

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ
ИСПРАВНЫХ МАШИН ОДНОРОДНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

М.С. Тарков

Однородная вычислительная система (ОВС) представляет собой множество одинаковых элементарных машин (ЭМ), соединенных линиями связи. Граф межмашинных связей $\Gamma(V, E)$, в котором множество вершин V соответствует множеству ЭМ, а множество ребер E - множеству линий связи между ними, называется структурой ОВС. Частным случаем графа $\Gamma(V, E)$ являются двумерные оптимальные КАИС-структуры [1], которые получаются путем снятия ориентации ребер в групп-графах групп G , определяемых соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^n = 1 \\ a^k = b^l \\ ab = ba \end{array} \right. ,$$

где n, k, l - целые числа, между образующими a и b . Оптимальной называется двумерная КАИС-структура θ^* , которой соответствует группа G со следующими свойствами:

а) $|n_a| + |n_b| \leq \min_{\theta \in \Theta(N, a, b)} \max_{g \in G} (|n_a| + |n_b|);$ (I)

б) число элементов g группы s

$$|n_a| + |n_b| = \min_{\theta \in \Theta(N, a, b)} \max_{g \in G} (|n_a| + |n_b|) \text{ минимально.}$$

Здесь $\Theta(N, a, b)$ - класс двумерных КАИС-структур, состоящих из N элементов, n_a и n_b - показатели степеней образующих a и b .

В работе рассматривается следующая задача. Пусть в ОВС с оптимальной двумерной КАИС-структурой ЭМ выходят из строя с вероятностью $P_{ЭМ}$. В силу однородности вычислительной системы, $P_{ЭМ}$

не зависит от номера ЭМ. Выход из строя любой ЭМ приводит к разрыву линий связи, соединяющих данную ЭМ с соседними. При этом в графе $\Gamma(V, E)$ удаляется вершина с инцидентными ей ребрами. Граф, получившийся в результате удаления некоторого числа вершин, может оказаться несвязным (т.е. возможна изоляция части исправных ЭМ от остальных исправных ЭМ ОВС).

Требуется отыскать нижнюю оценку условной вероятности P_R^0 отсутствия изолированных исправных ЭМ в двумерной оптимальной КАИС-структуре при наличии R неисправных ЭМ.

I. Зададим прямоугольную декартову систему координат (x, y) . В каждую точку, имеющую целочисленные координаты, поместим центр квадратной клетки с единичными ребрами, параллельными осям координат. Координаты центра клетки будем называть координатами клетки. Единице группы G поставим в соответствие клетку с координатами (i_0, j_0) . (Так как i_0 и j_0 - произвольные, далее будем считать $i_0 = j_0 = 0$.) Элементу $a^p b^q$ группы G поставим в соответствие клетку с координатами (p, q) .

Таким образом, множество элементов группы G с суммой модулей степеней образующих не больше некоторого m на плоскости (x, y) будет соответствовать множеству клеток, которое мы далее будем называть ромбом $Rh(m)$.

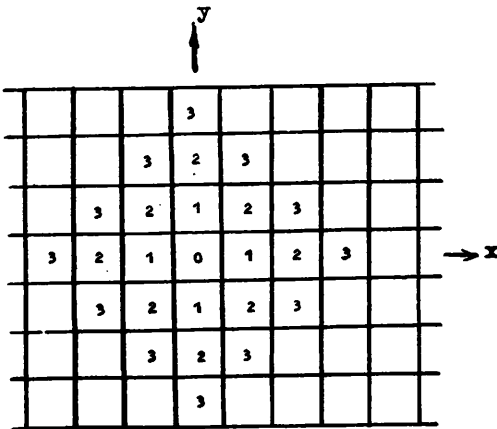


Рис. I

На рис. I дан пример ромба $Rh(3)$. Здесь в каждой клетке ромба указана сумма степеней образующих соответствующего элемента группы. Множество клеток поставленных в соответствие элементам группы G с суммой степеней образующих $|i_a| + |i_b| = s$, будем называть s -м ярусом ромба. Последний (m -й) ярус ромба заполнен тогда, когда имеет место [I]:

$$2m^2 + 2m + 1 = N, \quad (2)$$

где N - число ЭМ в ОВС. В случае невыполнения (2) m -й ярус ромба не заполнен.

Обозначим через $f_R = \{j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_R}\}$ подмножество клеток ромба $Rh(m)$, соответствующих неисправным ЭМ с номерами (i_1, i_2, \dots, i_R) , а через f_r ($r = N - R$) - подмножество клеток ромба $Rh(m)$, соответствующих исправным ЭМ с номерами i_1, i_2, \dots, i_{N-R} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество клеток ромба $f_r(f_R)$ будем называть конфигурацией исправных (неисправных) ЭМ ранга $r(R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конфигурации $f_r(f_R)$ и $f'_r(f'_R)$ различны, если они не совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество клеток конфигурации $f_r(f_R)$, имеющих координату $y = j$ ($-m \leq j \leq m$), будем называть j -й строкой конфигурации $f_r(f_R)$.

Множество клеток конфигурации $f_r(f_R)$, имеющих координату $x = i$ ($-m \leq i \leq m$), будем называть i -м столбцом конфигурации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Связное подмножество, состоящее из c_j клеток j -й строки (d_i клеток i -го столбца) конфигурации f_r или f_R , назовем сегментом $Sg(c_j)$ ($Sg(d_i)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что максимум числа c_j элементов сегмента $Sg(c_j)$ в j -й строке ромба $Rh(n-1)$ равен $2(n - |j|) - 1$. Максимальное число элементов в сегменте ромба $Rh(n-1)$ достигается в нулевой строке (нулевом столбце) и равно $2n-1$.

Пусть n - номер последнего заполненного яруса $n = m - 1, m$. Исправная ЭМ, принадлежащая ярусу с номером n и отделенная на ромбе неисправными ЭМ от остальных исправных, может оказаться изолированной благодаря наличию линий связи (не указанных на ромбе) между данной ЭМ и ЭМ, принадлежащими m -му ярусу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Конфигурацию f_R неисправных ЭМ будем называть изолирующей на ромбе, если часть исправных ЭМ отделена подмножеством элементов конфигурации f_R от остальных исправных ЭМ, причем любая из изолированных ЭМ принадлежит ярусу с номером $m_1 \leq n-1$.

Пример изолирующей конфигурации дан на рис.2. (Звездочками помечены элементы изолирующей конфигурации.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неизолирующие конфигурации могут быть изолирующими в КАИС-структуре, если часть их элементов расположена на n -м

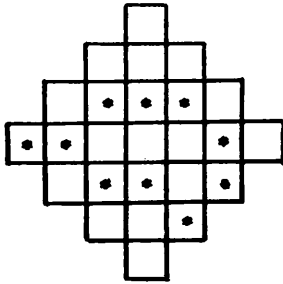
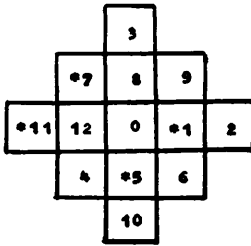
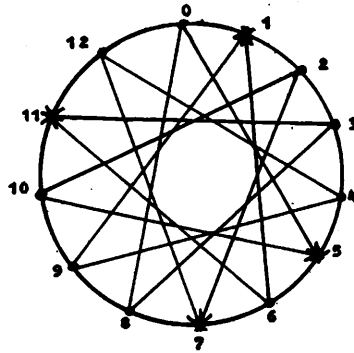


Рис.2

ярус. Пример такой конфигурации дан на рис.3. (Звездочками помечены неисправные (изолирующие) ЭМ.) На рис.3,а показан пример неизолирующей конфигурации. На рис. 3,б показано, что ЭМ с номером 6 в действительности оказывается изолированной. Исключить такие конфигурации, очевидно, можно, если рассматривать неизолирующие конфигурации в ромбе $Rh(n-1)$. Однако при этом будет потеряна часть неизолирующих конфигураций ромба $Rh(n)$.



а)



б)

Рис. 3

Поскольку вероятность $P_{ЭМ}$ выхода из строя ЭМ не зависит от ее номера, то все конфигурации заданного числа r неисправных (исправных) ЭМ равновероятны. Следовательно, условная вероятность отсутствия изолированных исправных ЭМ в ромбе $Rh(n-1)$

$$\hat{P}_R^0 = \frac{Q_R}{C_N^R}, \quad (3)$$

где Q_R - число неизолирующих конфигураций неисправных ЭМ; C_N^R - полное число конфигураций из R неисправных ЭМ в множестве из N ЭМ. В силу замечания I, оценка \hat{P}_R^0 является нижней оценкой условной вероятности P_R^0 .

Каждая неизоллирующая конфигурация неисправных машин ранга R в ромбе $Rh(m-1)$ соответствует связанной конфигурации исправных машин ранга $r = N-R$, число Q_R можно трактовать как оценку числа связанных конфигураций в ромбе. Эта оценка является нижней, поскольку существуют связанные конфигурации, которые на ромбе выглядят несвязанными (см. рис.4, а, б; звездочками помечены элементы конфигурации).

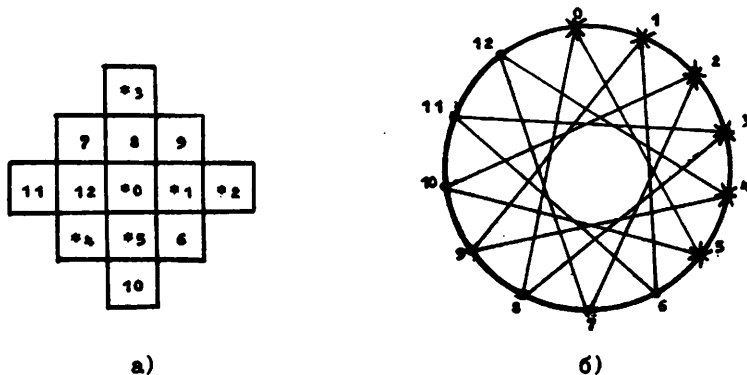


Рис. 4

В соответствии с двояким толкованием числа Q_R можно по-разному подходить к определению вероятности \hat{P}_R^0 . В данной работе предлагаются два метода вычисления нижней оценки числа Q_R , а также метод улучшения этих оценок.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество всех конфигураций ранга r $F_G = \{\hat{f}_{r,1}, \hat{f}_{r,2}, \dots, \hat{f}_{r,S_r}\}$ таких, что $g\hat{f}_{r,i} \neq \hat{f}_{r,j}$ при $i \neq j$; $g \in G$, где G - группа сдвигов с образующими a и b , называется множеством несводимых относительно группы G конфигураций.

Таким образом, для любой конфигурации f_r на КАИС-структуре с группой G всегда найдутся такие целые числа $p, q \geq 0$ и такая несводимая относительно группы G конфигурация $f_{r,i} \in F_G$, что выполняется $f_r = \hat{f}_{r,i} \cdot a^p b^q$, где a и b - образующие группы G . (Иначе множество F_G содержало бы не все несводимые конфигурации ранга r .) Следовательно, в КАИС-структуре с группой G задача определения числа неизоллирующих конфигураций Q_R сводится к определению числа несводимых неизоллирующих конфигураций S_R с последующим умножением S_R на число элементов группы G .

Поскольку число элементов группы G равно числу ЭМ в КАИС-структуре, т.е. N , то

$$Q_R = S_R \cdot N. \quad (4)$$

Задаче определения числа S_R несводимых связанных клеточных конфигураций ("полимино") на бесконечной плоскости (x, y) посвящены работы [3-5].

П.Рид [3] получил точные оценки числа S_r несводимых связанных клеточных конфигураций ранга $r \leq 10$. Д.Клэрнер [4,5] получил нижнюю и верхнюю асимптотические оценки числа S_r :

$$3,72^r \leq S_r \leq 4,65^r, \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Практически оценки (5) выполняются уже для $r \sim 20$.

С целью выяснения возможности применения оценки (5) для решения нашей задачи докажем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА I. В ромбе $Rh(n)$ содержатся все несводимые связанные конфигурации \hat{f}_r ранга $r \leq 2n + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем проводить методом математической индукции.

При $n=1$ справедливость теоремы очевидна (см. рис.5).

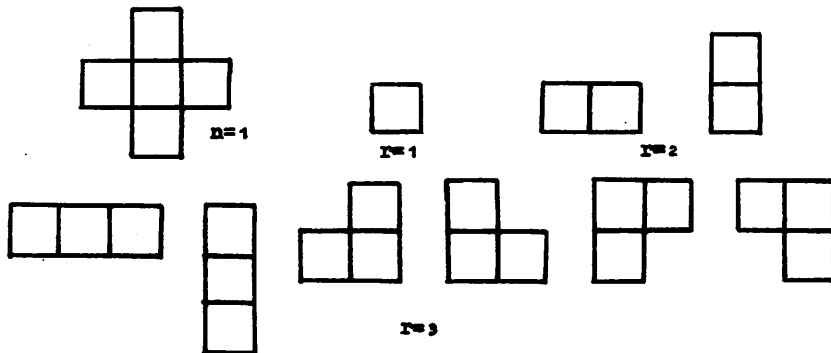


Рис. 5

Пусть она справедлива при $n = M > 1$, т.е. все несводимые конфигурации \hat{f}_r ранга $r \leq 2M + 1$ содержатся в ромбе $Rh(M)$. Тогда они и подавно содержатся в ромбе $Rh(M + 1)$. Достаточно показать, что все несводимые конфигурации \hat{f}_{2M+2} и \hat{f}_{2M+3} содержатся в ромбе $Rh(M + 1)$.

Конфигурация f_{2M+1} путем умножения на соответствующий элемент группы G^* всегда может быть размещена в ромбе $Rh(M)$, но поскольку конфигурация \hat{f}_{2M+2} получается добавлением элемента к конфигурации \hat{f}_{2M+1} , то она разместится в ромбе $Rh(M+1)$, что и требовалось.

Конфигурация \hat{f}_{2M+3} образуется добавлением двух элементов к конфигурации f_{2M+1} . Возможны два случая:

1) оба добавляемые элемента попадают на $(M+1)$ -й ярус, и тогда теорема доказана;

2) элемент u_{2M+1} попадает на $(M+1)$ -й ярус, а элемент u_{2M+3} - на $(M+2)$ -й ярус, причем эти элементы должны быть связаны между собой, т.е. $u_{2M+3} = u_{2M+2} \cdot g$, где g - один из элементов множества (a, a^{-1}, b, b^{-1}) . Тогда конфигурация \hat{f}_{2M+3} путем умножения на g^{-1} сдвигается в ромб $Rh(M+1)$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Число S_r^* несводимых связанных конфигураций ранга $1 \leq r \leq N$ в оптимальной двумерной КАИС-структуре ϑ^* не меньше числа S_r несводимых конфигураций того же ранга в любой двумерной КАИС-структуре ϑ , не совпадающей с ϑ^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу взаимно-однозначного соответствия клеток КАИС-структуры ϑ и элементов группы G , любой связанной конфигурации f_r этой структуры поставлено во взаимно-однозначное соответствие объединение путей с суммой длин, большей или равной $(r-1)$, на групп-графе ϑ . В утверждении I из [I] доказано, что число различных объединений путей на структуре ϑ^* больше либо равно числу соответствующих объединений на структуре ϑ . Поскольку для любой КАИС-структуры ранга N имеет место соотношение (4), то отсюда вытекает доказательство теоремы 2.

Из теоремы I следует, что в ромбе $Rh(n)$ оценки (5) числа S_r справедливы для $r \leq 2n+1$. Для $2n+2 \leq r \leq 2n^2+2n+1 = N$ эти оценки не годятся, поскольку не все несводимые связанные конфигурации содержатся в ромбе $Rh(n)$. Например, строка или столбец из $2n+2$ клеток не могут быть размещены в $Rh(n)$.

3. Выше было отмечено, что число Q_R неизоллируемых конфигураций неисправных ЭМ в ромбе $Rh(n-1)$ можно оценить как число связанных конфигураций из исправных ЭМ в том же ромбе. Для определения

нижней оценки S_r числа несводимых связанных конфигураций ранга $1 \leq r \leq 2(n-1)^2 + 2(n-1)+1$ в ромбе $Rh(n-1)$ используем посегментный метод наращивания связанных конфигураций, который состоит в следующем. Начальный сегмент конфигурации фиксируется в строке (столбце) с координатой $y=1$ ($x=1$). Остальные сегменты располагаются последовательно в строках (столбцах) с координатами $y(x)$, равными $1+1, 1+2, \dots, k-1, k$ ($y=k$ ($x=k$) - координата конечного сегмента) так, чтобы образовалась связанная конфигурация. Этот метод был предложен М.Иденом [6] для получения оценки \hat{S}_r на бесконечной плоскости, а затем использован Д.Клэрнером [4] для улучшения этой оценки.

В нашей задаче метод посегментного наращивания необходимо модифицировать с учетом ограничений:

- 1) ранг C_j сегмента $Sg(c_j)$ и число возможных размещений его в j -й строке ромба $Rh(n-1)$ ограничены рангом этой строки;
- 2) число сегментов конфигурации f_r ограничено числом строк ромба $Rh(n-1)$.

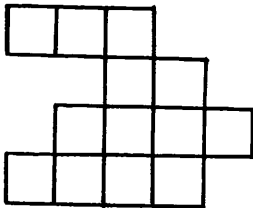


Рис. 6

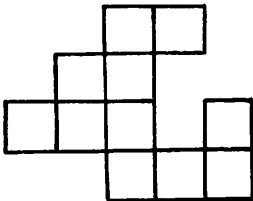


Рис. 7

Пример конфигурации, полученной посегментным наращиванием, дан на рис. 6.

Посегментное наращивание не исчерпывает всего множества связанных конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$, поскольку существуют связанные конфигурации с несвязными строками, т.е. конфигурации, имеющие в некоторых строках по несколько сегментов (рис. 7). По этой причине число \hat{S}_r является нижней оценкой числа S_r несводимых связанных конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$.

Цель нашей задачи состоит в выводе формулы для производящей функции числа несводимых связанных конфигураций

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^{I_{n-1}} S_r \cdot t^r, \quad (6)$$

где $I_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1)+1$ - число клеток в ромбе $Rh(n-1)$.

Ромб $Rh(n-1)$ расположен на плоскости таким образом, что координаты строк и столбцов ромба меняются в пределах от $-(n-1)$ до $n-1$. Тогда пределы изменения координаты $y=1$ начального сегмента будут: $-(n-1) \leq 1 \leq n-1$, координаты $y=k$ конечного сегмента $1 \leq k \leq n-1$.

Обозначим через x_1 координату самой левой клетки сегмента $Sg(c_1)$. Тогда координата самой правой его клетки будет равна $x_1 + c_1 - 1$. Назовем x_1 номером позиции сегмента $Sg(c_1)$. Если α_1 и β_1 - координаты соответственно самой левой и самой правой клетки 1-й строки ромба $Rh(n-1)$, то выполняются неравенства

$$\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1, \quad (7)$$

$$x_1 + c_1 - 1 \leq \beta_1. \quad (7')$$

Фиксированной паре значений (x_1, c_1) соответствует единственное размещение начального сегмента $Sg(c_1)$.

Таким образом, из (7') следует, что производящая функция $\xi_1(t, x_1)$ числа $A_h(x_1)$ различных сегментов в 1-й строке ромба $Rh(n-1)$ с фиксированной координатой x_1 первой клетки имеет вид

$$\xi_1(t, x_1) = \sum_h A_h(x_1) \cdot t^h = \sum_{h=1}^{\beta_1 - x_1 + 1} t^h. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что производящая функция $\xi_1(t)$ числа B_q размещений сегмента $Sg(c_1)$ равна

$$\xi_1(t) = \sum_q B_q \cdot t^q = \sum_{v=\alpha_1}^{\beta_1} \xi_1(t, v) = \sum_{v=\alpha_1}^{\beta_1} \sum_{h=1}^{\beta_1 - v + 1} t^h. \quad (9)$$

Сегменты 1-й и $(1+1)$ -й строк ромба связаны, если координата хотя бы одной клетки сегмента $Sg(c_{1+1})$ попадает в множество координат клеток сегмента $Sg(c_1)$, т.е. принадлежит отрезку $[x_1, x_1 + c_1 - 1]$. Отсюда получаем ограничения на номер позиции и число клеток сегмента $Sg(c_{1+1})$:

$$\alpha_{1+1} \leq x_{1+1} \leq x_1 + c_1 - 1, \quad (10)$$

$$x_1 \leq x_{1+1} + c_{1+1} - 1 \leq \beta_{1+1}, \quad (10')$$

где x_{1+1} - номер позиции сегмента $Sg(c_{1+1})$, а α_{1+1} и β_{1+1} - координаты первой и последней клеток $(1+1)$ -й строки ромба.

Ограничения (10) и (10') можно переписать в виде систем неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1+1} \leq x_{1+1} \leq x_1, \\ x_1 - x_{1+1} + 1 \leq c_{1+1} \leq \beta_{1+1} - x_{1+1} + 1, \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 1 \leq x_{1+1} \leq x_1 + c_1 - 1, \\ 1 \leq c_{1+1} \leq \beta_{1+1} - x_{1+1} + 1. \end{aligned} \right\} \quad (II')$$

Каждой позиции x_1 сегмента $Sg(c_1)$ соответствует множество размещений сегмента $Sg(c_{1+1})$, определяемое системами неравенств (II) и (II'). Отсюда, аналогично (9), получаем производящую функцию $\phi_{1+1}(t, x_1, c_1)$ числа размещений сегмента $Sg(c_{1+1})$, соответствующих заданной позиции x_1 сегмента $Sg(c_1)$:

$$\begin{aligned} \phi_{1+1}(t, c_1, x_1) &= \sum_q \mathcal{Z}_q t^q = \\ &= \sum_{j=\alpha_{1+1}}^{x_1} \sum_{i=x_1-j+1}^{\beta_{1+1}-j+1} t^i + \sum_{j=x_1+1}^{c_1+x_1-1} \sum_{i=1}^{\beta_{1+1}-j+1} t^i. \end{aligned} \quad (I2)$$

Функцию $\phi_{1+1}(t, c_1, x_1)$ назовем функцией связи сегментов 1-й и (1+1)-й строк ромба. Из (I2) следует, что различным позициям x_1 сегмента $Sg(c_1)$ соответствуют различные значения числа размещений \mathcal{Z}_q сегмента $Sg(c_{1+1})$. Тогда с учетом (8) получаем производящую функцию $\theta_{1,1+1}(t, x_1)$ числа $D_q(x_1)$ связанных конфигураций, состоящих из сегмента $Sg(c_1)$, расположенного в позиции x_1 , и сегмента $Sg(c_{1+1})$:

$$\begin{aligned} \theta_{1,1+1}(t, x_1) &= \sum_q D_q(x_1) \cdot t^q = \\ &= \sum_h (A_h(x_1) \cdot t^h \cdot \phi_{1+1}(t, h, x_1)) = \sum_{h=1}^{\beta_1 - x_1 + 1} (t^h \cdot \phi_{1+1}(t, h, x_1)). \end{aligned} \quad (I3)$$

Суммируя $\theta_{1,1+1}(t, x_1)$ по всем возможным значениям номера позиции x_1 , получаем производящую функцию $\theta_{1,1+1}(t)$ числа H_q связанных конфигураций, состоящих из сегментов $Sg(c_1)$ и $Sg(c_{1+1})$:

$$\theta_{1,1+1}(t) = \sum_q H_q t^q = \sum_{v=\alpha_1}^{\beta_1} \sum_{h=1}^{\beta_1 - v + 1} (t^h \cdot \phi_{1+1}(t, h, v)) \quad (I4)$$

или, подробнее,

$$\theta_{1, l+1}(t) = \sum_{v=\alpha_1}^{\beta_1} \beta_{1-v+1} \sum_{h=1}^v \left[t^h \left(\sum_{j=\alpha_{1+1}}^v \beta_{1+1-j+1} t^{j+1} \sum_{i=v-j+1}^{h+v-1} \beta_{1+1-j+1} t^i \right) \right] \quad (15)$$

Из (9) и (15) следует, что функция $\theta_{1, l+1}(t)$ является сверткой функций $\xi_1(t)$ и $\phi_{1+1}(t, c_1, x_1)$ по параметрам c_1 и x_1 .

Свертывая функцию $\theta_{1, l+1}(t)$ с функцией $\phi_{1+2}(t, c_{1+1}, x_{1+1})$, получаем производящую функцию $\theta_{1, l+2}(t)$ числа связанных конфигураций I_q , состоящих из сегментов 1-й, (1+1)-й и (L+2)-й строк

$$\theta_{1, l+2}(t) = \sum_q I_q \cdot t^q.$$

Далее $\theta_{1, l+2}(t)$ свертываем с функцией связи $\phi_{1+3}(t, c_{1+2}, x_{1+2})$. Процесс последовательного свертывания продолжается до тех пор, пока не будет учтен конечный k -й сегмент конфигурации.

Результат последовательного свертывания функции $\xi_1(t)$ с функциями $\phi_{1+1}(t, c_1, x_1), \dots, \phi_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})$ ($k \geq 1+1$) запишем далее в виде

$$\theta_{1, k}(t) = (\xi(t), \phi_{1+1}(t, c_1, x_1), \dots, \phi_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})) \text{ при } k \geq 1+1,$$

$$\theta_{1, 1}(t) = \xi_1(t) \text{ при } k = 1, \quad (16)$$

а результат свертывания функции $\theta_{1, h}(t)$ с функцией $\phi_{h+1}(t, c_h, x_h)$ - в виде

$$\theta_{1, h+1}(t) = (\theta_{1, h}(t), \phi_{h+1}(t, c_h, x_h)). \quad (17)$$

4. Найдем производящую функцию $\hat{\theta}(t)$ нижней оценки числа \hat{S}_x несводимых связанных конфигураций ранга $1 \leq r \leq 2(n-1)^2 + 2(n-1) + 1$ в ромбе $Rh(n-1)$.

Все связанные конфигурации, имеющие фиксированный начальный сегмент $Sg(c_{-(n-1)})$, очевидно, являются несводимыми. Однако из замечания I следует, что сегмент $Sg(c_{-(n-1)})$ может содержать только один элемент. В то же время начальным сегментом конфигурации может быть нулевая строка ромба $Rh(n-1)$, число элементов в которой равно $2n-1$. Кроме того, в различных позициях x_1 начального сегмента $Sg(c_1)$ возможны различные несводимые конфигурации.

Поэтому необходимо рассмотреть всевозможные позиции начального сегмента $Sg(c_1)$ конфигурации в строках с номерами $1 = \overline{-(n-2)}, 0$.

При этом строки ромба $Rh(n-1)$ с номерами $1=-(n-1), 1-1$ считаются пустыми.

Подмножество клеток ромба, включающее в себя начальный сегмент $Sg(c_1)$, находящийся в позиции x_1 , а также множество строк ромба с номерами от $1+1$ до $n-1$ включительно обозначим через $A(c_1, x_1)$. Таким образом, каждой позиции x_1 начального сегмента $Sg(c_1)$ поставлено в соответствие подмножество $A(c_1, x_1)$ клеток ромба, включающее в себя те конфигурации ромба $Rh(n-1)$, начальный сегмент $Sg(c_1)$ которых имеет позицию x_1 . Поскольку при изменении позиции начального сегмента происходит сдвиг всех соответствующих ему конфигураций, то часть несводимых конфигураций, учтенных в позиции x_1 начального сегмента, будет вторично учтена в позиции x_1+1 . При замене позиции x_1 начального сегмента на x_1+1 возникает ненулевое пересечение $B(c_1, x_1)$ множеств $a \cdot A(c_1, x_1)$ и $A(c_1, x_1+1)$. В это пересечение по крайней мере попадает начальный сегмент, т.е.

$$B(c_1, x_1) = a \cdot A(c_1, x_1) \cap A(c_1, x_1+1) \neq \emptyset, \quad (18)$$

где a — образующая группы G^* . Конфигурации, которые укладываются в $B(c_1, x_1)$, будут учтены в множестве $A(c_1, x_1+1)$ повторно. Следовательно, их необходимо исключить при подсчете числа конфигураций в множестве $A(c_1, x_1+1)$. Пример нахождения множества $B(c_1, x_1)$ дан на рис. 8, а, б, в.

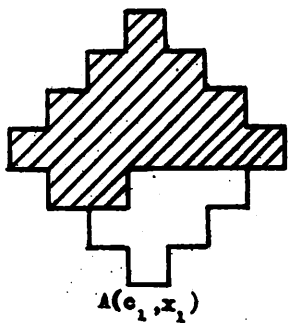
Начальные сегменты множеств $A(c_1, \alpha_1)$ и $A(c_{1+1}, \alpha_{1+1})$ при $c_1 = c_{1+1}$ могут быть совмещены умножением на $a^{-1}b$. При этом возникает ненулевое пересечение (множество, содержащее повторяющиеся конфигурации):

$$B(c_1, \alpha_1) = a^{-1}b A(c_1, \alpha_1) \cap A(c_{1+1}, \alpha_{1+1}) \neq \emptyset. \quad (19)$$

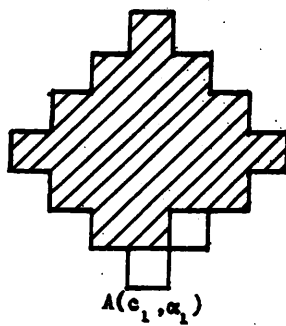
Пример нахождения $B(c_1, \alpha_1)$ дан на рис. 9, а, б, в.

Начальные сегменты с различным числом элементом несовместимы, вследствие чего при переходе от множества $A(c_1, x_1)$ к множеству $A(c_{1+1}, x_1)$ повторяющихся конфигураций не возникает.

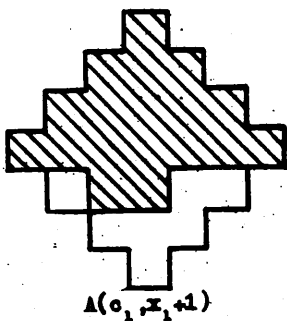
При $l = 1, n-1$ множество $A(c_1, x_1)$ путем умножения на соответствующий элемент g группы G^* может быть полностью размещено в множестве $A(c_0, x_0)$ при $c_0 = c_1, x_0 = x_1$, т.е. $gA(c_1, x_1) \cap A(c_0, x_0) = A(c_1, x_1)$. Следовательно, при $l=1, n-1$ все конфигурации множества $A(c_1, x_1)$ повторяющиеся, т.е. уже учтены в множествах $A(c_1, x_1)$ при $l = \frac{1}{2}(n-1), 0$.



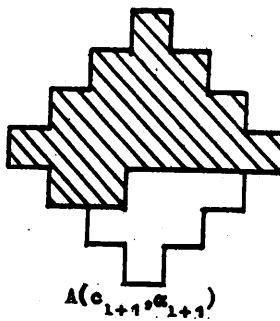
a)



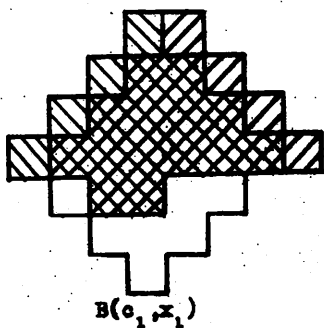
a)



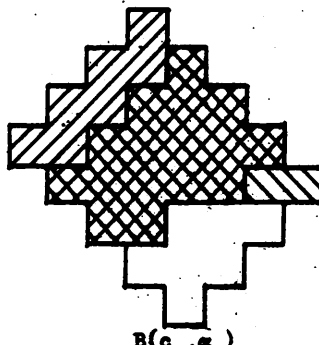
б)



б)



в)



в)

Рис. 8

Рис. 9

Все несводимые связанные конфигурации в ромбе $Rh(n-1)$ подсчитываются путем использования процедуры включений и исключений. Эта процедура состоит из последовательности шагов, каждому из которых соответствует значение параметра $l = -(n-1), 0$. На l -м шаге рассматриваются всевозможные размещения начального сегмента $Sg(c_1)$ при всех возможных значениях $c_1 = \overline{1, 2(n-|l|)-1}$. При заданных значениях c_1, x_1 и $k = \overline{1, n-1}$ подсчитываем функции $\theta_{1,k}(t)$ по формуле (16) с учетом того, что при фиксированных c_1 и x_1 выполняется

$$\xi_1(t) = t^{c_1}. \quad (20)$$

(Далее всюду выполняется (20).)

Тогда "включающая" производящая функция $\Phi^+(t, c_1, x_1)$ числа конфигураций, размещаемых в множестве $A(c_1, x_1)$, имеет вид

$$\Phi^+(t, c_1, x_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \theta_{1,k}(t). \quad (21)$$

При $x_1 = \alpha_1$ "исключающая" производящая функция $\Phi^-(t, c_1, x_1)$ рассчитывается на множестве $B(c_1, \alpha_1)$ (19) по формуле

$$\Phi^-(t, c_1, \alpha_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\theta}_{1,k}(t), \quad (22)$$

где $\hat{\theta}_{1,k}(t) = (t^{c_1}, \hat{\theta}_{1+1}(t, c_1, x_1), \dots, \hat{\theta}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}), \hat{\theta}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}))$ - функция связи сегментов $Sg(c_{j-1})$ и $Sg(c_j)$ на множестве $B(c_1, \alpha_1)$, отличающаяся от функции $\theta_j(t, c_{j-1}, x_{j-1})$ (12) только значениями β_{1+1} .

Отметим, что при $c_1 = \overline{2(n-|l|)-2, 2(n-|l|)-1}$, где $l = \overline{-(n-1), 0}$, выполняется

$$\Phi^-(t, c_1, \alpha_1) = 0, \quad (23)$$

поскольку начальные сегменты с таким числом элементов на l -м шаге процедуры появляются впервые, так как число клеток в $(l-1)$ -й строке на два меньше числа клеток l -й строки.

При $x_1 = \alpha_1 + 1, \beta_1$ "исключающая" производящая функция $\Phi^-(t, c_1, x_1)$ рассчитывается на множестве $B(c_1, x_1)$ (18) по формуле

$$\Phi^-(t, c_1, x_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\theta}_{1,k}(t), \quad (24)$$

где $\hat{\theta}_{1,k}(t) = (t^{c_1}, \hat{\theta}_1(t, c_1, x_1), \dots, \hat{\theta}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}), \hat{\theta}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}))$ - функция связи сегментов $Sg(c_{j-1})$ и $Sg(c_j)$ на множестве $B(c_1, x_1)$.

Просуммировав функции (21)-(24) по всем возможным значениям параметров l, c_1, x_1 , получаем формулу для вычисления производящей функции $\Phi(t)$ нижней оценки \hat{S}_n числа несводимых связанных конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$:

$$\Phi(t) = \sum_{x=1}^{I_{n-1}} S_x t^x = \sum_{l=0}^{2(n-|1|)-1} \sum_{c_1=1}^{\beta_1 - c_1 + 1} \sum_{x_1=\alpha_1}^{\beta_1 - c_1 + 1} (\Phi^+(t, c_1, x_1) - \Phi^-(t, c_1, x_1)), \quad (25)$$

$$\Phi^+(t, c_1, x_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\theta}_{1,k}(t), \quad x_1 = \overline{\alpha_1, \beta_1}; \quad c_1 = \overline{1, 2(n-|1|)-1};$$

$$\Phi^-(t, c_1, x_1) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\theta}_{1,k}(t), & x_1 = \alpha_1; \quad c_1 = \overline{1, 2(n-|1|)-3}; \\ 0, & x_1 = \alpha_1, \quad c_1 = \overline{2(n-|1|)-2, 2(n-|1|)-1}; \\ \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\theta}_{1,k}(t), & x_1 = \overline{\alpha_1 + 1, \beta_1}; \quad c_1 = \overline{1, 2(n-|1|)-3}; \end{cases}$$

$$I_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1) + 1;$$

I_{n-1} - число клеток в $Rh(n-1)$.

5. Нижняя оценка P_R^0 условной вероятности отсутствия изолированных исправных ЭМ при заданном числе R неисправных ЭМ может быть получена путем подсчета неизоллирующих конфигураций из неисправных ЭМ. Здесь также можно применить метод посегментного наращивания конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$, поскольку такие конфигурации не содержат "дыр" (см. [2, с.276]), т.е. являются неизоллирующими. Сегменты неизоллирующей конфигурации могут быть расположены произвольно в пределах соответствующих строк ромба, причем возможны пустые строки. В i -й строке ромба $Rh(n-1)$ содержится $2(n-|1|) - 1$ клеток (максимальный ранг c_i сегмента $Sg(c_i)$). Пусть сегмент $Sg(c_i)$ находится в позиции α_i . Тогда справа от него находится $2(n-|1|) - 1 - c_i$ свободных клеток i -й строки ромба. Следовательно, число размещений сегмента $Sg(c_i)$ в ромбе $Rh(n-1)$ равно $2(n-|1|) - 1 - c_i + 1 = 2(n-|1|) - c_i$, где $c_i = \overline{1, 2(n-|1|)-1}$. С учетом того, что пустая строка может быть выбрана одним способом, отсюда получаем производящую функцию $\phi_1(t)$ числа размещений сегмента $Sg(c_1)$:

$$\phi_1(t) = 1 + \sum_{j=1}^{2(n-|1|)-1} [2(n-|1|)-j] \cdot t^j. \quad (26)$$

Непосредственно из условия независимости сегментов конфигурации следует, что производящая функция $F(t)$ нижней оценки \hat{L}_R числа неизолирующих конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$ имеет вид

$$F(t) = \sum_{R=1}^{I_{n-1}} L_R \cdot t^R = \prod_{i=-(n-1)}^{i=n-1} \phi_i(t), \quad (27)$$

где $I_{n-1} = 2(n-1)^2 + 2(n-1) + 1$ - число клеток в ромбе $Rh(n-1)$.

Следует подчеркнуть, что формула (27) дает оценку не для несводимых, а для всех неизолирующих конфигураций, полученных по-сегментным наращиванием в ромбе $Rh(n-1)$, т.е. мы можем использовать оценку L_R в качестве нижней для Q_R в формуле (3). Процедура включений и исключений здесь неприменима, поскольку существуют сводимые неизолирующие конфигурации, которые на ромбе выглядят несводимыми. Пример таких конфигураций дан на рис. 10. (Здесь одна конфигурация помечена кружками, а другая - звездочками.)

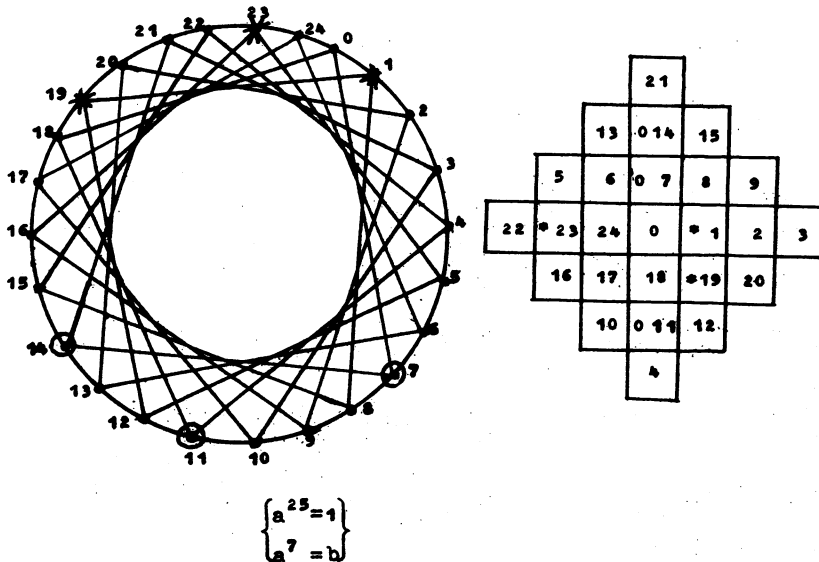


Рис. 10

На рис. II показана полученная из формул (27) и (3) зависимость нижней оценки \hat{P}_R^0 условной вероятности отсутствия изолированных исправных ЭМ в оптимальной КАИС-структуре от числа R неисправных ЭМ при $n = 6$ и II, т.е. при $N = 85$ и 265.

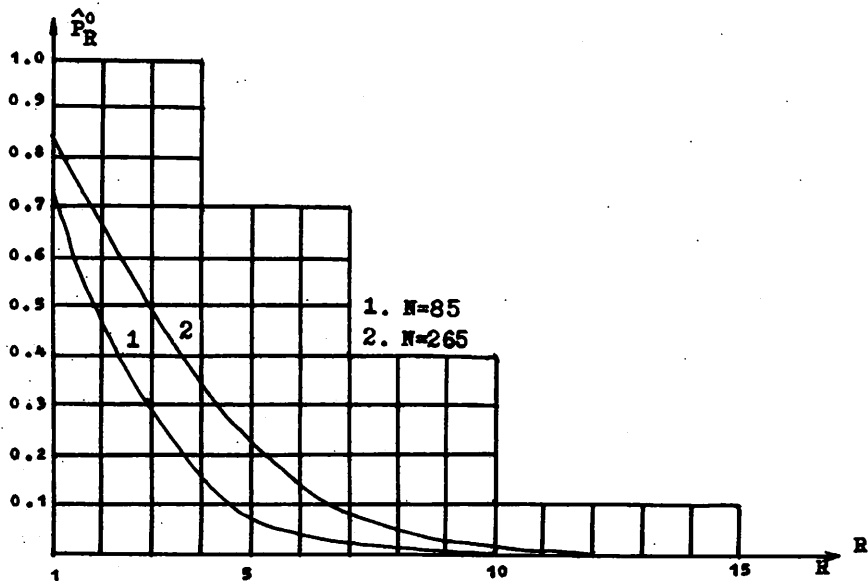


Рис. II

6. Оценки, вычисленные по формулам (25) и (27), можно улучшить. Прежде чем приступить к описанию метода улучшения этих оценок, дадим следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Конфигурация f_r называется связанной по строкам (по столбцам), если все ее строки (столбцы) являются сегментами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Конфигурация f_r , связанная по строкам и столбцам, называется выпуклой.

Оценки (25) и (27) получены методом посегментного наращивания конфигураций вдоль оси y . Следовательно, они учитывают все конфигурации ромба $Rh(n-1)$, связанные по строкам, в том числе и выпуклые конфигурации. В то же время они не учитывают конфигурации,

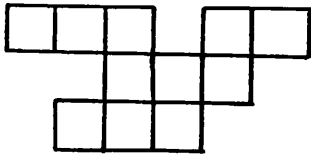


Рис. 12

связные только по столбцам, и конфигурации, имеющие несвязные строки и несвязные столбцы (рис.12).

Методом посегментного наращивания конфигураций по направлению оси x можно учесть конфигурации, связанные по столбцам. При этом, однако, выпуклые конфигурации будут учтены вторично. Следовательно, если изве-

стно число T_x выпуклых несводимых конфигураций, то улучшенная оценка числа несводимых связанных конфигураций \tilde{S}_x будет определяться формулой

$$\tilde{S}_x = 2\hat{S}_x - T_x . \quad (28)$$

Соответственно улучшенная оценка \tilde{L}_x числа неизоллирующих конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$ будет определяться формулой

$$\tilde{L}_R = 2 \cdot L_R - T_R \cdot N . \quad (29)$$

В [7] дана асимптотическая оценка T_x числа несводимых выпуклых конфигураций на бесконечной плоскости:

$$T_x \sim (2.31)^x, \quad x \rightarrow \infty .$$

По теореме I, результат (30) может быть использован в нашей задаче для выпуклых конфигураций ранга $r \leq 2(n-1)+1$, $n \rightarrow \infty$, но нам нужно знать число T_x для конфигураций ранга $1 \leq r \leq I_{n-1}$, где n - любое число, большее единицы.

Для нахождения производящей функции $\Phi^*(t)$ числа T_x несводимых выпуклых конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$ используем метод посегментного наращивания. При этом нужно учесть, что любая выпуклая конфигурация является объединением конфигураций трех типов: параллелограмма, нижнего и верхнего трапециодов [7] (рис.13).

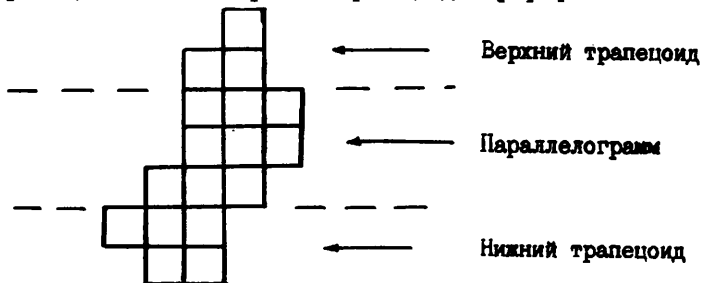


Рис. 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Параллелограммом, нижним и верхним трапецоидами называются выпуклые конфигурации, позиции и ранги сегментов которых удовлетворяют соотношениям:

а) правый параллелограмм

$$\begin{aligned} x_j &\geq x_1, \\ c_j + x_j &\geq c_1 + x_1, \quad j > 1; \end{aligned} \quad (3I)$$

б) левый параллелограмм

$$\begin{aligned} x_j &\leq x_1, \\ c_j + x_j &\leq c_1 + x_1, \quad j > 1; \end{aligned} \quad (3I')$$

в) верхний трапецоид

$$\begin{aligned} x_j &\geq x_1, \\ c_j + x_j &\leq c_1 + x_1, \quad j > 1; \end{aligned} \quad (3I'')$$

г) нижний трапецоид

$$\begin{aligned} x_j &\leq x_1, \\ c_j + x_j &\geq c_1 + x_1, \quad j > 1. \end{aligned} \quad (3I''')$$

Кроме соотношений (3I)-(3I'''), необходимо учесть соотношения между позициями и рангами сегментов на границе между параллелограммом и трапецоидами.

Будем системы неравенств, определяющие связность сегментов конфигураций всех трех типов.

I. Правый параллелограмм.

а) Условия связи сегментов $Sg(c_i)$ и $Sg(c_{i+1})$ параллелограмма:

$$\begin{aligned} x_i &\leq x_{i+1} \leq c_1 + x_i - 1, \\ c_i + x_i - 1 &\leq c_{i+1} + x_{i+1} - 1 \leq \beta_{i+1}. \end{aligned}$$

Соответствующая функция связи

$$\pi(t, c_i, x_i) = \sum_{j=x_i}^{c_1+x_i-1} \sum_{h=c_i+x_i-j}^{\beta_{i+1}-j+1} t^h. \quad (32)$$

б) Условия связи нижнего сегмента $Sg(c_{i+1})$ параллелограмма с верхним сегментом $Sg(c_i)$ нижнего трапецоида:

$$\begin{aligned} x_i + 1 &\leq x_{i+1} \leq c_1 + x_i - 1, \\ c_i + x_i - 1 &\leq c_{i+1} + x_{i+1} - 1 \leq \beta_{i+1}. \end{aligned}$$

Функция связи параллелограмма и нижнего трапецоида

$$\hat{\pi}(t, c_i, x_i) = \frac{c_i + x_i - 1}{\sum_{j=x_i+1}^{c_i+x_i-1}} \frac{\beta_{i+1}^{-j+1}}{\sum_{h=c_i+x_i-j}^{\beta_{i+1}-j+1}} t^h. \quad (33)$$

2. Нижний трапецоид.

Условия связи сегментов $Sg(c_i)$ и $Sg(c_{i+1})$ нижнего трапецоида

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &\leq x_{i+1} \leq x_i, \\ c_i + x_i - 1 &\leq c_{i+1} + x_{i+1} - 1 \leq \beta_{i+1}. \end{aligned}$$

Функция связи сегментов

$$\sigma(t, c_i, x_i) = \frac{x_i}{\sum_{j=\alpha_{i+1}}^{x_i}} \frac{\beta_{i+1}^{-j+1}}{\sum_{h=c_i+x_{i+1}-j}^{\beta_{i+1}-j+1}} t^h. \quad (34)$$

3. Верхний трапецоид.

а) Условия связи сегментов $Sg(c_i)$ и $Sg(c_{i+1})$ верхнего трапецоида:

$$\begin{aligned} x_i &\leq x_{i+1} \leq c_i + x_i - 1, \\ c_{i+1} + x_{i+1} - 1 &\leq c_i + x_i - 1. \end{aligned}$$

Функция связи сегментов

$$\rho(t, c_i, x_i) = \frac{c_i + x_i - 1}{\sum_{j=x_i}^{c_i+x_i-1}} \frac{c_i + x_i - j}{\sum_{h=1}^{c_i+x_i-j}} t^h. \quad (35)$$

б) Условия связи нижнего сегмента $Sg(c_{i+1})$ верхнего трапецоида с верхним сегментом $Sg(c_i)$ параллелограмма:

$$\begin{aligned} x_i &\leq x_{i+1} \leq c_i + x_i - 2, \\ c_{i+1} + x_{i+1} - 1 &\leq c_i + x_i - 2. \end{aligned}$$

Функция связи верхнего трапецоида и параллелограмма

$$\hat{\rho}(t, c_i, x_i) = \frac{c_i + x_i - 2}{\sum_{j=x_i}^{c_i+x_i-2}} \frac{c_i + x_i - j - 1}{\sum_{h=1}^{c_i+x_i-j-1}} t^h. \quad (36)$$

в) Условия связи сегментов $Sg(c_{i+1})$ и $Sg(c_i)$ верхнего и нижнего трапецоидов (параллелограмм отсутствует):

$$x_i \leq x_{i+1} \leq c_i + x_i - 2,$$

$$c_{i+1} + x_{i+1} - 1 \leq c_i + x_i - 2$$

и

$$x_i + 1 \leq x_{i+1} \leq c_i + x_i - 1,$$

$$c_{i+1} + x_{i+1} - 1 = c_i + x_i - 1.$$

Функция связи верхнего и нижнего трапецидов

$$\hat{\rho}(t, c_i, x_i) = \sum_{j=x_i}^{c_i+x_i-2} \sum_{h=1}^{c_i+x_i-j-1} t^h + \sum_{j=x_i+1}^{c_i+x_i-1} t^{c_i+x_i-j}. \quad (37)$$

Используя функции (32)-(37), можно определить производящую функцию $\theta_{1,k}^*(t)$ числа выпуклых несводимых конфигураций с сегментом $Sg(c_1)$ в начальной строке и конечным сегментом в k -й строке по формуле (16) с учетом (20).

При вычислении производящей функции $\theta_{1,k}^*(t)$ необходимо рассмотреть следующие случаи.

1) Выпуклая конфигурация состоит из правого параллелограмма и двух трапецидов - верхнего и нижнего. Нижним сегментом параллелограмма является $Sg(c_i)$, $i \geq 1+1$, а верхним - сегмент $Sg(c_j)$, $i+1 \leq j \leq k-1$.

Соответствующая производящая функция числа $A_{1,i,j,k}$ выпуклых конфигураций

$$\omega_{1,i,j,k}(t) = \sum_h A_{1,i,j,k} \cdot t^h =$$

$$= (t^{c_1} \cdot \sigma_{i+1}(t, c_1, x_1), \dots, \sigma_{i-1}(t, c_{i-2}, x_{i-2}),$$

$$\hat{\pi}_i(t, c_{i-1}, x_{i-1}), \pi_{i+1}(t, c_i, x_i), \dots, \pi_{j-1}(t, c_{j-2}, x_{j-2}),$$

$$\hat{\rho}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}), \rho_{j+1}(t, c_j, x_j), \dots, \rho_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})). \quad (38)$$

2) Выпуклая конфигурация состоит из правого параллелограмма и нижнего трапецида. Нижним сегментом параллелограмма является $Sg(c_i)$. Соответствующая производящая функция $\theta_{1,i,k}(t)$ числа $B_{1,i,k}$ выпуклых конфигураций

$$\omega_{1,i,k}(t) = \sum_h B_{1,i,k} \cdot t^h = (t^{c_1} \cdot \sigma_{i+1}(t, c_1, x_1), \dots, \sigma_{i-1}(t, c_{i-2}, x_{i-2}),$$

$$\pi_i(t, c_{i-1}, x_{i-1}), \pi_{i+1}(t, c_i, x_i), \dots, \pi_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})). \quad (39)$$

3) Выпуклая конфигурация состоит из верхнего и нижнего трапецидов (параллелограмм отсутствует). Нижним сегментом верхнего трапецида является $Sg(c_j)$. Соответствующая производящая функция $\theta_{1,j,k}(t)$ числа c_h выпуклых конфигураций

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1,j,k}(t) &= \sum_h c_h \cdot t^h = \\ &= (t^{c_1, \sigma_{1+1}}(t, c_1, x_1), \dots, \sigma_{j-1}(t, c_{j-2}, x_{j-2}), \\ &\quad \hat{\rho}_j(t, c_{j-1}, x_{j-1}), \rho_{j+1}(t, c_j, x_j), \dots, \rho_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})). \end{aligned} \quad (40)$$

4) Выпуклая конфигурация состоит из одного нижнего трапецида. Соответствующая производящая функция $\omega_{1,k}(t)$ числа D_h выпуклых конфигураций:

$$\omega_{1,k}(t) = \sum_h D_h \cdot t^h = (t^{c_1, \sigma_{1+1}}(t, c_1, x_1), \dots, \sigma_k(t, c_{k-1}, x_{k-1})). \quad (41)$$

Функции $\omega_{1,i,j,k}(t)$ и $\omega_{1,i,k}(t)$ учитывают выпуклые конфигурации только с правым параллелограммом. Чтобы учесть выпуклые конфигурации с левым параллелограммом, необходимо удвоить эти функции. Из формул (38)-(41) с учетом сделанных замечаний следует, что производящая функция $\theta_{1,k}^*(t)$ числа T_x^* выпуклых конфигураций, имеющих конечный сегмент в k -й строке ромба $Rh(n-1)$ и начальный сегмент $Sg(c_1)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \theta_{1,k}^*(t) &= \sum_x T_x^* \cdot t^x = 2 \cdot \sum_{i=1+1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \omega_{1,i,j,k}(t) + 2 \sum_{i=1+1}^k \omega_{1,i,k}(t) + \\ &+ \sum_{j=1+1}^k \tilde{\omega}_{1,j,k}(t) + \omega_{1,k}(t), \end{aligned} \quad (42)$$

где функции $\omega_{1,i,j,k}(t)$, $\omega_{1,i,k}(t)$, $\omega_{1,j,k}(t)$ и $\omega_{1,k}(t)$ вычисляются соответственно по формуле (38)-(41).

Определив множество функций $\theta_{1,k}^*(t)$ для всех возможных значений параметров c_1 , x_1 и k , по формуле (25) можно вычислить производящую функцию $\Phi^*(t)$ числа T_x^* несводимых выпуклых конфигураций в ромбе $Rh(n-1)$. Далее, по формулам (28) и (29) соответственно можно определить улучшенные оценки числа $\tilde{\Sigma}_x^*$ несводимых связанных конфигураций и числа $\tilde{\Sigma}_x^*$ неизоллирующих конфигураций.

Таким образом, результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 3. Число S_r несводимых связанных конфигураций исправных ЭМ и полное число L_r неизоллирующих конфигураций неисправных ЭМ в КАИС-структуре ранга $N = 2n^2 + 2n + 1$, (n - число ярусов ромба $Rh(n)$) удовлетворяют неравенствам

$$S_r > \tilde{S}_r,$$

$$L_r > \tilde{L}_r,$$

где \tilde{S}_r и \tilde{L}_r - улучшенные оценки, определяемые по формулам (28) и (29).

7. Поскольку ЭМ выходят из строя независимо друг от друга, то конфигурации f_i и f_j независимы при $i \neq j$. Поэтому если известны условные вероятности P_i^0 отсутствия изолированных исправных ЭМ в ОВС из N ЭМ при наличии i неисправных ЭМ, $i = R, R+1, \dots, N-1, N$, то вероятность $\mathcal{P}_R^0(t)$ отсутствия изолированных ЭМ при числе неисправных ЭМ $i \geq R$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{P}_R^0(t) = \sum_{i=R}^N P_i(t) \cdot P_i^0,$$

где $P_i(t)$ - вероятность наличия в ОВС i неисправных ЭМ в момент времени t .

Соответствующая нижняя оценка

$$\mathcal{P}_R^0(t) = \sum_{i=R}^N P_i(t) \cdot \hat{P}_i^0.$$

Формулы, полученные в данной работе, могут быть применены для расчета нижней оценки условной вероятности P_i^0 отсутствия изолированных ЭМ в двумерной КАИС-структуре при наличии i неисправных ЭМ и нижней оценки вероятности $\mathcal{P}_R^0(t)$ отсутствия изолированных ЭМ в КАИС-структуре при наличии $i \geq R$ неисправных ЭМ. Эти формулы можно использовать для нахождения асимптотических нижних оценок вероятностей P_i^0 и $\mathcal{P}_R^0(t)$ при стремлении числа ЭМ в КАИС-структуре и бесконечности.

В заключение автор выражает благодарность В.В.Корнееву за постановку задачи и полезные обсуждения в процессе написания данной работы.

Л и т е р а т у р а

1. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск, 1974, с.17-34.
2. ХАРАРИ Ф., ПАЛМЕР Э. Перечисление графов.-М.: Мир, 1974. -с.324.
3. READ R.C. Contributions to the cell growth problem.-Canad. J. Math, 1962, v.14, N 1, p.1-20.
4. KLARNER D.A. Cell growth problems.- Canad. J. Math., 1967, v.19, N 4, p.851-863.
5. KLARNER D.A., RIVEST R.L. A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes.- Canad. J. Math., 1973, v.25, N 3, p.586-602.
6. EDEN M. A two-dimensional growth process.- Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V.IV. Berkeley, California, 1961, p.223-239.
7. KLARNER D.A., RIVEST R.L. Asymptotic bounds for the number of convex n -ominoes.- Discret Mathematics, 1974, v.8, N 1, p.31-40.
8. РИОРДАН Дж. Введение в комбинаторный анализ.-М.: Изд.ИЛ, 1963. - с.287.
9. ЕВРЕЙНОВ Э.В.; ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы.-Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние. 1978. - 317 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 июня 1979 года