ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 80

УДК 681.323

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТРУКТУР ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

О.Г.Монахов

1. Постановка задачи. В качестве структуры однородной вычислительной системы (ОВС) [1,2] был предложен [3] класс однородных графов степени v с числом вершин N и обхватом g - $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов. Алгоритм построения $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов состоит из двух этапов: построения подграфа графа $L(v, g)$ [3] с числом вершин N и построения на его основе $\mathcal{A}(N, v, g)$-графа. Второй из этих этапов является алгоритмом сокращенного перебора, реализация которого требует значительных затрат машинного времени. Один из путей уменьшения времени построения $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов - использование свойств симметрии этих графов. Цель данной статьи - исследовать подкласс $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов, обладающий некоторой симметрией связей и допускающий параметрическое описание. Параметрическое описание структур ОВС более удобно при организации работы операционной системы ОВС (при распределении и загрузке заданий, реализации путевых процедур) и требует для своего хранения меньшую область памяти по сравнению с описанием с помощью матрицы смежности или списка структуры.

2. Определение и основные свойства симметричных $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов. Пусть $R_\mu(N, v, g)$ - подкласс из класса $\mathcal{A}(N, v, g)$-графов с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, N\}$, с множеством ребер $E \subseteq V^2$, с группой автоморфизмов $Aut(R)$ и отношением эквивалентности μ, образующим такое разбиение множества вершин V на $m \leq N$ классов V_i, что для каждой пары вершин $k, j \in V_i$, $i = \overline{1,m}$, существует автоморфизм $\varphi \in Aut(R)$, переводящий k в j:

$$\forall(k, j \in V_i)\ \exists(\varphi \in Aut(R))\ (\varphi(k) = j).$$

Эквивалентностью μ на множестве вершин V графа $R_s(N, v, g)$, которая будет рассматриваться далее, является сравнимость по модулю некоторого натурального числа s, делящего нацело N, т.е.

$$\mu = \{(a,b) \in V^2 \mid a \equiv b(\mathrm{mod}\, s)\}, \qquad (1)$$

где $s \le N$, $N \equiv 0(\mathrm{mod}\, s)$. В этом случае, если эквивалентность μ определяется выражением (1), обозначим $R_\mu(N, v, g)$-графы через $R_s(N, v, g)$. Выделим класс $R_s(N, v)$-графов, включающий все $R_s(N, v, g)$-графы с фиксированными значениями s, N и v.

Таким образом, все множество вершин V графа $R_s(N, v)$ разбито на s классов эквивалентности V_i:

$$V_i = \{a \mid a \in V, \quad a \equiv i(\mathrm{mod}\, s)\}, \qquad (2)$$

где $i = \overline{1,s}$.

Пусть $r = N/s$. Из определения $R_\mu(N, v, g)$-графов следует, что для каждой пары вершин $a, b \in V_i$, $i = \overline{1,s}$, графа $R_s(N,v)$ существует такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, что $\varphi(a) = b$, а именно:

$$b \equiv a + js(\mathrm{mod} N), \quad j = \overline{1,r}. \qquad (3)$$

Если в графе $R_s(N, s)$ две вершины a и c связаны ребром $(a, c) \in E$ и $c - a \equiv l(\mathrm{mod} N)$, где l – натуральное число и $l < N$, то l назовем отметкой ребра (a, c). Заметим, что данное ребро имеет также отметку $l' \equiv a - c(\mathrm{mod} N)$.

ЛЕММА 1. Если две вершины $a \in V_i$, $i \in \overline{1,s}$, и $c \in V$ графа $R_s(N, v)$ связаны ребром $(a,c) \in E$ с отметкой l, то каждой вершине $b \in V_i$ инцидентно ребро $(b,d) \in E$ с отметкой l.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a, b \in V_i$, то из формулы (3) видно, что существует такой автоморфизм графа $R_s(N, v)$, что $\varphi(a) = b$ и

$$b \equiv a + js(\mathrm{mod} N), \quad j \in \overline{1,r}. \qquad (4)$$

Пусть $\varphi(c) = d$. Тогда

$$d \equiv c + js(\mathrm{mod} N), \quad j \in \overline{1,r}. \qquad (5)$$

Если $(a,c) \in E$, то $(\varphi(a), \varphi(c)) \in E$, т.е. $(b,d) \in E$. Из формул (4) и (5) имеем $d - b \equiv c - a(\mathrm{mod} N)$, а так как $c - a \equiv l(\mathrm{mod} N)$, то $d - b \equiv l(\mathrm{mod} N)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в графе $R_s(N, v)$ вершина $a \in V_i$, $i \in \overline{1,s}$. Обозначим через $L_i = \{ l_{ik} \}$,

$i \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$, множество отметок ребер, инцидентных вершине a. Тогда множество отметок ребер, инцидентных любой вершине $b \in V_i$, есть L_i.

Множество $L = \{l_{ik}\}$, $i = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$, назовем множеством отметок ребер графа $R_s(N, v)$. Две вершины a и b графа $R_s(N, v)$ связаны ребром $(a,b) \in E$, если и только если существует такое натуральное число $l_{ik} < N$, где $l_{ik} \in L$, $i \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$, что если $a \equiv i(\mathrm{mod}\, s)$, то $b - a \equiv l_{ik}(\mathrm{mod} N)$, т.е.

$$(a,b) \in E \Leftrightarrow (\exists l_{ik} \in L)(a \equiv i(\mathrm{mod}\, s)) \wedge (b - a \equiv l_{ik}(\mathrm{mod} N)). \tag{6}$$

Таким образом, если заданы число вершин N, число классов эквивалентности s и множество отметок L, то граф $R_s(N, v, g)$ полностью определен. Заметим, что при $s = 1$ класс $R_s(N, v)$ -графов совпадает с классом $D_{v/2}$ -графов [4], если v четное.

Обозначим через E_{ik} множество ребер с отметкой l_{ik}:

$$E_{ik} = \{(a,b) \in E \mid a \equiv i(\mathrm{mod}\, s),\ b \equiv a + l_{ik}(\mathrm{mod} N)\}, \tag{7}$$

где $i \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$. Ребра из множества E_{ik} имеет также отметку

$$l_{jm} = N - l_{ik}, \tag{8}$$

где $j \equiv i + l_{ik}(\mathrm{mod}\, s)$, $i, j \in \overline{1,s}$, $k, m \in \overline{1,v}$, и, следовательно, множества E_{jm} и E_{ik} совпадают.

Вообщее говоря, вышеопределенное множество отметок L избыточно, так как оно представляет одно неориентированное ребро двумя взаимно-обратными ориентированными ребрами с отметками l и $l' = N - l$. Следовательно, учитывая это свойство, множество отметок L можно уменьшить вдвое. Обозначим через L^* минимально-необходимое множество отметок. Для того, чтобы перейти от множества L к множеству L^*, необходимо из множества L удалить одну из каждой пары отметок, связанных соотношением (8). Для обратного перехода от L^* к L необходимо для каждой отметки из L^* найти дополнительную отметку по соотношению (8).

Приведем некоторые свойства графа $R_s(N, v)$.

I) $V = \bigcup\limits_{i=1}^{s} V_i$, $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $|V_i| = r$, где $i = \overline{1,s}$.

2) $E = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \bigcup\limits_{k=1}^{v} E_{ik}$, $|E_{ik}| = r$, где $i = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$, $|E| = \frac{srv}{2}$.

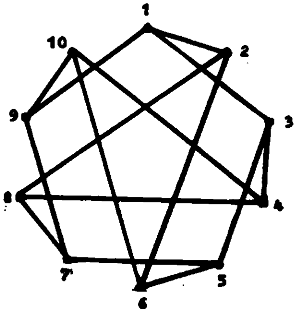

Рис.I.

3) Если вершины $a, b \in V$ графа $R_s(N, v)$ связаны, то

$$b - a \equiv \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{v} l_{ik} t_{ik} (\mathrm{mod} N),$$

где t_{ik} – число ребер с отметкой l_{ik} в пути из a в b.

ПРИМЕР I. Рассмотрим граф Петерсена (рис.I), у которого $N = 10$, $v = 3$, $g = 5$, $s = 2$, т.е. это $R_2(10, 3, 5)$-граф с множеством отметок $L = \{1,2,8;4,6,9\}$ (минимальное множество отметок $L^* = \{1,2;4\}$).

3. Связность $R_s(N, v)$-графов. Рассмотрим вопрос о связности $R_s(N, v)$-графов. Пусть $r = N/s$. Обозначим через $H(R)$ граф с множеством вершин $VH = \{1, 2, \ldots, r\}$ и множеством ребер EH, получающийся из графа $R_s(N, v)$ с множеством отметок L при гомоморфизме $\phi : i \to j$ где $i \in V$, $j \in VH$ и $j = \left[\frac{i-1}{s}\right] + 1$, $[x]$ – целая часть числа x. При этом

$$(a,c) \in EH \Leftrightarrow (\exists\, l_{mk} \in L)(c \equiv a + b_{mk} (\mathrm{mod}\, r),$$

$$b_{mk} = \left[\frac{d_{mk} - 1}{s}\right], \quad d_{mk} \equiv m + l_{mk} (\mathrm{mod} N)), \tag{9}$$

где $m \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$, $d_{mk} \in \overline{1,N}$, $b_{mk} \in \overline{1,r}$.

Обозначив $B = \{b_{mk}\}$, $m = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$, перепишем формулу (9) в следующем виде:

$$(a,c) \in EH \Leftrightarrow (\exists\, b_{mk} \in B)(c \equiv a + b_{mk} (\mathrm{mod}\, r)),$$

где $m \in 1,s$, $k \in 1,v$.

Заметим, что полученное определение $H(R)$-графов совпадает с определением $D_{p/2}$-графов с множеством B в качестве множества отметок, где p – степень графа $H(R)$ при условии, что все петли исключены.

Использовав теорему I [4], получим условие связности графа $H(R)$. Для того чтобы граф $H(R)$ с числом вершин r и множеством отметок B был связным, необходимо и достаточно, чтобы числа $\{r, B\}$ были взаимно-просты.

ПРИМЕР 2. Для графа Петерсона (рис.I) $H(R)$-графом является граф K_5 – полный граф с числом вершин $r = 5$. В этом случае $B = \{I,2,3,4\}$.

Обозначим через $\Gamma(R/s)$ граф с множеством вершин $V\Gamma = \{I,2,\dots,s\}$ и множеством ребер $E\Gamma$, получившийся из графа $R_s(N,v)$ с множеством отметок L при гомоморфизме $\varepsilon: i \to j$, где $i \in V$, $j \in V\Gamma$ и $i \equiv j(\mathrm{mod}\,s)$, при этом

$$(a,b) \in E\Gamma \Leftrightarrow (\exists\, l_{mk} \in L)(a + l_{mk} \equiv b(\mathrm{mod}\,s)) \wedge (a \equiv m(\mathrm{mod}\,s)), \qquad \text{(IO)}$$

где $m \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$. Примем, что множество отметок ребер графа $\Gamma(R/s)$ совпадает с множеством отметок исходного графа $R_s(N,v)$.

Рис.2.

ПРИМЕР 3. На рис. 2. изображен граф $\Gamma(R/2)$ графа Петерсона (см.пример I).

Граф $\Gamma(R/s)$ является однородным графом степени v, если исходный граф был $R_s(N,v)$ с множеством отметок L, кроме случая, когда $l \in L$ и $l = N/2$. В этом случае степень вершины, которой инцидентно ребро с отметкой l в графе $\Gamma(R/s)$, равна $v+1$.

Рассмотрим с точки зрения связности граф $\Gamma(R/s)$, построенный из графа $R_s(N,v)$ с множеством отметок L. Пусть подмножество $L' \subset L$ такое, что для любого $m \in \overline{1,s}$ и какого-либо $k \in \overline{1,v}$, если $l_{mk} \in L'$, то $l_{mi} \in L'$ для всех $i \in \overline{1,v}$. Обозначим через I множество первых индексов отметок $l_{mk} \in L'$, где $m \in \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$.

ЛЕММА 2. Граф $\Gamma(R/s)$ связен тогда и только тогда, когда для каждого $L' \subset L$ существует такая отметка $l_{mk} \in L'$, что $m + l_{mk} \equiv i(\mathrm{mod}\,s)$ и $i \notin I$ при $m,i \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы I.4 [5] и выражения (IO).

ТЕОРЕМА I. Граф $R_s(N,s)$ связен тогда и только тогда, когда связны графы $H(R)$ и $\Gamma(R/s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть граф $R_s(N,v)$ несвязен. Обозначим через A множество вершин какой-либо компоненты связности графа $R_s(N,v)$. Если вершина $a_1 \in A$ и $a_2 \in V \setminus A$, то не существует пути между a_1 и a_2. Пусть $a_1 \in V_i$, $a_2 \in V_j$, $i,j \in \overline{1,s}$, и $a_1 = (k_1 - 1)s + i$, $a_2 = (k_2 - 1)s + j$, $k_1,k_2 \in \overline{1,r}$. В этом случае должен отсутствовать путь либо между множествами вершин V_i и V_j в графе $R_s(N, v)$, либо между вершинами, принадлежащими каждому множеству V_m, $m \in \overline{1,s}$, либо оба случая вместе. В первом случае отсутствует путь между вершинами i и j в графе $\Gamma(R/s)$, а во втором – путь между вершинами k_1 и k_2 в графе $H(R)$. Таким образом, когда граф $R_s(N,v)$ несвязен, то несвязен либо граф $\Gamma(R/s)$, либо $H(R)$, либо оба вместе.

Достаточность. Пусть граф $\Gamma(R/s)$ несвязен, т.е. между какой-либо парой вершин $i,j \in V\Gamma$ не существует пути в графе $\Gamma(R/s)$. Тогда, по лемме I и формуле (I0), в графе $R_s(N,v)$ любые вершины $a_1 \equiv i(\mathrm{mod}\, s)$ и $a_2 \equiv j(\mathrm{mod}\, s)$ не связаны между собой. С другой стороны, пусть граф $H(R)$ несвязен и между парой вершин $k_1, k_2 \in VH$ не существует пути в графе $H(R)$, тогда в графе $R_s(N, v)$ любые вершины $a_1 = (k_1 - 1)s + i$ и $a_2 = (k_2 - 1) + j$, где $i,j \in \overline{1,s}$, не связаны между собой. Следовательно, когда или граф $\Gamma(R/s)$, или $H(R)$ или оба вместе несвязны, то несвязен и граф $R_s(N,v)$. Теорема доказана.

4. Параметрическое описание изоморфных $R_s(N,v)$-графов.

ТЕОРЕМА 2. Графы $R_s(N,v)$ и $R'_s(N,v)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l_{ik} = N - l_{mk}$ при $i \equiv s + c - m(\mathrm{mod}\, s)$ для $i,m = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$, $c \in \overline{0,s-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\tau: a \to a'$ где $a \in V$, $a' \in V'$,

$$a' \equiv N + d - a(\mathrm{mod}\, N) , \qquad (II)$$

и пусть $d \equiv c(\mathrm{mod}\, s)$. Докажем, что τ – изоморфизм.

Очевидно, что отображение τ взаимно-однозначно. Покажем, что оно сохраняет отношение смежности, т.е. если $(a,b) \in E$ и $\tau(a) = a'$, $\tau(b) = b'$, то $(a',b') \in E$. Пусть

$$b - a \equiv l_{mk}(\mathrm{mod}\, N) , \qquad (I2)$$

т.е. $a \equiv m(\mathrm{mod}\, s)$, и пусть

$$b' - a' \equiv l_{ik}(\mathrm{mod}\, N) , \qquad (I3)$$

где $a' \equiv i(\mathrm{mod}\, s)$.

Подставляя в (I3) значения b' и a', полученные по формуле (II), имеем

$$\tau(b) - \tau(a) \equiv a - b \equiv l'_{ik}(\mathrm{mod}\, N). \qquad (I4)$$

Сравнивая выражения (I2) и (I4), находим, что $l'_{ik} = N - l_{mk}$ при $i \equiv s + c - m (\mathrm{mod}\, s)$, т.е. $(a', b') \in E'$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Выбор значений отметок $l \in L^*$ графа $R_s(N,v)$ можно ограничить интервалом от I до $s([r/2] + 1)$, где $r = N/s$.

ТЕОРЕМА 3. Графы $R_s(N,v)$ и $R'_s(N,v)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l_{mk} = l'_{ik}$ при $m \equiv i \pm c (\mathrm{mod}\, s)$, где $i, m = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$, $c \in \overline{0,s-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2 при условии, что рассматривается изоморфизм $\tau: a \to a'$, где $a \in V$, $a' \in V'$, $a' \equiv a \pm d (\mathrm{mod}\, N)$ и $d \equiv c (\mathrm{mod}\, s)$.

ТЕОРЕМА 4. Графы $R_s(N,v)$ и $R'_s(N,v)$ с множествами отметок соответственно $L = \{l_{mk}\}$ и $L' = \{l'_{ik}\}$ изоморфны, если $l'_{ik} \equiv c l_{mk} (\mathrm{mod}\, N)$ при условии, что N и c – взаимно-простые числа и $i \equiv cm (\mathrm{mod}\, s)$ для $i, m = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2 при условии, что рассматривается изоморфизм $\tau: a \to a'$, где $a \in V$, $a' \in V'$, $a' \equiv ca (\mathrm{mod}\, N)$, c и N – взаимно-простые числа.

5. Определение верхней границы величины обхвата $R_s(N,v)$-графов. Назовем взаимно-однозначным частичным преобразованием (частичной подстановкой) классов эквивалентности V_i, $i = \overline{1,s}$, на множестве вершин V графа $R_s(N,v)$ любое взаимно-однозначное отображение вида $x: V_i \to V_j$, $i, j \in \overline{1,s}$.

Из выражений (2), (7) и леммы I следует, что каждое множество ребер E_{ik}, $i \in \overline{1,s}$, $k \in \overline{1,v}$, задает частичную подстановку $x_{ik}: V_i \to V_j$, $j \equiv i + l_{ik} (\mathrm{mod}\, s)$ такую, что для любого $a \in V_i$ выполняется $x_{ik}(a) = b$, где $b \in V_j$, $b \equiv a + l_{ik} (\mathrm{mod}\, s)$, т.е. $(a,b) \in E_{ik} \Leftrightarrow x_{ik}(a) = b$, где $b - a \equiv l_{ik} (\mathrm{mod}\, N)$.

Из выражения (8) следует, что существует подстановка, обратная x_{ik}, т.е. $x_{ik}^{-1} = x_{jm}: V_j \to V_i$, где $i \equiv j + l_{jm} (\mathrm{mod}\, s)$, $l_{jm} = N - l_{ik}$, $i, j \in \overline{1,s}$, $k, m \in \overline{1,v}$.

Например, для графа Петерсена (рис.I) множеству ребер E_{11} соответствует подстановка $x_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, а подстановкой, обратной данной, будет $x_{23} = x_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Таким образом, можно установить взаимно-однозначное соответствие

$$\rho : L \to S_0 \qquad (15)$$

между множеством отметок ребер $L=\{l_{ik}\}$ и множеством частичных подстановок $S_0=\{x_{ik}\}$, $i=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,v}$. Следовательно, из (15) и (6) имеем

$$(a,b)\in E \Leftrightarrow (\exists x\in S_0)(x(a)=b). \qquad (16)$$

Множество S_0 относительно операции произведения частичных подстановок порождает инверсную полугруппу S частичных преобразований [6] классов эквивалентности на множестве вершин V графа $R_s(N, v)$, т.е.

$$S=\{a\,|\,a=x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot x_m, x_1,x_2,\ldots, x_m\in S_0\}, \qquad (17)$$

где S_0 является порождающим множеством полугруппы S. Для любой частичной подстановки $a\in S$ такой, что $a: V_i\to V_j$, $i,j\in\overline{1,s}$, будем обозначать области отправления V_i через $\Pi_1 a$, а область прибытия V_j – через $\Pi_2 a$. Тождественную подстановку пустого множества, которая является нулем полугруппы S, обозначим через 0. Тождественную подстановку на множестве V_i обозначим через e_i, $i\in\overline{1,s}$. Так как $e_i^2=e_i$, то e_i является идемпотентом полугруппы S.

Пусть $a,b\in S$, $a: V_i\to V_j$, $b: V_k\to V_m$, где $i,j,k,m\in\overline{1,s}$. Поскольку $V_i\cap V_j=\emptyset$ при $i\neq j$, $i,j\in\overline{1,s}$, то произведение частичных подстановок $a\cdot b=0$ при $j\neq k$ либо $a\cdot b=c: V_i\to V_m$ при $j=k$ и для любого $f\in V_i$ имеем $c(f)=b(a(f))$. Следовательно, $aa^{-1}=e_j$, $a^{-1}a=e_j$, $ae_j=e_ia=a$ при $k\neq i$ имеем $e_i\cdot e_k=e_k\cdot e_i=0$, т.е. идемпотенты перестановочны. Для любого $a\in S$ имеем $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

Как следует из (17), любой элемент $a\in S$ можно представить в виде слова W в алфавите S_0, т.е. $a=W$. Под длиной слова W будем понимать число входящих в него символов из алфавита S_0 и обозначать $|W|$.

Обозначим через $P_t=\{(i,j)\in E^t\}$ множество пар $i,j\in V$ вершин графа $R_s(N, v)$, между которыми существует путь длины t. Пусть $(i,j)\in P_t$ и p_{ij}^t – путь, соединяющий вершины i, j и имеющий метки l_k, $k=\overline{1,t}$. Тогда из (15)-(17) в полугруппе S существует слово

$$W=a=\prod_{k=1}^{t}\rho(l_k)=\prod_{k=1}^{t}y_k,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_t \in S_0$, т.е. $|W| = t$, и можно установить следущее соответствие:

$$(i,j) \in P_t \Leftrightarrow (\exists a \in S \setminus 0)(a(i) = j) \wedge (a = \prod_{k=1}^{t} y_k, \quad y_1, y_2, \ldots, y_t \in S_0) . \qquad (18)$$

В этом случае будем называть слово W словом, соответствующим пути p^t_{ij}.

Графом полугруппы S назовем ориентированный граф $\Gamma(S)$, вершинам которого поставлены во взаимно-однозначное соответствие элементы полугруппы S, кроме нуля. Две вершины графа $\Gamma(S)$ связаны ребром (a,a') тогда и только тогда, когда существует такой элемент $x \in S_0$, что $a' = a \cdot x$, где $S_0 \subset S$ – порождающее множество полугруппы S.

Рассмотрим множество

$$S_i = \{ a \mid e_i a = a, \quad a \in S \}. \qquad (19)$$

Очевидно, что оно является подполугруппой полугруппы S. Элементы $a \in S_i$ имеют области отправления $\Pi_1 a = V_i$, следовательно, S_i является полугруппой преобразований класса эквивалентности V_i графа $R_s(N,v)$.

ЛЕММА 3. Пусть граф $R_s(N,v)$ связный и S_i – полугруппа преобразований i-го класса эквивалентности данного графа. Тогда $|S_i| = N+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как граф $R_s(N,v)$ связный, то, по (18) и (19), для любых $k \in V_i$ и $j \in V$ существует $a \in S_i$ такое что $a(k)=j$, т.е. $|S_i| \geq N$. С другой стороны, если $a_1(k) = a_2(k) = j$, где a_1, $a_2 \in S_i$ то $\Pi_1 a_1 = \Pi_1 a_2$ и $\Pi_2 a_1 = \Pi_2 a_2$, т.е. $a_1 = a_2$, и, следовательно, с учетом нуля полугруппы S_i, имеем $|S_i| = N+1$.

Пусть $\Gamma(S_i)$ – граф полугруппы S_i, т.е. $S_i \setminus 0$ – множество вершин, $E\Gamma = \{(a,b) \mid ax = b,\ x \in S_0,\ a,b \in S_i \setminus 0\}$ – множество ребер графа $\Gamma(S_i)$.

ТЕОРЕМА 5. Граф $R_s(N,v)$ и граф соответствующей ему полугруппы преобразований i-го класса эквивалентности $\Gamma(S_i)$, $i \in \overline{1,s}$, изоморфны (с точностью до направления ребер).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поставим в соответствие вершине $v_1 \in V_i$ тождественную подстановку e_i, т.е. $e_i(v_1) = v_1$, и обозначим $a_1 = e_i$. Далее, каждому элементу $a_j \in S_i \setminus 0$ поставим в соответствие вершину v_j, где $v_j = a_j(v_1)$, $j = \overline{1,N}$. По лемме 3, отображение η: $a_j \to v_j$ взаимно-однозначно. Покажем, что оно не нарушает смежности, т.е. если $(a_j, a_m) \in E\Gamma$, то $(v_j, v_m) \in E$, где $\eta(a_j) = v_j$, $\eta(a_m) = v_m$. Пусть ребро (a_j, a_m) имеет отметку x_0, т.е. $a_j x_0 = a_m$. Тогда $l_0 = \rho(x_0)$ и для каждого $v \in \Pi_2 a_j$ существует такое $v' \in \Pi_2 a_m$, что $v' = v + l_0 (\mathrm{mod} N)$. Так как $a_j(v_1) = v_j$, $a_m(v_1) = v_m$ и $v_j \in \Pi_2 a_j$, то $v_m = v_j + l_0$, т.е. $(v_j, v_m) \in E$. Таким образом, отображение η есть изоморфизм, и теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Gamma(S_i)$ - граф полугруппы преобразований i-го класса эквивалентности графа $R_s(N,v)$, e_i - цикл длины t в графе $\Gamma(S_i)$, проходящий через вершину a_i, $a_i: V_i \to V_k$ и $W_i = e_k$ - слово, соответствующее циклу c_i. Тогда в графе $R_s(N,v)$ существует цикл c_k длины t, проходящий через вершину $j \in V_k$, где $i, k \in \overline{1,s}$, $j \in \overline{1,N}$.

Определим отношение σ на множестве S_i:

$$\sigma = \{(a,b) \in S_i^2,\ ae_j = a,\ be_j = b,\ j \in \overline{1,s}\}, \quad i \in \overline{1,s}.$$

Очевидно, что σ - эквивалентность на S_i, которая делит S_i на классы эквивалентности: $S_{ij} = \{a \mid ae_j = a,\ a \in S_i\}$, $i,j \in \overline{1,s}$. Заметим, что S_{ii} является подполугруппой полугруппы S_i, $i \in \overline{1,s}$.

ЛЕММА 4. Отношение σ является конгруэнцией [6] на S_i, а фактор-множество $S_i/\sigma = \{S_{ij},\ j = \overline{1,s}\}$ является фактор-полугруппой S_i по конгруэнции σ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что σ есть эквивалентность на S_i. Пусть $(a,b) \in \sigma$ и c - произвольный элемент из S_i. Тогда c: $V_i \to V_m$, $m \in \overline{1,s}$, и если a: $V_i \to V_j$, то либо $ac = 0$ при $j \neq i$, либо ac: $V_i \to V_m$ при $j = i$, но в любом случае $ace_m = ac$. Учитывая, что b: $V_i \to V_j$, и рассуждая аналогично, находим, что $bce_m = bc$. Следовательно, $(ac, bc) \in \sigma$, т.е. σ стабильно справа. Далее, $ca = 0$, если $m \neq i$, или ca: $V_i \to V_j$, если $m = i$, но в любом случае $cae_j = ca$. Так же получаем, что $cbe_j = cb$. Следовательно, $(ca, cb) \in \sigma$, т.е. σ стабильно и слева. Таким образом, отношение

σ является конгруэнцией на S_i, и, как показано в [7], фактор-множество $S_i/\sigma = \{S_{ij},\ j=\overline{1,s}\}$ является фактор-полугруппой S_i по конгруэнции σ. Лемма доказана.

Графом фактор-полугруппы S_i/σ полугруппы S_i по конгруэнции σ будем называть ориентированный граф $\Gamma(S_i/\sigma)$, вершинам которого поставлены во взаимно-однозначное соответствие классы эквивалентности S_{ij}, $j\in\overline{1,s}$. Две вершины графа $\Gamma(S_i/\sigma)$ связаны ребром (a_j, a_k), если существует такой элемент $a_0\in S_0$, что $S_{ij}a_0 = S_{ik}$, $i,j,k\in\overline{1,s}$.

ТЕОРЕМА 6. Графы $\Gamma(S_i/\sigma)$ и $\Gamma(R/s)$, полученные из графа $R_s(N,v)$, изоморфны (с точностью до направления ребер).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

Пусть P и Q – два слова в инверсной полугруппе. Тогда справедливо [6]:

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}.$$

Простой цикл, проходящий через вершину a_j графа $\Gamma(S_i/\sigma)$, соответствует такому слову W в алфавите S_0, что $S_{ij}W = S_{ij}$, т.е. $W = a: V_j\to V_j$, $a\in S$, $i,j\in\overline{1,s}$. Будем называть данное слово циклическим.

ЛЕММА 5. Пусть W_1 и W_2 – два циклических слова в полугруппе S_i/σ таких, что $S_{ij}\cdot W_1 = S_{ij}\cdot W_2 = S_{ij}$. Тогда $W_1W_2 = W_2W_1$, где $i,j\in\overline{1,s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $S_{ij}W_1W_2 = S_{ij}W_2 = S_{ij}$, $S_{ij}W_2W_1 = S_{ij}W_1 = S_{ij}$, т.е. $S_{ij}W_1W_2 = S_{ij}W_2W_1$, следовательно, $W_1W_2 = W_2W_1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть W_1 и W_2 – два таких циклических слова в полугруппе S_i/σ, что $W_1 = PQ_1$, $W_2 = Q_2P^{-1}$, $S_{ij}W_1 = S_{ij}W_2 = S_{ij}$. Тогда в полугруппе S_i существует такое слово W, что $W = W_1W_2Q_1^{-1}Q_2^{-1} = e_j$, где $i,j\in\overline{1,s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 вытекает $W_1W_2 = W_2W_1 = PQ_1Q_2P^{-1} = Q_2Q_1$. Следовательно,

$$W = W_1W_2Q_1^{-1}Q_2^{-1} = W_1W_2(Q_2Q_1)^{-1} = W_1W_2(W_1W_2)^{-1} = e_j,$$

т.е. $W = e_j$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть W_1 и W_2 – два таких циклических слова в полугруппе S_i/σ, что $W_1 = PQ_1$, $W_2 = Q_2P^{-1}$, $S_{ij}W_1 = S_{ij}W_2 = S_{ij}$, где $|P| = r$, $|Q_1| = k$, $|Q_2| = m$, $i,j \in \overline{1,s}$. Тогда в соответствующем данной полугруппе графе $R_s(N,v)$ существует цикл длиной

$$t = 2r + 2k + 2m .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается из теоремы 7 и следствия 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если слова W_1 и W_2 из следствия 4 не имеют общей части P, т.е. $W_1 = Q_1$, $W_2 = Q_2^{-1}$, то в формуле (20) $r = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть W_1 и W_2 – два таких циклических слова в полугруппе S_i/σ, что $W_1 = PQP^{-1}$ и $S_{ij}W_1 = S_{ij}W_2 = S_{ij}$, где $|P| = r$, $|Q| = m$, $|W_2| = k$, $i,j \in \overline{1,s}$. Тогда в соответствующем данной полугруппе графе $R_s(N,v)$ существует цикл длиной

$$t = 4r + 2m + 2k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО также получаем из теоремы 7 и следствия 3.

Таким образом, из теоремы 7 и следствия 4 и 5 вытекает, что для заданного графа $R_s(N,v)$ величина обхвата g ограничена сверху значением t, т.е. $g \le t$, где t определяется из выражений (20) или (2I), в зависимости от строения графа $\Gamma(S_i/\sigma)$ (или, что одно и то же, графа $\Gamma(R/s)$). С другой стороны, из теоремы 7 и ее следствий вытекает, что по заданному графу $\Gamma(S_i/\sigma)$ (или $\Gamma(R/s)$) можно определить максимальную величину обхвата соответствующего ему графа $R_s(N,v)$ при данных значениях s и v.

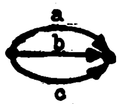

Рис.3

ПРИМЕР 4. Пусть дан граф $\Gamma(R/2)$ графа Петерсена (рис.2). Пометим его ребра следующим образом: ребро (I,I) – отметкой a, (I,2) – b, (2,2) – c. Тогда $W_1 = bcb^{-1}$, $W_2 = a$, и, по следствию 5, максимальная величина обхвата у графа $R_2(N,3)$, соответствующего данному графу $\Gamma(R/2)$, определяется следующим образом: $g = t = 4+2+2 = 8$. Такой $R_2(N,3,8)$-граф существует при $N = 48$, его множество отметок $L = \{ I,2, 46; I0, 38, 47\}$.

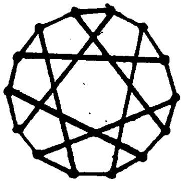

Рис.4

ПРИМЕР 5. Пусть дан граф $\Gamma(S_1/\sigma)$ (рис.3). Здесь $s = 2$, $v = 3$, $W_1 = ba^{-1}$, $W_2 = cb^{-1}$, где

$a, b, c \in S_0$. По следствию 4, $P = b$, $Q_1 = a^{-1}$, $Q_2 = c$, максимальная величина обхвата графа $R_2(N,3)$, соответствующего данному графу $\Gamma(S_1/\sigma)$, равна $g = t = 2+2+2 = 6$. Такой $R_2(N,3,6)$-граф существует при $N \geq 14$ и для $N = 14$ известен как граф Хивуда (рис.4) с множеством отметок $L = \{1,9,11;\ 1,5,11\}$.

6. Алгоритм построения оптимальных $R_s(N,v,g)$-графов. По оптимальным $R_s(N,v,g)$-графом понимается граф с минимальным диаметром и средним диаметром при заданных числе вершин N, степени v, обхвате g и числе классов эквивалентности s. Заметим, что выбор числа классов эквивалентности происходит, в зависимости от значений N, v и g, по теореме 7 и ее следствиям. Данная оптимизационная задача является задачей целочисленного программирования с нелинейной целевой функцией. Предлагаемый алгоритм использует идею метода ветвей и границ [8], при этом в качестве нижней границы (оценки) диаметра D и среднего диаметра D_{cp} используются значения этих параметров, полученные из теорем 1 и 2 для подграфа графа $L(v,g)$ с числом вершин N [3]. Обозначим через $\delta = d_{cp} - D_{cp}$ оценку точности приближения.

Алгоритм синтеза оптимальных $R_s(N,v)$-графов сводится к следующим шагам:

1. Определить нижние границы D и D_{cp}.

2. Определить X - множество вершин со свободными связями, т.е. множество вершин, степень которых меньше заданной v, и номера не больше чем s.

3. Если $X = \varnothing$, то перейти на 13, иначе выполнить упорядоченный по номерам выбор вершины $x \in X$ и запомнить номер предыдущей выбранной вершины N_x (в начале $N_x = 0$).

4. Определить число свободных связей вершины x: $b_x := v - v_x$, $j := b_x$.

5. Определить Y_{xj} - множество вершин, находящихся от вершины x на расстоянии $l \geq g-1$ и имеющих свободные связи.

6. Если $Y_{xj} = \varnothing$, то перейти на 11.

7. Выполнить упорядоченный по номерам выбор вершины $y \in Y_{xj}$ и соединить вершины $a \in V_i$ и $c \in V_k$ ребром (a,c), где $i \equiv x(\mathrm{mod}\, s)$, $k \equiv y(\mathrm{mod}\, s)$, $a = x + ms$, $c = y + ms$ и $m = \overline{1,r}$, $Y_{xj} := Y_{xj} \setminus y$.

Найти t - длину минимального простого цикла, проходящего через вершину x. Если $t < g$, то перейти на 6.

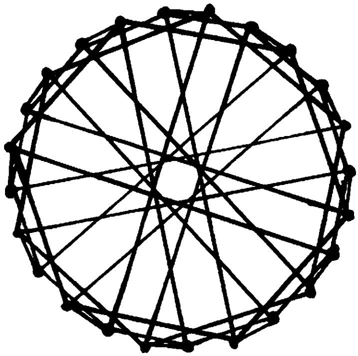

Рис. 5

8. Выполнить $j := j - 1$. Если $j \neq 0$, то перейти на 5, иначе $N_x := x$, $X := X \setminus x$, и переход на 3.

9. Если $N_x = 0$, то перейти на 12, иначе $x := N_x$, $j := 1$.

10. Если $Y_{xj} = 0$, то переход на 11, иначе выполнить удаление j-й связи вершины x и связей, с тем же номером у всех вершин $a \in V_i$, где $i \equiv x (\mathrm{mod}\, s)$. Переход на 7.

11. Выполнить $j := j + 1$. Если $j \le b_x$, то переход на 10, иначе $X := X \cup x$. Переход на 9.

12. Граф $R_s(N,v,g)$ с заданной погрешностью δ не существует.

13. Определить d и $d_{ср}$ полученного графа $R_s(N,v,g)$. Если $d_{ср} - D_{ср} \le \delta$, то переход на 14, иначе переход на 9.

14. Конец.

С помощью данного алгоритма, реализованного на ЭВМ БЭСМ-6 в системе ЛЯПАС-М, были получены графы $R_2(N,4,5)$ для $N = 19$–100; $R_2(N,4,6)$ для $N = 26$–100; $R_3(90,4,8)$ и $R_3(30,3,8)$. На рис.5 приведен граф $R_2(24,4,5)$ с множеством отметок $L = \{1,2,11,22; 4,13,20,23\}$.

Заключение

Рассмотренное параметрическое описание подкласса $\Lambda(N,v,g)$-графов является удобной и компактной формой представления графа межмашинных связей ОВС.

Показано, как с помощью параметрического описания структур ОВС можно решить вопрос об их связности и изоморфизме, а также определить верхнюю границу обхвата таких структур. Введенный класс $R_s(N,v,g)$-графов включает все известные графы, предлагаемые ранее в качестве структур ОВС. Приведен алгоритм синтеза оптимальных структур ОВС.

В заключение автор выражает благодарность В.В.Корнееву за руководство данной работой.

Литература

1. ЕВРЕИНОВ Э.В., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы.-Новосибирск: Наука, 1978. - 320 с.

2. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск,1974,с.17-34.

3. КОРНЕЕВ В.В., МОНАХОВ О.Г. Графы межмашинных связей однородных вычислительных систем. - В кн.: Вопросы теории и построения вычислительных систем. (Вычислительные системы,вып.73.) Новосибирск, 1978, с.93-106.

4. ВОРОБЬЕВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск, 1974,с.35-49.

5. БАСАКЕР Р., СААТИ Т. Конечные графы и сети. - М.: Наука, 1974. - 366 с.

6. КЛИФФОРД А., ПРЕСТОН Г. Алгебраическая теория полугруппы. - М.: Мир, 1972.- 285 с.

7. ЛЯПИН Е.С. Полугруппы. - М.: Физматгиз,1960.- 592 с.

8. КОРБУТ А.А., ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Дискретное программирование.- М.: Наука, 1969. - 368 с.

Поступила в ред.-изд. отдел
26 июня 1979 года