} + u_{i+1}\bar{v}^{i+1}_{xi} + \sum_{j=0}^{m}(\bar{A}_{ij}u_j + \bar{B}_{ij}u_{xj}) + \bar{F}_i,$$

$$i = 0,1,\dots,n.$$

Два недостающих уравнения дают граничные условия (I2). Коэффициенты матриц A_{ij}, B_{ij}, $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_{ij}$ и правые части F_i, $\bar{F}_i$ являются интегралами от известных функций и могут быть вычислены с помощью известных квадратурных формул.

2. Пусть $r(x), q(x)$, $r^{m}(x)$, $q^{m}(x)$ принадлежат $Q^{m-2}[0,1]$, $p^{m}(x)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, принадлежат $Q^{m-1}[0,1]$, $m \geq 2$. Введем новую систему базисных функций:

$$\varphi^-_{l0} \equiv \varphi^+_{ln} \equiv 0, \quad l = \overline{0,m},$$

$$\varphi^-_{l,i}(x) = \begin{cases} \varphi_{li}(x), & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0, & x \bar{\in} (x_{i-1}, x_i), \ i=\overline{1,n}, \ l=\overline{1,m}, \end{cases}$$

$$\varphi^+_{li}(x) = \begin{cases} \varphi_{li}(x), & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \bar{\in} (x_i, x_{i+1}), \ i=\overline{0,n-1}, \ l=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Здесь $\varphi_{li}(x)$ $(i=\overline{0,n}, \ l = \overline{0,m})$ – функции, удовлетворяющие условиям (I4).

В этом случае интерполяционная формула будет иметь вид

$$Su = \sum_{i=0}^{n}\{u_i\varphi_0 + \sum_{l=1}^{m}(D^l u^-_i\varphi^-_{li} + D^l u^+_i\varphi^+_{li})\}, \tag{I7}$$

где $D^l u^{\pm}_i = D^l u(x_i \pm 0)$.

Находя из уравнения (9) выражения для производных $D^l u^{\pm}_i$ $(l = \overline{2,m}, \ i = \overline{0,n})$ и подставляя их в (I7), получим

$$Su = \sum_{i=0}^{n}\{u_i(\varphi_{0i} + \sum_{l=1}^{m}(\alpha^-_{li}\varphi^-_{li} + \alpha^+_{li}\varphi^+_{li}) + u^-_{\bar{x}i}\sum_{l=1}^{m}\beta^-_{li}\varphi^-_{li} +$$

$$+ u^+_{xi}\sum_{l=1}^{m}\beta^+_{li}\varphi^+_{li} + \sum_{l=2}^{m}(c^-_{li}\varphi^-_{li} + c^+_{li}\varphi^+_{li})\}. \tag{I8}$$

После подстановки выражения (I8) в (II) и вынесения неизвестных $u_i, u^-_{\bar{x}i}, u^+_{\bar{x}i}$ из-под знака интеграла получим $2n$ уравнений относительно $3n+1$ неизвестных:

$$u^+_{\bar{x},i-1} = u_{i-1}v^i_{\bar{x},i-1} + u_i\bar{v}^i_{\bar{x},i-1} + \sum_{j=0}^{n} A^+_{i-1,j}u_j +$$
$$+ B^+_{i-1,i-1}u^+_{\bar{x},i-1} + B^-_{i-1,i}u^-_{\bar{x}i} + F^+_{i-1},$$
$$u^-_{\bar{x}i} = u_{i-1}v^i_{\bar{x}i} + u_i\bar{v}^i_{\bar{x}i} + \sum_{j=0}^{n} A^-_{ij}u_j + \qquad (I9)$$
$$+ B^+_{i,i-1}u^+_{\bar{x},i-1} + B^-_{ii}u^-_{\bar{x}i} + F^-_i,$$
$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Недостающие уравнения дают граничные условия (I2) и условия непрерывности потока (I3). Равенства (I3) позволяют легко исключить из уравнений (I9) $(n-1)$-ю неизвестную, однако в ряде случаев систему уравнений (I2), (I9) и (I3) можно свести к $n+1$ уравнению относительно значений решения в узлах сетки.

Пусть все $R_i = (1-B^+_{i-1,i-1})(1-B^-_{ii}) - B^+_{i,i-1}B^-_{i-1,i}$, $i=\overline{1,n}$, отличны от нуля (при достаточно малых h_i это условие будет выполнено), тогда уравнения (I9), попарно при каждом $i=1,2,\ldots,n$ разрешимы относительно

$$u^+_{\bar{x},i-1} = R_i^{-1}[\Phi_{i,i-1}(1-B^-_{ii}) + \Phi_{ii}B^-_{i-1,i}],$$
$$u^-_{\bar{x}i} = R_i^{-1}[\Phi_{i,i-1}B^+_{i,i-1} + \Phi_{ii}(1-B^+_{i-1,i-1})], \qquad (20)$$
$$i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\Phi_{i,i-1} = u_{i-1}v^i_{\bar{x},i-1} + u_i\bar{v}^i_{\bar{x},i-1} + \sum_{j=0}^{n} A^+_{i-1,j}u_j + F^+_{i-1},$$
$$\Phi_{ii} = u_{i-1}v^i_{\bar{x}i} + u_i\bar{v}^i_{\bar{x}i} + \sum_{j=0}^{n} A^-_{ij}u_j + F^-_i. \qquad (2I)$$

Подставив полученные выражения в (I2) и (I3), получим разностные уравнения относительно u_i, $i = 0,1,\ldots,n$,

$$-\alpha_0[\Phi_{1,0}(1-B^-_{1,1}) + \Phi_{1,1}B^+_{0,1}] + R_1\beta_0 u_0 = R_1\beta_0\gamma_0 ,$$

$$[\Phi_{i,i-1}B^+_{i,i-1} + \Phi_{ii}(1-B^+_{i-1,i-1})]R_{i+1}p^-_i =$$

$$= [\Phi_{i+1,i}(1-B^-_{i+1,i-1}) + \Phi_{i+1,i+1}B^-_{i,i+1}]R_i p^+_i \quad , \qquad (22)$$

$$i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\alpha_1[\Phi_{n,n-1}B^+_{n,n-1} + \Phi_{n,n}(1-B^+_{n-1,n-1})] + R_n\beta_1 u_n = R_n\beta_1\gamma_1 .$$

Если функции $\varphi_{0,i}(x)$, $i=0,1,\ldots,n$, имеют финитные носители, то матрица системы (29) будет иметь ленточную структуру. Например, если $\varphi_{0,i}(x)=0$ при $x\,(x_{i-1},x_{i+1})\cap(0,1)$, $i=\overline{0,n}$, то матрица системы (22) будет трехдиагональной.

Учитывая вышеприведенные выкладки и единственность решения краевой задачи (8), нетрудно показать, что задача (9), (7) и соответствующая ей система разностных уравнений могут быть только одновременно однозначно разрешимы. Ответ на вопрос о разрешимости задачи (9), (7) и сходимости ее решения к точному решению задачи (6), (7) в ряде случаев может быть получен с помощью теоремы I. Для этого следует воспользоваться оценками, известными из теории дифференциальных уравнений и теории приближения функций.

Изложенный выше способ построения разностных уравнений является фактически частным случаем более общего метода, основанного на вспомогательных равенствах, которым удовлетворяет точное решение задачи (6), (7). Получим эти равенства и кратко опишем общую схему метода. Так как решение уравнения (6) удовлетворяет равенству $L^n u = (L^n-L)u + f$, то, повторяя для него выкладки, аналогичные (I0), (II) (в данном случае F_n полагается равным $(L^n-L)u+f$), найдем выражения для производных:

$$u^-_{x,i} = u_{i-1}v^i_{x,i} + u_i\bar v^i_{x,i} + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} G^i_x(x_i,\xi)((L^n - L)u + f)d\xi,$$

$$i = 1,2,\ldots,n,$$

$$u^+_{x,i} = u_i v^{i+1}_{x,i} + u_{i+1}\bar v^{i+1}_{x,i} + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} G^{i+1}_x(x_i,\xi)((L^n-L)u+f)d\xi, \qquad (II')$$

$$i = 0,1,\ldots,n-1,$$

где $u_i = u(x_i)$, $u^\pm_{x,i} = u'(x_i\pm 0)$, $i = \overline{0,n}$.

Подставив выражения (II$'$) в граничные условия (7) и условия неразрывности потока (I3), получим систему интегральных тождеств:

$$p_i^-[u_{i-1}v^i_{x,i}+u_i\bar{v}^i_{x,i}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} G^i_x(x_i,\xi)((L^n-L)u+f)d\xi]=$$

$$=p_i^+[u_iv^{i+1}_{x,i}+u_{i+1}\bar{v}^{i+1}_{x,i}+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} G^{i+1}_x(x_i,\xi)((L^n-L)u+f)d\xi],$$

$$i = 1,2,\ldots,n-1 \ ,$$

$$\alpha_0[u_0v^1_{x,0}+u_1\bar{v}^1_{x,0}+\int\limits_0^{x_1} G^1_x(0,\xi)((L^n-L)u+f)d\xi] = \beta_0(u_0-\gamma_0),$$

$$\alpha_1[u_{n-1}v^n_{x,n}+u_n\bar{v}^n_{x,n}+\int\limits_{x_{n-1}}^{1} G^n_x(1,\xi)((L^n-L))u+f)d\xi] = \beta_1(\gamma_1-u_1).$$

Отметим, что в частном случае, когда $r(x)\equiv 0$, $\alpha_0=\alpha_1=\gamma_0=\gamma_1=0$ и $L^n=-\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}$, вышеприведенные тождества совпадают с точностью до обозначений с тождеством Г.И.Марчука ([2, с. 94]). Для построения разностных уравнений интегралы, входящие в равенства (II), заменяются теми или иными аппроксимирующими их выражениями, которые могут быть получены с помощью квадратурных формул, как это сделано, например, в [2,8] для интегрального тождества Марчука, либо с помощью интерполирующих функций, как в настоящей статье. Производные от решения более высокого порядка, чем первый, если они входят в приближенные выражения для интегралов, исключаются с помощью уравнения (6), продифференцированного нужное число раз. Полученные приближенные равенства совместно с условиями (7), (I3) дают полную систему уравнений относительно приближенных значений решения и первых производных в узлах сетки. В ряде случаев первые производные можно исключить из уравнений (см.(20)-(22)) и сократить порядок решаемой системы в два раза. Если для аппроксимации интегралов применять выражения, не содержащие явно производных от решения, то построение разностных уравнений можно проводить, исходя непосредственно из системы интегральных тождеств. Кроме того, интегральные тождества позволяют достаточно просто получить оценки погрешности аппроксимации для соответствующих разностных схем. Нетрудно видеть, что данный метод является естественным обобщением метода интегрального тождества Г.И.Марчука, однако по сравнению с последним он позволяет за счет специального выбора оператора L^a более точно учесть те или иные особенности решения, обусловленные присутствием оператора L. Метод может быть использован при построении разностных схем для некоторых многомерных и нестационарных задач. Некоторые частные варианты данного метода применены в работах [6,7] для построения разностных схем высокого порядка точности для задачи вида (6), (7) и для одномерной краевой задачи параболического типа. Полученные в [6,7] схемы абсолютно устойчивы и имеют трехдиагональные матрицы с диагональным преобладанием.

3. В качестве примера рассмотрим уравнение с разрывными коэффициентами и малым параметром при старшей производной

$$Lu = -\epsilon(p(x)u_x)_x + q(x)u = f(x), \tag{23}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ принадлежат $Q^1[0,1]$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq q_0 > 0$, ϵ – малый положительный параметр. Ищется решение уравнения (23), удовлетворяющее граничным условиям (7) и обладающее непрерывным и дифференцируемым потоком. Относительно коэффициентов α_j, β_j, $j = 0,1$, будем предполагать, что $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\alpha_j + \beta_j \neq 0$, и если $\beta_j = 0$, то $\gamma_j = 0$.

Зададим на отрезке $[0,1]$ сетку: $0=x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ таким образом, чтобы часть ее узлов совпадала с точками разрыва функций $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$; $h_i = x_i - x_{i-1} = \phi_i h$, $h=1/n$, $i = \overline{1,n}$, ϕ_i все ограничены. Обозначим через $\bar{p}(x)$, $\bar{q}(x)$, $\bar{f}(x)$ кусочно-постоянные функции $\bar{p}(x)=p_i$, $\bar{q}(x)=q_i$, $\bar{f}(x) = f_i$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,n}$, где числа $p_i \geq p_0 > 0$, $q_i \geq q_0 > 0$ выбраны таким образом, что

$$p(x) - \bar{p}(x) = O(h), \quad q(x) - \bar{q}(x) = O(h), \quad \bar{f}(x) - f(x) = O(h). \tag{24}$$

Это нетрудно сделать, так как функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in Q^1[0,1]$ и точки их разрывов совпадают с частью узлов сетки.

В качестве L^a возьмем оператор

$$L^a = -\epsilon \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q^a(x), \quad q^a = \bar{q} \cdot \bar{p}/p.$$

Тогда функции $v^i(x)$, $\bar{v}^i(x)$, $G^i(x,\xi)$, $i = \overline{1,n}$, выпишутся в явном виде:

$$v^i(x)=k_i^{-1}\cdot \mathrm{Sh}\lambda_i\int_x^{x_i}\frac{d\tau}{p(\tau)},$$

$$\bar{v}^i(x)=k_i^{-1}\cdot \mathrm{Sh}\lambda_i\int_{x_{i-1}}^{x}\frac{d\tau}{p(\tau)}, \qquad x\in(x_{i-1},x_i),$$

$$G^i(x,\xi)=\frac{k_i}{\varepsilon\lambda_i}\cdot\begin{cases} v^i(x)\cdot\bar{v}^i(\xi), & x_{i-1}\le\xi\le x\le x_i,\\ \bar{v}^i(x)\cdot v^i(\xi), & x_{i-1}\le x\le\xi\le x_i,\end{cases} \tag{25}$$

$$\lambda_i=(q_i p_i\cdot\varepsilon^{-1})^{1/2},$$

$$k_i=\mathrm{Sh}\lambda_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\tau}{p(\tau)}, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Интерполянт $Su(x)$ зададим следующим образом:

$$\begin{gathered} Su(x)=S^0u(x)+\phi(x),\\ S^0u(x)=u(x_{i-1})v^i(x)+u(x_i)\bar{v}^i(x), \quad x\in[x_{i-1},x_i],\\ \phi(x)=q_i^{-1}f_i(1-v^i(x)-\bar{v}^i(x)), \quad x\in[x_{i-1},x_i],\\ i=1,2,\ldots,n. \end{gathered} \tag{26}$$

Для приближенного решения задачи (23), (7) получим уравнение

$$-\varepsilon(pu^n x)x+q^n u^n+(q-q^n)S^0u^n=f+(q^n-q)\phi=f_1. \tag{27}$$

Подставив $f^n=f+(q^n-q)(S^0u^n+\phi)$ и функции $v^i(x)$, $\bar{v}^i(x)$, $G^i(x,\xi)$, определенные формулами (25), в правые части равенств (II) и, по - требовав затем выполнения граничных условий (I2) и непрерывности потока (I3), получим систему разностных уравнений:

$$\begin{gathered} -(\alpha_0 b_1+p(0)\beta_0)u_0^n+\alpha_0 a_1 u_1^n=-\alpha_0 F_1-p(0)\beta_0\gamma_0,\\ a_i u_{i-1}^n+(\bar{b}_i+b_{i+1})u_i^n+a_{i+1}u_{i+1}^n=-\bar{F}_i+F_{i+1},\\ i=1,2,\ldots,k-1,\\ \alpha_1 a^n u_{n-1}^n-(\alpha_1\bar{b}_n+p(1)\beta_1)u_n^n=-\alpha_1\bar{F}_n-p(1)\beta_1\gamma_1. \end{gathered} \tag{28}$$

где

$$a_i=\lambda_i(\mathrm{Sh}\lambda_i H_i)^{-1}+\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} v^i\,\bar v^i\cdot\varphi\, dx,$$

$$b_i=\lambda_i\mathrm{Cth}\lambda_i H_i-\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (v^i)^2\varphi\, dx,\ \bar b_i=\lambda_i\mathrm{Cth}\lambda_i H_i-\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\bar v^i)^2\varphi dx, \tag{28'}$$

$$F_i=\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} v^i(\varphi\phi+f)dx,\quad \bar F_i=\varepsilon^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \bar v^i(\varphi\phi+f)dx,$$

$$\varphi = q^n-q,\quad H_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\tau}{p(\tau)},\quad i=1,2,\dots,n.$$

ЛЕММА I. Разностная задача (28), (28′) и задача (27), (7) однозначно разрешимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (27) скалярно в $L_2(0,1)$ на S^0u^n и проинтегрируем один раз по частям. Затем воспользуемся граничными условиями и легко проверяемым равенством

$$\int_0^1(\varepsilon p u_x^n S^0u_x^n + q^n u^n S^0u^n)dx = \int_0^1(\varepsilon p(S^0u_x^n)^2 + q^n(S^0u^n)^2)dx\ .$$

В результате получим

$$\varepsilon\beta_0\alpha_0^{-1}(u_0^n-\gamma_0)u_0^n + \varepsilon\beta_1\alpha_1^{-1}(u_n^n-\gamma_1)u_n^n +$$
$$+\int_0^1(\varepsilon p(S^0u_n^n)^2 + q(S^0u^n)^2)dx = \int_0^1 f_1\cdot S^0u^n\, dx. \tag{29}$$

Если α_0 или α_1 равно нулю, то $u_x^n(0)=0$ или $u_x^n(1)=0$ и соответствующее слагаемое в равенстве (29) исчезает. Пусть $\gamma_j=0$, $j=0,1$, и $F_i=\bar F_i=0$, $i=\overline{1,n}$, тогда

$$\int_0^1 f_1 S^0u^n dx = \sum_{i=1}^n(u_{i-1}^n F_i + u_i^n\bar F_i) = 0$$

и из равенства (29) получаем, что $S^0u^n\equiv 0$. Следовательно, $u_i^n=0$, $i=\overline{0,n}$, и разностная задача (28), (28′) однозначно разрешима.

Если u_i^n, $i=\overline{0,n}$, являются решением задачи (28), (28′), то функция $u^n(x)$, восстановленная по формулам (I0), (25), (26), является решением задачи (27), (7). Единственность решения следует из равенства (29).

В дальнейшем через C_j, $j=1,2,\ldots$, будем обозначать константы, не зависящие от h и ε.

ЛЕММА 2. *Для решения задачи* (27), (7) *справедлива оценка*

$$\|u^h\|_{C(0,1)} \le \max\,\{|\gamma_0|, |\gamma_1|, C_1 \sup|f_1|\}. \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену независимой переменной

$$\eta = \int_0^x \frac{d\tau}{p(\tau)}, \quad \eta_i = \int_0^{x_i} \frac{d\tau}{p(\tau)}, \quad 1 = \int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)},$$

тогда уравнение (27) примет вид

$$-\varepsilon u^h_{\eta\eta} + pq^h u^h + p(q-q^h)\cdot S^0 u^h = p\cdot f_1 . \tag{31}$$

Пусть $u^h(\eta)$ достигает своего наибольшего положительного максимума в некоторой точке $\eta = \eta^0 \in [\eta_{i-1}, \eta_i]$, $\eta^0 \ne 0$, $\eta^0 \ne 1$. Так как $u^h(\eta) \in C^1[0,1]$ и $u^h_{\eta\eta}$ кусочно-непрерывна, то $u^h_{\eta\eta}(\eta^0 \pm 0) \le 0$ и из уравнения (31) получаем неравенство

$$[q^h u^h + (q-q^h) S^0 u^h]_{\eta=\eta^0} \le f_1(\eta^0). \tag{32}$$

Так как $q^h > 0$ и $\max\limits_{[\eta_{i-1},\eta_i]} S^0 u^h(\eta) \le \max\,\{ u^h_{i-1}, u^h_i \} \le u^h(\eta^0)$, то из неравенства (32) следует $qS^0u^h|_{\eta=\eta^0} \le f_1(\eta^0)$. Подставив последнее неравенство в (32), получаем

$$u^h(\eta^0) \le \left[\frac{1}{q}\left(\frac{p}{\bar p} + \left|\frac{p}{\bar p} - \frac{\bar q}{q}\right|\right) f_1\right]_{\eta=\eta^0} \le C_1 \sup|f_1| . \tag{33}$$

Если $u^h(\eta)$ достигает своего наименьшего отрицательного минимума в некоторой внутренней точке $\eta^1 \in (0,1)$, то аналогичным образом получается неравенство

$$u^h(\eta^1) \ge -C_1 \sup|f_1|. \tag{34}$$

Пусть α_0 (α_1) не равно нулю, тогда в точке $\eta=0$ ($\eta=1$) функция $u^h(\eta)$ не может достигать максимума большего $|\gamma_0|$, ($|\gamma_1|$) . Если $\alpha_0=0$ ($\alpha_1=0$) , то коэффициенты уравнения и функцию можно симметрично продолжить за точку $\eta=0$ ($\eta=1$) . Тогда точка $\eta=0$ ($\eta=1$) будет внутренней и для нее справедливы оценки (39) и (34). Суммируя все вышесказанное, получим оценку (30).

ЛЕММА 3. Пусть $u(x)$ является решением краевой задачи (23), (7), тогда справедлива оценка

$$\|u-Su\|_{C(0,1)} \le C_2 h \min\{1, \varepsilon^{-1}h^2\}. \tag{35}$$

Функция $z = u-Su$ на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$, является решением краевой задачи $-\varepsilon(pz_x)_x + q^h z = f - \bar{f} + (q^h-q)u = f_2$, $z(x_{i-1}) = z(x_i) = 0$. Из принципа максимума и условий (24) получаем оценку

$$\|z\|_{C(0,1)} \le \sup\left|\frac{1}{\bar{q}\,\bar{p}}[p(f-\bar{f}) + (\bar{q}\cdot\bar{p} - qp)u]\right| \le C_3 h. \tag{36}$$

Так как $z(x)$ и $z'(x)$ непрерывны на каждом отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$, и $z(x_{i-1}) = z(x_i) = 0$, то существуют точки $x_i^0 \in (x_{i-1},x_i)$, $i=\overline{1,n}$, такие, что $z'(x_i^0) = 0$.

Проинтегрировав уравнение два раза и учитывая последнее неравенство и условия (24), получаем

$$\|z\|_{C(0,1)} \le \max_i \sup_{(x_{i-1},x_i)} \varepsilon^{-1}\left|\int_{x_{i-1}}^{x}\frac{1}{p}\int_{x_i^0}^{t}(f_2-q^h z)d\tau\cdot dt\right| \le C_4\varepsilon^{-1}h^3. \tag{36'}$$

Объединяя оценки (36), (36′), получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. Для разности решений задач (23), (7) и (27), (7) справедлива оценка

$$\|u-u^h\|_{C(0,1)} \le C_5 h^2\cdot\min\{1, \varepsilon^{-1}\cdot h^2\}. \tag{37}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $v(x)=u-u^h$ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon(pv_x)_x + q^h v + (q-q^h)\cdot S^0 v = (q^h-q)(u-Su)$$

и однородным граничным условиям (7) с $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$. Из оценки (30) следует неравенство $\|v\|_{C(0,1)} \le C_1 \sup|q^h-q|\cdot|u-Su|$. Откуда, учитывая оценку (35) и условия (24), получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более общее уравнение

$$-\varepsilon_1(p(x)u_x)_x + \varepsilon_2 r(x)u_x + q(x)u = f(x)$$

с двумя малыми параметрами $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2\ge0$ приводится к дивергентному виду (23)

$$-\varepsilon_1(p\varphi u x)_x + q\varphi u = f\varphi\,, \quad \varphi = \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\int\limits_0^x \frac{r(t)}{p(t)}\,dt\right).$$

Однако только в случае, когда $|\varphi'(x)|$ можно оценить сверху константой, не зависящей от ε_1 и ε_2 (например, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ или $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$), константы в оценках (35), (37) не будут зависеть от ε_1 и ε_2. В случае, когда $r(x)$ – кусочно-постоянная функция и точки ее разрыва совпадают с частью узлов сетки, в качестве L^a можно взять оператор

$$L^a = -\varepsilon_1\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + \varepsilon_2 r\frac{d}{dx} + q^a, \quad q^a = \overline{p}\overline{q}/p.$$

Тогда функции $v^i(x)$, $\overline{v}^i(x)$ и $G^i(x,\xi)$ выписываются в явном виде, а $\phi(x)$ находится из решения краевых задач $L^a\phi = \overline{p}\overline{f}/p$, $x\in(x_{i-1},x_i)$, $\phi(x_{i-1}) = \phi(x_i) = 0$, $i=\overline{1,n}$. В этом случае совершенно аналогично доказываются оценки вида (35), (37) с константами не зависящими от ε_1 и ε_2.

В заключение автор выражает глубокую признательность Г.И.Марчуку, чей добрый совет послужил началом данной работы.

Литература

1. МАРЧУК Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., "Атомиздат", 1958 (2-е изд. 1961)

2. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. М., "Наука", 1977.

3. АГОШКОВ В.И. О вариационной форме интегрального тождества Г.И.Марчука. Новосибирск, 1977. (Препринт ВЦ СО АН СССР.)

4. АГОШКОВ В.И. О методе интегральных тождеств. -В кн.: Труды семинара "Методы вычислительной и прикладной математики". Вып. 2. Новосибирск, 1977, с.135-142. (ВЦ СО АН СССР.)

5. ЛЮСТЕРНИК Л.А., СОБОЛЕВ В.И. Элементы функционального анализа. М., "Наука", 1965.

6. ГАЕВОЙ В.П. Схемы любого порядка точности для уравнений с постоянными коэффициентами.-В кн.: Тезисы докладов Пятой Всесоюзной конференции по моделированию химических процессов и реакторов. Уфа, 1974, т.3, с. 91-95.

7. ГАЕВОЙ В.П. Схемы высокого порядка точности для уравнений параболического типа.-В кн.: Труды 2-го советско-французского семинара по математическому моделированию каталитических процессов и реакторов. Новосибирск, 1976, с.260-267. (Ин-т катализа СО АН СССР).

8. СОБОЛЕВСКИЙ П.Е., ХОАНГ Ван Лай. О точных оценках разностных схем, построенных с помощью тождества Г.И.Марчука. Новосибирск, 1977. (Препринт ВЦ СО АН СССР.)

Поступила в ред.-изд.отд.
27 апреля 1978 года