

УДК 517.968.2:518.5

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

В.А. Леус

На плоскости (x, y) имеются n гладких кривых L_i ($i=1, 2, \dots, n$), на которых заданы функции $f_i(s^i)$, где s^i - некоторая параметризация кривой L_i . Система линейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\sigma_i(s^i)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^n [\lambda_i \sigma_i(s^i) + \oint_{L_i} \sigma_j(t^j) Q_{ij}(u(x(s^i)), y(s^i)), \\ v(x(t^j), y(t^j)) dt^j] = f_i(s^i). \quad (I)$$

Здесь $Q_{ij}(u, v)$ - ядро, u, v - известные функции точки (x, y) , λ_i - заданное число, аргумент t^j - пробегает то же множество, что и s^i при $i=j$. Символ \oint контурного интеграла будем применять для обозначения интегрирования по кривой, хотя L_i не обязательно замкнутая.

Предполагается, что решение системы (I) существует, и требуется найти некоторые функции $\tilde{\sigma}_i$, являющиеся в известном смысле [1] приближением решения.

Выберем на каждой L_i совокупность из m_i узлов и обозначим $\sum_{i=1}^n m_i = K$. Пусть s_k ($k=1, 2, \dots, K$) - соответствующие значения параметра, а f_k - значения правых частей в узлах. Согласно [1] будем заменять систему (I) системой линейных алгебраических уравнений, отбрасывая от квадратурных формул, учитывающих априорные сведения о гладкости искомых функций. В качестве функции, аппроксимирующей искомое решение, возьмем полиномиальный сплайн степени $p > 1$ и такой, что его коэффициенты допускают явное (без операции обращения матриц) линейное представление через значения σ_k иско-

мого решения в узлах. Тривиальным примером являются сплайны дефекта p , принадлежащие классу S^0 . При необходимости сохранения непрерывности производных до порядка $p-1$ включительно можно воспользоваться сплайном дефекта I , взятым в виде разложения по базовым сплайнам (B - сплайнам) [2,3]. Правда, в этом случае получается явное линейное выражение коэффициентов не через сами значения в узлах, а через некоторые вспомогательные величины, от которых легко перейти в конце концов к значениям искомого решения.

Подобный сплайн, очевидно, можно записать в виде $\sum_{k=1}^K P_k(s) \alpha_k$, где P_k суть полиномы степени не выше p непосредственно вычисляемыми коэффициентами. Подставляя это выражение в левые части системы (1) и приравнявая значения левых и правых частей в узлах, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A \vec{\alpha} = \vec{f}, \quad (2)$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ - искомая сеточная функция [4], $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_K)$ - заданная сеточная функция, A - квадратная матрица размерности $K \times K$. Элементами ее являются линейные комбинации интегралов $\oint_{L_k} P_k(t) Q(u, v) dt$, взятых по различным участкам кривых L_k . Решение системы (2) (если оно существует) дает сеточную функцию приближенного решения. Ясно, что для вычисления элементов матрицы A необходимо знание функций $x(s), y(s)$. В том случае, когда аналитического выражения координат точек кривой нет, а также в случае варьирования криволинейных конфигураций, приходится использовать геометрическую интерполяцию кривых по выбранным узлам. Это приводит к замене точного ядра на приближенное: $Q(u(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)), v(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))) = \tilde{Q}(s, t)$. Соответственно матрица системы (2) заменяется на матрицу $A_{\tilde{}}$ и в качестве приближенного решения получается сеточная функция $\vec{\alpha}_{\tilde{}} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_K)$.

Изложенный метод был применен к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода с ядрами вида

$$Q(s, t) = \frac{4r(t) \sqrt{(r'_t)^2 + (z'_t)^2}}{\sqrt{[r(s)+r(t)]^2 + [z(s)-z(t)]^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 - \frac{4r(s)r(t)\sin^2\theta}{[r(s)+r(t)]^2 + [z(s)-z(t)]^2}} \quad (3)$$

которая получается из (I) при нулевых значениях параметров λ_i . Здесь $r(\alpha)$ и $z(\alpha)$ — координаты текущей точки на окружностной или терполянционной кривой [5] в плоскости $(z, 0, r)$; α — длина вдоль ломаной с вершинами в узлах. В качестве правых частей уравнений системы (I) выступали тождественные константы. К подобной системе сводится задача о распределении зарядов на цилиндрически симметричной совокупности электродов, каждый из которых имеет заданный потенциал. В цилиндрических координатах α, r и θ эта задача явно двумерная.

Т а б л и ц а 1

№ точки	z	r	$\tilde{\sigma}_z$
1	0	3,30	1,051
2	0,30	3,24	0,930
3	0,53	3,10	0,892
4	0,73	2,83	0,802
5	0,80	2,50	0,692
6	0,72	2,15	0,588
7	0,55	1,92	0,523
8	0,28	1,70	0,417
9	0,17	1,50	0,609
10	0,14	1,35	1,834
11	0,07	1,27	3,60
12	0	1,25	4,53
13	-0,07	1,27	3,71
14	-0,14	1,35	2,23
15	-0,14	1,50	0,966
16	-0,07	1,70	0,561
17	0,10	1,94	0,258
18	0,33	2,15	0,075
19	0,42	2,40	0,050
20	0,37	2,60	0,046
21	0,20	2,77	0,055
22	0	2,82	0,085
23	-0,17	2,79	0,200
24	-0,36	2,80	0,705
25	-0,45	2,92	1,156
26	-0,40	3,10	1,150
27	-0,25	3,23	1,089

В качестве функции, аппроксимирующей искомое решение, применялся кубический (точнее, линейно-параболический) сплайн дефекта $\tilde{\sigma}_z$. Ядро (3) содержит в качестве сомножителя эллиптический интеграл первого рода, для вычисления которого использовалась стандартная процедура. При $t = \alpha$ этот интеграл имеет логарифмическую особенность, которая не позволяет стандартно вычислять криволинейный интеграл на всем промежутке, содержащем $t = \alpha$. Чтобы выделить особенность, вводился малый дробный шаг, в пределах ко-

Т а б л и ц а 2

№ точки	z	r	$\tilde{\sigma}_z$
1	0	1,000	-5,08
2	0,10	0,975	-4,13
3	0,22	0,865	-2,71
4	0,24	0,690	-1,45
5	0,12	0,520	-0,617
6	-0,12	0,520	-0,549
7	-0,24	0,690	-1,26
8	-0,22	0,865	-2,47
9	-0,10	0,975	-4,01

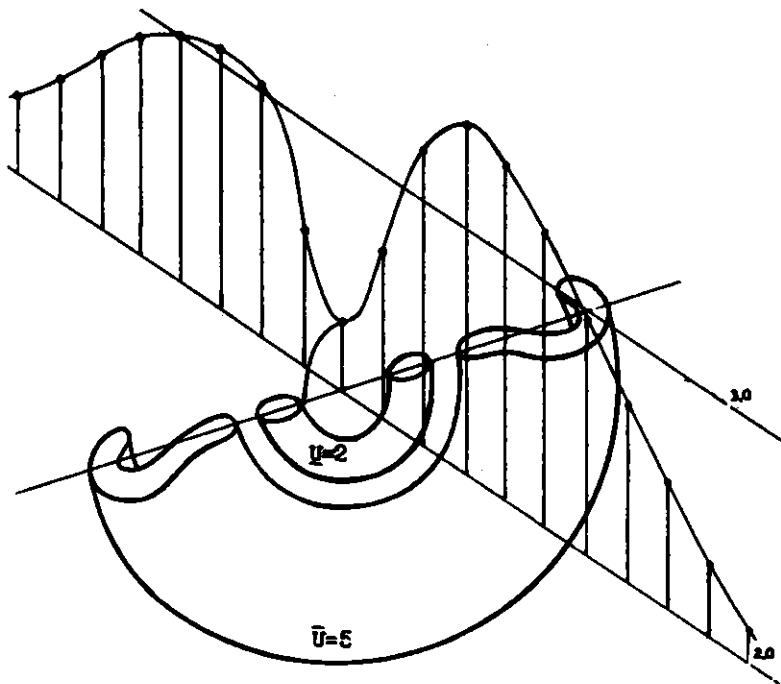


Рис. I

торого вклад в элемент матрицы $\tilde{\chi}$ вычислялся с учетом асимптотического логарифма $\ln|s-t|$:

На рис. I изображена совокупность двух соосных гладких замкнутых поверхностей вращения с φ -образным меридианным сечением. Контуры сечения заданы узловыми точками в плоскости $(z, 0, r)$. Задание наружного контура содержит 27 точек (табл. I), внутреннего - 9 точек (табл. 2).

Для вычисления криволинейных интегралов от приближенного ядра $\tilde{Q}(s, t)$ контуры заменялись окружностями геометрическим сплайном, основным "конструктивным" элементом которого является дуга окружности [5]. Численное решение обратной задачи для кулоновского потенциала производилось в предположении, что заданные поверхности являются проводниками и, следовательно, эквипотенциалами. В табл. I и 2 представлены решения для случая, когда внутренний

тороидальный электрод имеет потенциал $\bar{U} = 2$, а потенциал внешнего электрода $\bar{U} = 5$ (в условных единицах).

На рис.2 показаны в аксонометрической проекции кривые распределения плотности заряда по меридианным контурам. Положительные значения отложены вверх, отрицательные - вниз. Обращает на себя внимание дика плотности в ближайших точках контуров. При сближении электродов значения плотностей неограниченно возрастают. Разумеется, так обстоит дело только в математической модели, а физическим ограничением является пробой диэлектрика.

На рис.1 приведено распределение электростатического поля вдоль оси системы электродов, имеющее вид потенциальной ямы с барьерами высотой в 0.7 и 1.15 единиц. В соответствии с принципом минимума-максимума гармонической функции "дно" ямы есть седловая точка поля. Потенциал в ней равен 2.28 и спадает по r до значения 2.0 на внутреннем электроде.

Использованный подход позволяет (по крайней мере, в принципе) автоматизировать процесс подбора геометрии электродно-оптической системы с целью, например, получения заданного распределения поля вдоль оси. Варьируемыми параметрами в этой оптимизационной задаче могут быть координаты узлов, задающих меридианные сечения электродов.

Строение матрицы \tilde{A} может, по-видимому, оказаться отпугивающим фактором. Действительно, в отличие от "ленточных" матриц разностных схем [4], матрица заменяющей интегральное уравнение алгебраической системы может иметь нулевые элементы разве что случайно. Однако ядра интегральных уравнений, происходящих от кулоновского или вейтовского потенциалов, не ограничены в окрестности отрезка прямой $t = \tau$. В результате этого матрица \tilde{A} имеет преобладающую главную диагональ, что говорит в пользу хорошей обусловленности.

Непрерывность сплайнов, применяемых для аппроксимации искомого функции, не является обязательной. Если априори известно, что решение разрывно в некоторой точке, то в аппроксимирующей сплайн берется с разрывом в этой точке, причем возможен учет рода разрыва. Аналогичный прием годится для изолированных точек негладкости. Подобное качественное приближение к искомой функции дает возможность уменьшать размерность матрицы \tilde{A} , сохраняя при этом точность.

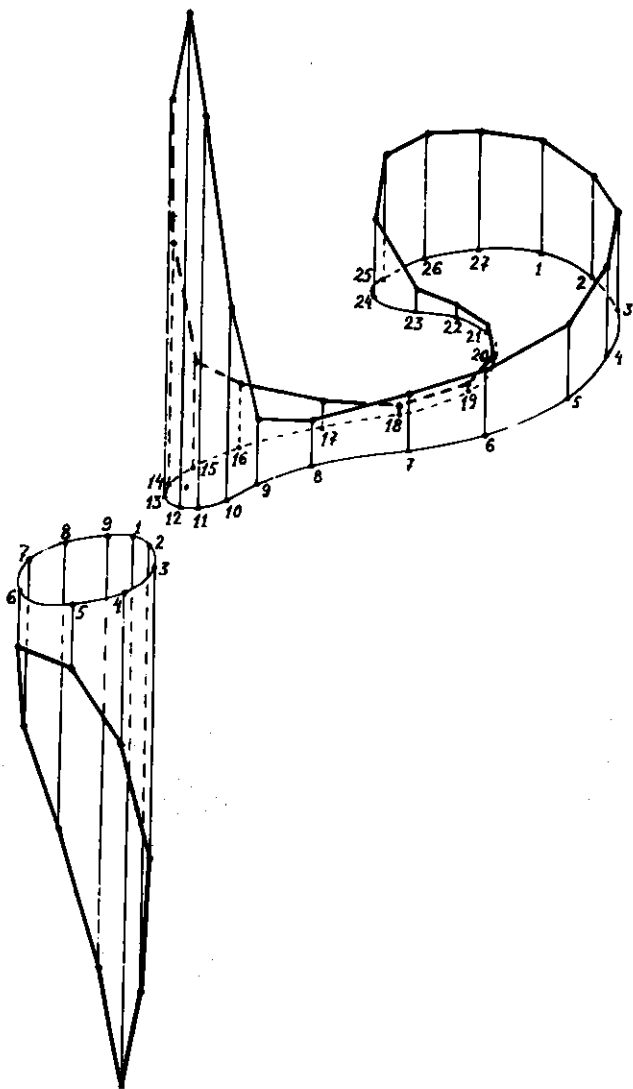


Рис. 2. Кривые распределения плотности заряда по меридианам контурам

Из сказанного уже ясно, что "интегральный" подход к решению некоторых краевых задач может существенно дополнить результаты "дифференциального" подхода. Рассмотрим еще несколько примеров такой дополнительности.

Чаше всего вычисление электростатического поля не является самодеющим процессом. Поле необходимо для расчета движения заряженной частицы. Правая часть уравнения движения (в векторной форме) содержит градиент. Если поле получено в виде сеточной функции, то градиент в произвольной точке вычисляется численным дифференцированием с интерполяцией. Если же имеется сеточная функция, аппроксимирующая плотность заряда, то градиент поля в любой точке выражается через определенные интегралы.

Очевидно, что операция численного дифференцирования проста, но сопряжена с потерей точности, тогда как численное интегрирование трудоемко, но обладает сглаживающим свойством. Выравнивание ошибок тем значительнее, чем дальше от носителей заряда (электродов) расположена данная точка. Для дифференциального подхода характерна обратная картина: погрешности решения малы вблизи границы области и растут с удалением от нее.

И, наконец, память, занимаемая одномерной сеточной функцией - решением интегрального уравнения, значительно меньше памяти, необходимой для хранения двумерного решения дифференциальной граничной задачи. По-видимому, это одно из проявлений общего закона программирования: выигрыш в памяти влечет проигрыш во времени, и наоборот.

Л и т е р а т у р а

1. СОВОЛЕВ С.Л. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. - "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1956, т.20, №4, с. 413-436.
2. BOOR C. de. On calculating with B-splines. - "J. Approximat. Theory", 1972, N 6, p.50-62.
3. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Н.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., "Наука", 1976.
4. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1973.
5. ЛЕУС В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38, Новосибирск, 1970, с. 102-127.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 апреля 1978 года