ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 79

УДК 518.74

ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ЯЗЫКАХ ЭМПИРИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.Е.Витяев

Введение

В работе продолжается анализ возможностей языков эмпирических систем, начатый в [I]. В пункте 2 работы [I] были приведены различные виды закономерностей[ж)], вытекающие из основных законов классической физики. Естественно возникает желание, во-первых, вывести приводимые там общие формулировки закономерностей подобия и обмена из свойств функциональных зависимостей и свойств шкал, во-вторых, дополнить список закономерностей, и, в-третьих, - это является главной целью данной работы - проанализировать взаимосвязь двух способов выражения законов - языков эмпирических систем и языка числовых функций. Этим вопросам и посвящена данная работа, имеющая отношение к проблеме систематизации формальных моделей эмпирических закономерностей [2, с.4, проблема №6]. Законы классической физики рассматриваются потому, что новый способ выражения закономерностей с помощью языков эмпирических систем желательно сравнить и соотнести прежде всего с хорошо известным способом выражения закономерностей, каким является язык числовых функций в классической физике. Такое соотнесение даст возможность глубже понять оба способа выражения законов.

В результате сравнительного анализа этих двух языков было получено следующее. Закономерности в языках эмпирических систем более детально, на операциональном уровне, выражают эмпирическое содержание физических законов. Каждая закономерность выражает неко-

[ж)] В дальнейшем для краткости вместо выражения "закономерность в языке эмпирических систем" будем говорить просто "закономерность", а вместо выражения "функциональная зависимость" - просто "зависимость". Под свойством будем понимать тот смысл, который выражен закономерностью.

торое эмпирическое свойство функциональной зависимости. Большинство таких свойств выводится из вида функциональной зависимости и свойств шкал. Если взять все функциональные зависимости, обладающие свойством, выраженным некоторой закономерностью, то получим класс функций, соответствующий данной закономерности. Совокупности закономерностей также соответствует класс функций, обладающих всеми свойствами, выраженными в этих закономерностях. Такое соответствие позволяет по-новому осуществлять предсказания, отправляясь не от класса функций, а от свойств функций из класса выраженных в языках эмпирических систем. Все приводимые закономерности имеют достаточно простой вид, поэтому нельзя утверждать, что языки эмпирических систем неудобны для выражения физических законов. Языка первой ступени достаточно для выражения почти всех приводимых закономерностей (исключения составляют свойства Архимеда и непрерывности). Другие выводы, которые можно сделать из анализа взаимосвязи двух языков, приведены в заключении. В дальнейшем будем предполагать, что основные понятия репрезентативной теории измерений известны, и все обозначения, относящиеся к ней, будем заимствовать из [3].

§I. Вывод законов подобия и обмена из свойств функциональных зависимостей и шкал

В [I] были приведены примеры закономерностей подобия и обмена в языках эмпирических систем, а также формулировки этих закономерностей в общем случае. Приведем вывод этих формулировок как следствий свойств функциональных зависимостей.

Предположим, что величины y, z, x имеют эмпирические системы $\mathbf{Y} = \langle Y; \leq_y, o_y \rangle$, $\mathbf{Z} = \langle Z; \leq_z \rangle$ и $\mathbf{X} = \langle X; \leq_x, o_x \rangle$, где отношения $\leq_y$, $\leq_z$, $\leq_x$ удовлетворяют аксиомам слабого порядка. Отношение o_y на Y будем называть замкнутым, если для любых $y_1, y_2 \in Y$ существует $y_3 \in Y$ такое, что $y_1 \circ y_2 \sim y_3$. Эмпирическая система $\mathbf{Y} = \langle Y; \leq_y, o_y \rangle$, $Y \neq \emptyset$, является положительной экстенсивной структурой [4,с.73] тогда и только тогда, когда для любых y_1, y_2, y_3, $y_4 \in Y$ выполнены аксиомы:[ж)]

I. $\leq_y$ – слабый порядок на Y;

2. $y_1 o (y_2 o y_3) \sim (y_1 o y_2) o y_3$;

3. $y_1 \leq y_2 \leftrightarrow y_1 o y_3 \leq y_2 o y_3 \leftrightarrow y_3 o y_1 \leq y_3 o y_2$;

ж) Во всех приводимых в дальнейшем формулах отношения $\leq_y$, o_y, $\leq_z$, $\leq_x$, o_x будут приводиться без индексов, так как из имени переменной всегда будет ясно, какое из соотношений используется.

4. $y_1 \circ y_2 < y_1$;

5. если $y_1 < y_2$, то для любых $y_3, y_4 \in Y$ существует i (натуральное число) такое, что $iy_1 \circ y_3 \le iy_2 \circ y_4$, где $iy_1 = y_1 \circ \ldots \circ y_1$.

Для таких эмпирических систем имеет место следующая

ТЕОРЕМА [4, с.74]. Эмпирическая система $\mathbf{Y} = \langle Y; \le_y, \circ_y \rangle$, $Y \ne \emptyset$, является положительной экстенсивной структурой тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi_y : Y \to Re^+$; $0 \notin Re^+$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&y_1 \le y_2 \Leftrightarrow \varphi_y(y_1) \le \varphi_y(y_2), \\
&\varphi_y(y_1 \circ y_2) = \varphi_y(y_1) + \varphi_y(y_2)
\end{aligned}
\tag{I}
$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$. Если существует другая функция $\varphi'_y : Y \to Re^+$, удовлетворяющая тем же условиям, то найдется такое $\alpha > 0$, что $\varphi'_y = \alpha\varphi_y$.

Такие функции определяют шкалу отношений.

Предположим, что эмпирические системы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ являются положительными экстенсивными структурами. Зафиксируем для них шкалы отношений $\varphi_y : Y \to Re^+$, $\varphi_x : X \to Re^+$, существующие в силу теоремы. Для эмпирической системы $\mathbf{Z} = \langle Z; \le_z \rangle$ зафиксируем некоторую шкалу порядка $m_z : Z \to Re^+$, являющуюся монотонно возрастающим, непрерывным отображением $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{R} = \langle Re^+; \le \rangle$. Предположим, что величины y, z, x являются результатами некоторого эксперимента $r = \langle y, z, x \rangle$. Для каждого эксперимента $r = \langle y, z, x \rangle$ и эмпирических систем $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}$ величин, входящих в этот эксперимент, в дальнейшем всегда будем предполагать выполнение следующих закономерностей:

$$
\begin{aligned}
&\forall z, x \, \exists r \, (z_r = z \,\&\, x_r = x), \\
&\forall y \, \exists r \, (y_r = y), \\
&\forall r_1, r_2 (x_1 \sim x_2 \,\&\, z_1 \sim z_2 \Rightarrow y_1 \sim y_2),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где y_r, z_r, x_r – компоненты эксперимента $r = \langle y_r, z_r, x_r \rangle$. Определим числовое отношение f на множестве $\varphi_y(Y) \times m_z(Z) \times \varphi_x(X)$ следующим образом: отношение f истинно на тех и только тех тройках $\langle \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{x} \rangle$, которые являются числовым представлением результатов эксперимента $r = \langle y, z, x \rangle$; $\tilde{y} = \varphi_y(y)$, $\tilde{z} = \varphi_z(z)$, $\tilde{x} = \varphi_x(x)$. При выполнении закономерностей (2) отношение f является функцией, так как в силу первой из закономерностей (2) она определена всюду на $m_z(Z) \times \varphi_x(X)$, в силу второй f является отображением на все множество $\varphi_y(Y)$ и в силу третьей для каждой пары значений $\tilde{z}$, $\tilde{x}$

значение $\tilde{y}$ определено однозначно. Можно показать и обратное: если значения шкал φ_y, m_z, φ_x на результатах некоторого эксперимента r связаны функциональной зависимостью f: $m_z(Z) \times \varphi_x(X) \xrightarrow{\text{на}} \varphi_y(Y)$, то выполняются закономерности (2). В дальнейшем также будем предполагать выполнение следующих закономерностей, определяющих существенность зависимости f от каждой из переменных $\tilde{z}$ и $\tilde{x}$:

$$\exists r_1, r_2 (x_{r_1} \sim x_{r_2} \& y_{r_1} \not\sim y_{r_2}),$$
$$\exists r_1, r_2 (z_{r_1} \sim z_{r_2} \& y_{r_1} \not\sim y_{r_2}).$$

Предположим, что значения шкал φ_y, φ_x, m_z на результатах эксперимента $r = \langle y, z, x \rangle$ связаны одной из следующих функциональных зависимостей:

$$\forall r(\varphi_y^n(y) = m_z(z) \cdot \varphi_x^m(x)), \ \forall r(\varphi_y^n(y) = \varphi_x^m(x)/m_z(z)) \qquad (3)$$

или, в более простом виде, $\tilde{y}^n = \tilde{z} \cdot \tilde{x}^m$, $\tilde{y}^n = \tilde{x}^m / \tilde{z}$. Выведем из зависимостей (3) и свойств шкал $\varphi_y, m_z, \varphi_x$ закономерности подобия.

Проведем рассуждения для первой из зависимостей (3). Для второй они полностью аналогичны. Обозначим i-кратное применение отношения o_y к величине y через iy. Возьмем эксперименты $r_1 = \langle y_1, z_1, x_1 \rangle$, $r_2 = \langle y_2, z_2, i^n x_1 \rangle$, где $z_1 \sim z_2$, $i > 0$, i^n – степень i. Тогда $\varphi_y^n(y_2) = m_z(z_2) \cdot \varphi_x^m(i^n x_1) = m_z(z_2) \cdot i^{nm} \cdot \varphi_x^m(x_1)$. Так как $m_z(z_2) = m_z(z_1)$ и $\varphi_y^n(y_1) = m_z(z_1) \cdot \varphi_x^m(x_1)$, то $\varphi_y^n(y_2) = i^{nm} \cdot \varphi_y^n(y_1)$. Откуда из $\varphi_y(y_2) > 0$ вытекает $\varphi_y(y_2) = i^m \cdot \varphi_y(y_1) = \varphi_y(i^m y_1)$. Следовательно, $y_2 \sim i^m y_1$. Обратно, возьмем эксперименты $r_1 = \langle y_1, z_1, x_1 \rangle$ и $r_2 = \langle i^m y_1, z_2, x_2 \rangle$ такие, что $z_1 \sim z_2$. Тогда $\varphi_y^n(i^m y_1) = m_z(z_2) \cdot \varphi_x^m(x_2) = i^{nm} \varphi_y^n(y_1) = i^{nm} \cdot m_z(z_1) \cdot \varphi_x^m(x_1)$. Откуда $\varphi_x^m(x_2) = i^{nm} \varphi_x^m(x_1)$, и, следовательно, $\varphi_x(x_2) = i^n \varphi_x(x_1) = \varphi_x(i^n x_1)$ и $x_2 \sim i^n x_1$.

Таким образом, из уравнений (3) для различных $i > 0$ вытекают следующие закономерности подобия в языке эмпирических систем **Y**, **Z**, **X**:

$$\forall r_1, r_2 (z_1 \sim z_2 \Rightarrow (x_2 \sim i^n x_1 \Leftrightarrow y_2 \sim i^m y_1)), \ i > 0. \qquad (4)$$

Данная формулировка дает бесконечное множество закономерностей. Если предположить, что значения шкал связаны одним из уравнений

$$\forall r(\varphi_y^n(y) = m_z(z)/\varphi_x^m(x)), \ \forall r(\varphi_y^n(y) = 1/m_z(z) \cdot \varphi_x^m(x)), \qquad (5)$$

то, проведя аналогичные рассуждения, получим законы подобия для обратно пропорциональной связи величин y и x

$$\forall r_1, r_2 (z_1 \sim z_2 \Rightarrow (x_2 \sim i^n x_1 \Leftrightarrow y_1 \sim i^m y_2)),\ i > 0. \tag{6}$$

Перейдем к закономерностям обмена. Предположим, что у нас есть величины y, z, x, имеющие эмпирические системы $\mathbf{Y} = \langle Y; \leq_y \rangle$, $\mathbf{Z} = \langle Z; \leq_z, o_z \rangle$, $\mathbf{X} = \langle X; \leq_x, o_x \rangle$. Предположим также, что эмпирические системы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{X}$ являются положительными экстенсивными структурами, а отношение $\leq_y$ является слабым порядком на Y. Зафиксируем шкалы отношений $\varphi_z : Z \to Re^+$, $\varphi_x : X \to Re^+$ и шкалу порядка $m_y : Y \to Re^+$. Предположим также, что в некотором эксперименте $r = \langle y, z, x \rangle$ значения шкал связаны одной из следующих функциональных зависимостей:

$$\forall r(m_y(y) = \varphi_z^n(z) \cdot \varphi_x^m(x)),\quad \forall r(m_y(y) = 1/\varphi_z^n(z) \cdot \varphi_x^m(x)). \tag{7}$$

Так же, как и в предыдущем случае, проведем рассуждения только для первой зависимости. Возьмем эксперименты $r_1 = \langle y_1, z_1, i^n x_2 \rangle$, $r_2 = \langle y_2, i^m z_1, x_2 \rangle$. Тогда $m_Y(y_1) = \varphi_z^n(z_1) \cdot \varphi_x^m(i^n x_2) = i^{nm} \times \varphi_z^n(z_1) \cdot \varphi_x^m(x_2)$. Для эксперимента r_2 получим $m_Y(y_2) = \varphi_z^n(i^m z_1) \times \varphi_x^m(x_2) = i^{nm} \cdot \varphi_z^n(z_1) \cdot \varphi_x^m(x_2)$, откуда $m_Y(y_1) = m_Y(y_2)$ и $y_1 \sim y_2$. Таким образом, для произвольного i мы вывели закономерности обмена

$$\forall r_1, r_2((i^m_{z_1} \sim z_2 \,\&\, i^n x_2 \sim x_1) \Rightarrow y_1 \sim y_2),\ i > 0. \tag{8}$$

Для функциональных зависимостей

$$\forall r(m_y(y) = \varphi_z^n(z)/\varphi_x^m(x)),\quad \forall r(m_y(y) = \varphi_x^m(x)/\varphi_z^n(z)) \tag{9}$$

аналогичными рассуждениями можно получить следующие закономерности обмена для обратно пропорциональной связи величин z и x:

$$\forall r_1, r_2((i^m z_1 \sim z_2 \,\&\, i^n x_1 \sim x_2) \Rightarrow y_1 \sim y_2),\ i > 0. \tag{10}$$

Итак, мы вывели закономерности подобия и обмена как свойства функциональных зависимостей. Но этими закономерностями не исчерпываются все свойства функциональных зависимостей, выразимые в языках эмпирических систем. Остальные свойства будут выведены в следующем параграфе. Там же будет выяснено обратное - до какой степени совокупность всех свойств определяет вид функциональной зависимости.

§2. Закономерности в языках эмпирических систем и классы функций

Приведем остальные свойства основных законов классической физики, которые можно вывести из функциональных зависимостей. Для каждого свойства будем находить соответствующий класс функций.

Закономерности подобия и обмена характеризуют отношение показателей степеней. То обстоятельство, что величины $\tilde{z}$, $\tilde{x}$ и их степени являются сомножителями или делителями и делимыми, в закономерностях подобия и обмена не отражается. Это определяется другими закономерностями в языке эмпирических систем $\mathbf{Y} = \langle Y; \lesssim_y \rangle$, $\mathbf{Z} = \langle Z; \sim_z \rangle$, $\mathbf{X} = \langle X; \sim_x \rangle$. Одними из основных закономерностей, определяющих взаимоотношения величин z и x, являются закономерности, выражающие "независимость" этих величин. Величины z и x будем называть "независимыми" [4,с.249] тогда и только тогда, когда из $r_1 = \langle y_1, z_1, x \rangle$, $r_2 = \langle y_2, z_2, x \rangle$, $y_1 \le y_2$, для некоторого $x \in X$ следует, что для любого $x' \in X$ и экспериментов $r_3 = \langle y_3, z_1, x' \rangle$, $r_4 = \langle y_4, z_2, x' \rangle$ выполняется соотношение $y_3 \le y_4$, а также из того, что $r_1 = \langle y_1, z, x_1 \rangle$, $r_2 = \langle y_2, z, x_2 \rangle$, $y_1 \le y_2$, для некоторого $z \in Z$ следует, что для любого $z' \in Z$ и экспериментов $r_3 = \langle y_3, z', x_1 \rangle$, $r_4 = \langle y_4, z', x_2 \rangle$ выполняется соотношение $y_3 \le y_4$. Кратко это свойство записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\forall r_1, r_2 (x_1 \sim x_2 \,\&\, y_1 \le y_2 \Rightarrow \forall r_3, r_4 (z_1 \sim z_3 \,\&\, z_2 \sim z_4 \,\&\, x_3 \sim x_4 \Rightarrow y_3 \le y_4)),\\
&\forall r_1, r_2 (z_1 \sim z_2 \,\&\, y_1 \le y_2 \Rightarrow \forall r_3, r_4 (x_1 \sim x_3 \,\&\, x_2 \sim x_4 \,\&\, z_3 \sim z_4 \Rightarrow y_3 \le y_4)).
\end{aligned} \tag{II}$$

Зафиксируем некоторую шкалу порядка $m_y: Y \to Re^+$ и шкалы наименований $m_z: Z \to Re^+$, $m_x: X \to Re^+$, переводящие отношения $\lesssim_y, \sim_z, \sim_x$ в отношения $\le, =, =$ на Re. Если выполняются закономерности (2) и (II), то функция f должна обладать следующими свойствами. Если для некоторых $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ нашлось $\tilde{x}$ такое, что $f(\tilde{z}_1, \tilde{x}) \le f(\tilde{z}_2, \tilde{x})$, то то же самое неравенство должно выполняться для любого $\tilde{x}' \in m_x(X)$. Аналогично для переменной $\tilde{z}$:

$$\begin{aligned}
&\forall \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{x} (f(\tilde{z}_1, \tilde{x}) \le f(\tilde{z}_2, \tilde{x}) \Rightarrow \forall \tilde{x}' (f(\tilde{z}_1, \tilde{x}') \le f(\tilde{z}_2, \tilde{x}'))),\\
&\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{z} (f(\tilde{z}, \tilde{x}_1) \le f(\tilde{z}, \tilde{x}_2) \Rightarrow \forall \tilde{z}' (f(\tilde{z}', \tilde{x}_1) \le f(\tilde{z}', \tilde{x}_2))).
\end{aligned} \tag{I2}$$

Нетрудно проверить, что любое из уравнений (3), (5), (7), (9) обладает свойствами (I2). Можно показать и обратное: если функция обладает свойствами (I2), то должны выполняться закономерности (II). Обозначим класс функций, обладающих свойствами (I2), через

F_1. Отсюда следует, что закономерностям (II) в языке эмпирических систем **Y**,**Z**,**X** соответствует целый класс функций F_1, обладающих свойством, выраженным этими закономерностями.

Следующей основной закономерностью является условие Томсена [4,с.250]. Предположим, что значения шкал m_y, m_z, m_x связаны зависимостью $\forall r(m_y(y) = m_z(z)\cdot m_x(x))$ Возьмем эксперименты $r_1 = \langle y_1, z_1, x_1\rangle$, $r_2 = \langle y_2, z_2, x_2\rangle$ такие, что $y_1 \sim y_2$. Тогда $m_y(y_1) = m_y(y_2)$ и $m_z(z_1)\cdot m_x(x_1) = m_z(z_2)\cdot m_x(x_2)$. Возьмем также эксперименты $r_3 = \langle y_3, z_2, x_3\rangle$, $r_4 = \langle y_4, z_4, x_1\rangle$, для которых также выполнено условие $y_3 \sim y_4$. Тогда $m_z(z_2)\cdot m_x(x_3) = m_z(z_4)\cdot m_x(x_1)$. Из полученных равенств следует, что $m_z(z_1)\cdot m_x(x_3) = m_z(z_4)\cdot m_x(x_2)$. Поэтому если взять эксперименты $r_5 = \langle y_5, z_1, x_3\rangle$, $r_6 = \langle y_6, z_4, x_2\rangle$, то для них $m_y(y_5) = m_y(y_6)$ и, следовательно, $y_5 \sim y_6$. Отсюда получаем закономерность Томсена, по которой если есть эксперименты вида:

$$r_1 = \langle y_1, z_1, x_1\rangle,\ r_1 = \langle y_2, z_2, x_2\rangle,\ r_3 = \langle y_3, z_2, x_3\rangle,$$

$$r_4 = \langle y_4, z_4, x_1\rangle,\ r_5 = \langle y_5, z_1, x_3\rangle,\ r_6 = \langle y_6, z_4, x_2\rangle,$$

то из $y_1 \sim y_2$ и $y_3 \sim y_4$ следует $y_5 \sim y_6$.

То есть получаем закономерность:

$$\forall r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 (y_1 \sim y_2 \,\&\, z_3 \sim z_2 \,\&\, x_4 \sim x_1 \,\&\, y_3 \sim y_4 \,\&\, z_5 \sim z_1 \,\&$$
$$\& x_5 \sim x_3 \,\&\, x_6 \sim x_2 \,\&\, z_6 \sim z_4 \Rightarrow y_5 \sim y_6). \qquad (13)$$

Заметим, что эту же закономерность можно получить, если предположить, что значения шкал связаны одной из следующих зависимостей: $\tilde{y}^n = \tilde{z}/\tilde{x}^m$, $\tilde{y}^n = \tilde{x}^n/\tilde{z}$, $\tilde{y}^n = 1/\tilde{z}\cdot\tilde{x}^m$, $\tilde{y} = \tilde{z}^n\cdot\tilde{x}^m$, $\tilde{y} = \tilde{z}^n/\tilde{x}^m$, $\tilde{y} = 1/\tilde{z}^n\cdot\tilde{x}^m$, $\tilde{y} = \tilde{x}^m/\tilde{z}^n$. Так что каждая из них обладает свойством (13). Обратно, если выполнены закономерности (2) и (13), то функция f должна обладать следующим свойством:

$$\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{z}_4 (f(\tilde{z}_1, \tilde{x}_1) = f(\tilde{z}_2, \tilde{x}_2) \,\&\, f(\tilde{z}_2, \tilde{x}_3) =$$
$$= f(\tilde{z}_4, \tilde{x}_1) \Rightarrow f(\tilde{z}_1, \tilde{x}_3) = f(\tilde{z}_4, \tilde{x}_2)). \qquad (14)$$

Обозначим класс функций, обладающих этим свойством, через F_2. Приведем формулировки остальных, менее существенных закономерностей, характеризующих связь величины z и x:

$$\forall r_1, r_3, r_4 \exists r_2 (x_3 \sim x_4 \,\&\, y_3 \le y_1 \le y_4 \Rightarrow y_2 \sim y_1 \,\&\, x_2 \sim x_3),$$
$$\forall r_1, r_3, r_4 \exists r_2 (z_3 \sim z_4 \,\&\, y_3 \le y_1 \le y_4 \Rightarrow y_2 \sim y_1 \,\&\, z_2 \sim z_3). \qquad (15)$$

Заключительным является свойство Архимеда для величин z и x, подобное свойству 5 для экстенсивных измерений. Формулировку этого свойства мы для краткости опустим.

Если для некоторых эмпирических систем $\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{X}$ выполнены все закономерности (2),(II),(I3),(I5) и свойство Архимеда, то будем говорить, что нам задана аддитивная соединительная структура [4, с.256]. Какой класс функций задается всеми закономерностями, определяющими аддитивную соединительную структуру? Модификация теоремы [4, с.257] дает следующий результат. Если эмпирические системы $\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{X}$ образуют аддитивную соединительную структуру, то существуют функции $m_z: Z \to Re^+$, $m_x: X \to Re^+$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\forall r_1, r_2 (y_1 \geq y_2 \leftrightarrow m_z(z_1)\cdot m_x(x_1) \geq m_z(z_2)\cdot m_x(x_2)), \qquad (I6)$$

и, кроме того, если существуют какие-то две другие функции $m'_z: Z \to Re^+$, $m'_x: X \to Re^+$, удовлетворяющие тому же условию, то существуют константы α, $\beta_1, \beta_2 > 0$ такие, что $m'_z = \beta_1 \cdot m_z^{\alpha}$, $m'_x = \beta_2 \cdot m_x^{\alpha}$.
Из этой теоремы следует, что произведение $m_z(z)\cdot m_x(x)$ определяет шкалу порядка (в слабом смысле)[ж)] для величины y, так как если взять в качестве шкалы $m_y: Y \to Re^+$ отображение, ставящее в соответствие каждой величине $y \in Y$ число $m_z(z)\cdot m_x(x)$ для некоторого $r = \langle y,z,x\rangle$, то, согласно свойству (I6), данное отображение будем гомоморфизмом $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{R} = \langle Re^+; \leq\rangle$. Из свойства (I6) также вытекает, что функциональная зависимость $m_y(y) = f(m_z(z), m_x(x))$ должна обладать следующим свойством:

$$\forall \tilde{z}_1, \tilde{x}_1, \tilde{z}_2, \tilde{x}_2 (f(\tilde{z}_1, \tilde{x}_1) \leq f(\tilde{z}_2, \tilde{x}_2) \leftrightarrow \tilde{z}_1\cdot\tilde{x}_1 \leq \tilde{z}_2\cdot\tilde{x}_2). \qquad (I7)$$

Обозначим класс функций, обладающих этим свойством, через F_3. Легко видеть, что этот класс содержится в классах F_1 и F_2. Как видно из свойств (I6) и (I7), закономерности, определяющие аддитивную соединительную структуру, задают характер связи между величинами z и x.

Добавим к этим закономерностям закономерности подобия, определяющие соотношение степеней величин y и, например, x. Пусть величины y,z,x имеют эмпирические системы $\mathbf{Y} = \langle Y; \leq_y, o_y\rangle$, $\mathbf{Z} = \langle Z; \leq_z\rangle$, $\mathbf{X} = \langle X; \leq_x, o_x\rangle$. Предположим, что $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ являются положительны-

---

ж) "В слабом смысле" означает, что к шкале порядка не предъявляется требование непрерывности.

ми экстенсивными структурами и отношение $\leq_z$ является слабым порядком на Z. Предположим, что эмпирические системы $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}$ образуют аддитивную соединительную структуру. Пусть выполняются все закономерности подобия с показателями n, m для различных $i>0$. Тогда существуют как шкалы отношений φ_y, φ_x, так и шкалы m_z, m_x, удовлетворяющие условию (16). Связь между этими шкалами при выполнении дополнительной закономерности

$$\forall z_1, z_2, \exists r_1, r_2 (z_{r_1} = z_1 \& z_{r_2} = z_2 \& y_1 \sim y_2)$$

устанавливается теоремой, приведенной в [4, с.486]. Небольшая модификация этой теоремы дает следующий результат: существуют константы $\gamma, \gamma_1, \alpha, \alpha_1 > 0$ такие, что $\gamma \cdot \varphi_y^{\alpha} = m_z \cdot m_x$, $m_x = \gamma_1 \cdot \varphi_x^{\alpha_1}$, $\alpha/\alpha_1 = n/m$. Напомним, что m_z и m_x сами определяются с точностью до некоторых констант $\beta_1, \beta_2, \alpha'$. Из $\alpha/\alpha_1 = n/m$, введя новую константу $\beta = \alpha/n = \alpha_1/m$, получим $\alpha = \beta n$, $\alpha_1 = \beta m$. Из этого результата можно вывести класс функций, обладающих всеми приведенными свойствами $F^{nm} = \{\tilde{y}^{\beta n} = \gamma_0 \tilde{z}^{\alpha'} \cdot \tilde{x}^{\beta m} \mid \beta, \alpha', \gamma_0 > 0\}$. Каждый класс F_4^{nm} является уже максимальным уточнением класса функций F_3, которое можно сделать с помощью закономерностей в языке эмпирических систем. Оставшиеся неопределенными константы β, α', γ_0 зависят уже от произвола в выборе единиц измерения.

То обстоятельство, что в физике вместо класса F_4^{mn} рассматривается только один закон $\tilde{y}^n = \tilde{z} \cdot \tilde{x}^m$, связано с тем, что единицы измерения и показатели степени выбираются такими, чтобы в совокупности все законы физики были наиболее просты. Для этого вводится согласованная система единиц, сводящая максимальное количество констант γ_0 к 1. Известно, что законы классической физики можно было бы переписать, заменив все переменные $x, y, \ldots$, на $x^{\alpha}, y^{\alpha}, \ldots$ для произвольного $\alpha > 0$. Но в законах физики показатели степеней сводятся к наименьшим целым числам.

Пусть величины y, z, x имеют эмпирические системы $\mathbf{Y} = \langle Y; \leq_y \rangle$, $\mathbf{Z} = \langle Z; \leq_z, o_z \rangle$, $\mathbf{X} = \langle X; \leq_x, o_x \rangle$. Предположим, как и раньше, что они образуют аддитивную соединительную структуру, а эмпирические системы $\mathbf{Z}, \mathbf{X}$ являются положительными экстенсивными структурами. Предположим, что выполняются закономерности обмена с показателями m, n для различных $i > 0$. Тогда существуют как шкалы m_z, m_x, так и шкалы φ_z, φ_x. Приведем несколько ослабленный вариант теоремы [4, с.489], показывающий связь между этими шкалами. Существуют константы $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $m_z = \gamma_1 \cdot \varphi_z^{\alpha_1}$, $m_x = \gamma_2 \cdot \varphi_x^{\alpha_2}$,

$\alpha_1/\alpha_2 = n/m$. Так же, введя константу $\beta = \alpha_1/n = \alpha_2/m$ и выражая через нее α_1 и α_2, получаем $\alpha_1 = \beta n$, $\alpha_2 = \beta m$. В формуле (I7) числовые переменные $\tilde{z}, \tilde{x}$ являются значениями шкал m_z, m_x. Обозначим через $\hat{z}$, $\hat{x}$ переменные, являющиеся значениями шкал φ_z, φ_x. Сопоставляя результат теоремы с формулой (I6), получаем следующее свойство функции f, связывающей шкалы $m_y = f(\varphi_z, \varphi_x)$, где $m_y: Y \to Re^+$ - некоторая шкала порядка в слабом смысле

$$\forall \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2 (f(\hat{z}_1, \hat{x}_1) \le f(\hat{z}_2, \hat{x}_2) \Rightarrow \hat{z}_1^n \cdot \hat{x}_1^m \le \hat{z}_2^n \cdot \hat{x}_2^m). \qquad (I7)$$

Обозначим класс функций, обладающих этим свойством, через F_5^{nm}.

Рассмотрим следующий случай, когда эмпирические системы **Y**, **Z**, **X**, являясь положительными экстенсивными структурами, образуют аддитивную соединительную структуру и когда выполняются закономерности подобия с показателями n, m; $i > 0$ и закономерности обмена с показателями p, q; $i > 0$. Комбинируя результаты предыдущих теорем, можно получить класс функций: $F_6^{nmpq} = \{(\varphi_y^{qn})^\beta = \gamma(\varphi_z^{mp})^\beta (\varphi_x^{mq})^\beta \mid \gamma, \beta > 0\}$. Если же выполняются два закона подобия с показателями m, n и k, l , то получим класс функций: $F_7^{nmkl} = \{(\varphi_y^{kn})^\beta = \gamma(\varphi_z^{km})^\beta \cdot (\varphi_x^{nl})^\beta \mid \gamma, \beta > 0\}$. На этом анализ законов, включающих три переменные, заканчивается.

Аналогичным образом рассматриваются законы, связывающие четыре и более переменных. Функциональные зависимости последних определяют целый набор закономерностей подобия и обмена, где каждая из закономерностей выражает взаимосвязь двух величин при фиксированных значениях остальных.

Заключение

Приведенные результаты выявляют эмпирическое содержание физических законов - те элементарные свойства, выполнение которых позволяет представлять законы в соответствующем функциональном виде. Эти элементарные свойства, выраженные в языках эмпирических систем, имеют непосредственную, операционалистическую интерпретацию с помощью приборов, определяющих истинность отношений на объектах и операций над этими объектами.

Большинство этих свойств являются необходимыми, поскольку они вытекают из существования числовых представлений и их свойств, а также из функциональных связей между ними. Такая необходимость была показана для свойств (2), (4), (6), (8), (I0), (II), (I3). Но есть свойства, например, (I5) и (I8), которые не являются необходимыми, хотя и требуются для доказательства соответствующих теорем. Такие свойства являются структурными и нужны для придания теоремам более простого или желаемого вида. Вся совокупность свойств, необходимая для вывода какого-либо класса функций, например F_4^{nm}, F_6^{nmpq}, F_7^{nmkl}, полностью раскрывает эмпирическое содержание законов соответствующего класса. Функциональный вид законов как бы аккумулирует все эти свойства, так как эти законы обладают одновременно всеми этими свойствами при соответствующем переводе их на язык эмпирических систем. В этом состоит удобство использования числовых представлений. Отдельной закономерности, например (II),(I3), соответствует класс функций, в данном случае F_1, F_2, обладающих свойством, выраженным этой закономерностью. При добавлении новых свойств класс функций сужается, например, класс F_3 включается в классы F_1 и F_2. Но сколько бы закономерностей мы ни добавляли, мы не получим одну-единственную функциональную зависимость, а всегда будем получать класс их, поскольку при задании функции всегда вносится произвол, связанный с выбором единиц измерения (классы F_4^{nm}, F_6^{nmpq}, F_7^{nmkl}). Так что совокупностям закономерностей всегда соответствуют классы функций. Как было отмечено в [I], это позволяет по-новому осуществлять предсказания - исходя не из класса функций, а из свойств функций этого класса, выраженных в языках эмпирических систем. Для этого можно использовать метод обнаружения закономерностей в языках эмпирических систем и метод предсказания, использующий обнаруженные закономерности [5]. Возможность такого подхода на конкретном примере свойства монотонности была показана в [6,с.66]. Получение предсказаний без обращения к функциональным зависимостям важно также в силу следующих соображений.

Выбирая какую-то одну функцию из класса в качестве наилучшего приближения к некоторым экспериментальным данным, мы тем самым предполагаем, что для этих данных выполнены все свойства в языке эмпирических систем, которые определяют данную функциональную зависимость (а таких свойств бесконечное число, так как $i = I,2,..$), и, кроме того, вносим произвол, связанный с выбором единиц измерения. Но может оказаться, что не все эти закономерности выполнимы для выбранных данных. Рассматривая только выполнимые закономерности и соответствующий им класс функций, мы можем обнаружить, что это достаточно широкий класс, внутри которого все функции будут равноправны с точки зрения их эмпирического содержания относительно данного эксперимента. Это делает необоснованным выбор конкретного представителя из класса. Произвол в выборе единиц изме -

рения не будет оказывать влияния на результаты предсказаний, полученные по выбранной функции только в том случае, если применяются адекватные алгоритмы [I].

Приведенный анализ физических законов выявляет также множество закономерностей, которое для этих законов необходимо. Используя это множество в методах [5], можно обнаруживать законы, подобные физическим.

Литература

I. ВИТЯЕВ Е.Е. Закономерности в языках эмпирических систем. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов. (Вычислительные системы, вып.76.) Новосибирск, 1978, с.3-I4.

2. Машинные методы обнаружения закономерностей. (Материалы Всесоюзного симпозиума, 5-7 апреля 1976 г.) Под ред. Н.Г. Загоруйко, В.Н.Елкиной, Новосибирск, 1976.-167 с.

3. ПФАНЦАГЛЬ И. Теория измерений. -М.: Мир, 1976.

4. Foundations of measurement/ Krantz D.H., Zuce R.D., Suppes P., Trersky A. V.1., Academic press, 1971.-577 c.

5. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов. (Вычислительные системы, вып.67.) Новосибирск, Наука, 1976, с. 54-68.

6. ЗАГОРУЙКО Н.Г. Эмпирическое предсказание. -Новосибирск: Наука, 1979. -125 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июля 1979 года