МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 81

УДК 518.12

О РАСХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Л. Мирошниченко

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана последовательность разбиений

$$\Delta_k : a = x_{k,0} < x_{k,1} < \dots < x_{k,N_k} = b, \quad k = 0,1,\dots\ .$$

Обозначим через $C^r[a,b]$, $r = 0,1,\dots,$ $(C^0[a,b] = C[a,b])$, множество r раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$. Как обычно,

$$\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Через $S_k(f;x)$ обозначим кубический сплайн [1], интерполирующий на разбиении Δ_k функцию $f(x)\in C[a,b]$,

$$S_k(f;x)\in C^2[a,b], \quad S_k(f;x_{k,i}) = f(x_{k,i}), \; i=0,\dots,N_k\ .$$

Если $f(x)$ -периодическая с периодом $b-a$, то и $S_k(f;x)$ считается периодическим. В непериодическом случае сплайн $S_k(f;x)$ подчиняется граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} S_k'(f;a) &= [f(x_{k,1}) - f(x_{k,0})]/h_{k,0}, \\ S_k'(f;b) &= [f(x_{k,N_k}) - f(x_{k,N_k-1})]/h_{k,N_k-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $h_{k,i} = x_{k,i+1} - x_{k,i}$, $i = 0,\dots,N_k-1$.

При $x\in[x_{k,i}, x_{k,i+1}]$ сплайн $S_k(f;x)$ записывается в виде

$$S_k(f;x) = (1-t)^2(1+2t)f_{k,i} + t^2(3-2t)f_{k,i+1} + \\ + h_{k,i}\, t(1-t)^2 m_{k,i} - h_{k,i}\, t^2(1-t) m_{k,i+1}. \qquad (2)$$

Здесь $t = (x - x_{k,i})/h_{k,i}$, $m_{k,i} = S_k'(f;x_{k,i})$.

В периодическом случае величины $m_{k,i}$ вычисляются из системы

$$\lambda_{k,i}\, m_{k,i-1}+2m_{k,i}+\mu_{k,i}\, m_{k,i+1}=d_{k,i}\,,\ i=1,2,\ldots,N_k\,, \tag{3}$$

где

$$\lambda_{k,i}=h_{k,i}/(h_{k,i-1}+h_{k,i}),\quad \mu_{k,i}=1-\lambda_{k,i}\,,$$

$$d_{k,i}=3\lambda_{k,i}\,\frac{f_{k,i}-f_{k,i-1}}{h_{k,i-1}}+3\mu_{k,i}\,\frac{f_{k,i+1}-f_{k,i}}{h_{k,i}}\,,$$

$$h_{k,N_k}=h_{k,0}\,,\quad m_{k,0}=m_{k,N_k}\,,\quad m_{k,1}=m_{k,N_k+1}\,.$$

Для граничных условий (I)

$$\left.\begin{aligned} &m_{k,0}=[f(x_{k,1})-f(x_{k,0})]/h_{k,0}\,,\\ &\lambda_{k,i}m_{k,i-1}+2m_{k,i}+\mu_{k,i}m_{k,i+1}=d_{k,i}\,,\ i=1,\ldots,N_k-1,\\ &m_{k,N_k}=[f(x_{k,N_k})-f(x_{k,N_k-1})]/h_{k,N_k-1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В качестве характеристики разбиения Δ_k возьмем величину

$$\rho_k=\max_{|i-j|=1}\frac{h_{k,i}}{h_{k,j}}\,.$$

В работе [2] показано, что при выполнении условий

$$\rho_k\leq\rho\,,\qquad k=0,1,\ldots\,, \tag{5}$$

$$\bar h_k=\max_i h_{k,i}\to 0 \qquad \text{при} \qquad k\to\infty \tag{6}$$

имеет место сходимость интерполяционного процесса

$$\lim_{k\to\infty}\|S_k(f;x)-f(x)\|_C=0, \tag{7}$$

если $\rho<(3+\sqrt5)/2$.

Там же доказано, что при $\rho\geq(3+\sqrt5)/2$ соотношение (7), вообще говоря, несправедливо, т.е. интерполяционный процесс может расходиться. В [3] показывается, что расходимость может быть при $\rho>(3+\sqrt5)/2$. Однако доказательство расходимости, приведенное в [2], технически сложно, а в [3] оно не полно, так как нарушено условие (6) (предлагаемый способ устранения этого недостатка не приводит к цели), и к тому же не рассматривается случай $\rho=(3+\sqrt5)/2$.

В данной работе сравнительно простыми средствами показывается, что при $\rho\geq(3+\sqrt5)/2$ существуют последовательность сеток

$\{\Delta_k\}$, удовлетворяющая условиям (5), (6), и непрерывная функция $f(x)$ такие, что $S_k(f;x)$ не сходится к $f(x)$ при $k\to\infty$. Основная идея доказательства заимствована из [3].

Нам понадобится следующая

Теорема (Банах-Штейнгауз). Пусть линейные ограниченные операторы P_k, $k=1,2,\ldots$, и P отображают банахово пространство B в нормированное пространство B_1. Для того чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} P_k(u)=P(u)$ при всех $u\in B$, необходимо и достаточно выполнения условий:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} P_k(u)=P(u)$ для u из множества $\mathcal{D}$, всюду плотного в B;

б) существует такое число M, что $\|P_k\|\le M$, $k=1,2,\ldots$

Определим P_k как оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ сплайн $S_k(f;x)$. В качестве P возьмем тождественный оператор. Будем предполагать, что эти операторы действуют из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Каждый из операторов P_k ограничен. Действительно, учитывая оценку [4]

$$|S_k(f;x)-f(x)|_C\le(1+\beta_k)\omega(f;\bar{h}_k),$$

где

$$\beta_k=\frac{\max\limits_i\{h_{k,i}\}}{\min\limits_i\{h_{k,i}\}},\quad \omega(f;h)=\max_{\substack{|x-y|\le h\\ x,y\in[a,b]}}|f(x)-f(y)|,$$

получаем

$$|P_k|=\sup_{|f|=1}|S_k(f;x)|_C\le$$

$$\le\sup_{|f|=1}\left(|S_k(f;x)-f(x)|_C+|f(x)|_C\right)\le 1+\sup_{|f|=1}(1+\beta_k)\omega(f;\bar{h}_k).$$

Так как $\omega(f;\bar{h}_k)\le 2\|f\|_C$, то отсюда $\|P_k\|\le 3+2\beta_k$.

Легко видеть, что условие "а" теоремы Банаха-Штейнгауза будет выполнено для введенных операторов и пространств, если $\bar{h}_k\to 0$ при $k\to\infty$. В самом деле, в качестве множества $\mathcal{D}$ можно взять пространство $C^1[a,b]$. Сходимость интерполяционных кубических сплайнов в нем для рассматриваемых краевых условий показана в [4, с.90].

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности интерполяционных кубических сплайнов к непрерывной функции полностью эквивалентен вопросу об ограниченности последовательности $\{\|P_k\|\}$.

Покажем, что при любом $\rho \geq (3+\sqrt{5})/2$ существует последовательность сеток $\{\Delta_k\}$, для которой $\|P_k\| \to \infty$ при $k \to \infty$.

Зафиксируем число $\rho \geq 2$. Алгоритм построения последовательности $\{\Delta_k\}$, $k = 1,2,\ldots$, состоит в следующем. Обозначим

$$H_k = \frac{b-a}{2k+1}, \quad h_k = \frac{H_k}{2+2\rho+\cdots+2\rho^{k-1}+\rho^k}.$$

Разобьем $[a,b]$ на три части: $a < a+kH_k < a+(k+1)H_k < b$. На отрезке $[a, a+kH_k]$ отложим, начиная с правого конца, равные промежутки длиной h_k в количестве $\ell = [m_k]$, где $[m_k]$ - целая часть числа $m_k = kH_k/h_k$. Остаток длиной αh_k, $\alpha = m_k - [m_k]$, объединим с соседним промежутком, если $\alpha < 1/2$, и оставим самостоятельным промежутком, если $\alpha \geq 1/2$. В последнем случае число отрезков будет $\ell = [m_k]+1$. В результате на $[a, a+kH_k]$ имеем разбиение:

$$x_{k,0} = a, \ x_{k,1} = \begin{cases} a+(1+\alpha)h_k, & \text{если} \quad \alpha < 1/2, \\ a+\alpha h_k, & \text{если} \quad \alpha \geq 1/2. \end{cases}$$

Аналогичным образом, начиная с левого конца, делим отрезок $[a + (k+1)H_k, b]$.

Отрезок $[a+kH_k, a+(k+1)H_k]$ разобьем на $2k+1$ промежутков

$$a+kH_k = x_{k,\ell} < x_{k,\ell+1} < \cdots < x_{k,\ell+2k+1} = a+(k+1)H_k$$

так, что

$$h_{k,j} = \rho^{j-\ell} h_k, \quad j = \ell, \ldots, \ell+k,$$

$$h_{k,j} = \rho^{2k-j+\ell} h_k, \ j = \ell+k+1, \ldots, \ell+2k.$$

Очевидно, построенная таким образом последовательность разбиений удовлетворяет условиям (5), (6).

Периодический кубический сплайн, интерполирующий $f(x)$ может быть записан в виде

$$S_k(f; x) = \sum_i f_{k,i} F_{k,i}(x),$$

где $F_{ki}(x)$ - фундаментальные периодические кубические сплайны определяемые соотношениями

$$F_{k,i}(x_{k,j}) = \delta_{ij}, \quad F_{k,i}^{(r)}(a) = F_{k,i}^{(r)}(b), \tag{8}$$

$$r = 0,1,2, \quad i,j = 0,1,\ldots,N_k,$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

В непериодическом случае (краевые условия (I)) фундаментальные сплайны $F_{k,i}(x)$ определяются несколько иначе [I]. Однако это различие никак не сказывается на дальнейших рассуждениях. Необходимо лишь всюду заменить ссылки на систему (3) ссылками на (4).

Имеем

$$\| P_k \| = \sup_{\|f\|=1} |S_k(f;x)|_C = \max_{x\in[a,b]} \sum_i |F_{k,i}(x)| >$$

$$> \left| F_{k,\ell}\left(\frac{a+b}{2}\right) + F_{k,\ell+2k+1}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| .$$

Функция $\varphi(x) = F_{k,\ell}(x) + F_{k,\ell+2k+1}(x)$ является кубическим сплайном и симметрична относительно точки $(a+b)/2$. Поэтому если обозначить $m_i = \varphi'(x_i)$, то

$$m_i = -m_{N_k - i} \ , \quad i = 0,1,\ldots,\ell+k \ . \qquad (9)$$

Из (8) находим $\varphi(x_{k,\ell+k}) = \varphi(x_{k,\ell+k+1}) = 0$ и по формуле (2) определяем

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{4}\rho^k h_k m_{\ell+k} \ .$$

Следовательно, чтобы оценить $\| P_k \|$ снизу, достаточно вычислить величину $m_{\ell+k}$. Из условий периодичности $m_0 = m_{N_k}$. Принимая во внимание (9), имеем $m_0 = m_{N_k} = 0$. Учитывая это обстоятельство, а также (9), из (3) получаем следующую систему относительно неизвестных m_i, $i = 1,\ldots,\ell+k$,

$$2m_1 + \mu_1 m_2 = 0; \qquad (10а)$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 0, \qquad i = 2,\ldots,\ell-2; \qquad (10б)$$

$$m_{\ell-2} + 4m_{\ell-1} + m_\ell = 3/h_k; \qquad (10в)$$

$$m_{\ell-1} + 4m_\ell + m_{\ell+1} = 0; \qquad (10г)$$

$$\rho m_\ell + 2(1+\rho)m_{\ell+1} + m_{\ell+2} = -3\rho/h_k \ ; \qquad (10д)$$

$$\rho m_{i-1} + 2(1+\rho)m_i + m_{i+1} = 0, \quad i = \ell+2,\ldots,\ell+k-1; \qquad (10е)$$

$$\rho m_{\ell+k-1} + (1+2\rho)m_{\ell+k} = 0 . \qquad (10ж)$$

Исключим с помощью уравнения (10г) неизвестное m_ℓ из уравнений (10в) и (10д). В результате получаем уравнения

$$4m_{\ell-2} + 15m_{\ell-1} - m_{\ell+1} = 12/h_k \ ; \qquad (11)$$

$$\rho m_{\ell-1}-(8+7\rho)m_{\ell+1}-4m_{\ell+2}=12\rho/h_k\,, \qquad (12)$$

которые совместно с уравнениями (10а), (10б), (10е), (10ж) образуют систему для определения неизвестных $m_1, m_2, \ldots, m_{\ell-1}$, $m_{\ell+1}, \ldots, m_{\ell+k}$.

Общее решение разностных уравнений (10б) имеет вид

$$m_i=C_1\sigma_1^i+C_2\sigma_2^i, \quad i=1,\ldots,\ell-1,$$

где $\sigma_1=-2+\sqrt{3}$, $\sigma_2=-2-\sqrt{3}$ – корни характеристического уравнения $\sigma^2+4\sigma+1=0$. Потребовав, чтобы это решение удовлетворяло уравнению (10а), получаем

$$C_1=\rho_1 C_2\,, \quad \rho_1=-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{2+\mu_1\sigma_2}{2+\mu_1\sigma_1}\,.$$

Следовательно,

$$m_i=C_2(\rho_1\sigma_1^i+\sigma_2^i), \quad i=1,\ldots,\ell-1\,. \qquad (13)$$

Решение уравнений (10д) можно записать в виде

$$m_i=C_3\,\omega_1^{i-\ell}+C_4\,\omega_2^{i-\ell}, \quad i=\ell+1,\ldots,\ell+k,$$

где $\omega_1=-(1+\rho)+\sqrt{1+\rho+\rho^2}$, $\omega_2=-(1+\rho)-\sqrt{1+\rho+\rho^2}$ – корни уравнения $\omega^2+2(1+\rho)\omega+\rho=0$. Из (10е) следует

$$C_4=\rho_2 C_3\,, \quad \rho_2=-\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^k\frac{1+\omega_1}{1+\omega_2}\,.$$

Таким образом,

$$m_i=C_3(\omega_1^{i-\ell}+\rho_2\,\omega_2^{i-\ell}), \quad i=\ell+1,\ldots,\ell+k\,. \qquad (14)$$

Потребуем, чтобы величины $m_{\ell-2}, m_{\ell-1}, m_{\ell+1}, m_{\ell+2}$, определяемые формулами (13), (14), удовлетворяли уравнениям (11), (12). В результате приходим к системе

$$\alpha_1 C_2+\beta_1 C_3=12/h_k\,, \quad \alpha_2 C_2+\beta_2 C_3=12/h_k\,,$$

где

$$\alpha_1=\rho_1\sigma_1^{\ell-2}(4+15\sigma_1)+\sigma_2^{\ell-2}(4+15\sigma_2),\quad \alpha_2=\rho_1\sigma_1^{\ell-1}+\sigma_2^{\ell-1},$$

$$\beta_1=-\omega_1-\rho_2\omega_2\,, \quad \beta_2=-\rho^{-1}\left[\omega_1(8+7\rho+4\omega_1)+\rho_2\,\omega_2(8+7\rho+4\omega_2)\right].$$

Определив отсюда C_3, из (14) вычисляем

$$m_{l+k} \doteq \frac{12}{h_k} \; \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} \; \frac{\omega_2-\omega_1}{1+\omega_2} \; \omega_1^k .$$

В итоге

$$|P_k| > \left|\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = 3|\rho\omega_1|^k \frac{\omega_2-\omega_1}{1+\omega_2}\left|\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right| .$$

Учитывая, что $\sigma_1/\sigma_2<1$, $\omega_1/\omega_2<1$, легко получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} = C_5 \neq 0 .$$

Поэтому, если k достаточно велико, то $|P_k|>C|\rho\omega_1|^k$, где $C\neq 0$.

Значит, последовательность $\{|P_k|\}$ будет неограниченной, если $|\rho\omega_1|>1$, что, как нетрудно видеть, эквивалентно неравенству $\rho^2-3\rho+1>0$, которое имеет место при $\rho>(3+\sqrt{5})/2$.

Нам осталось рассмотреть случай $\rho=(3+\sqrt{5})/2$. Введем функцию

$$\psi(x)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\left\{F_{k,l+j}(x)+F_{k,l+2k+1-j}(x)\right\}.$$

Имеем $\psi(x_{k,i})=0$, если $i<l$, $\psi(x_{k,i})=(-1)^{i-l}$; $i=l,\ldots,l+k-1$, $\psi(x_{k,l+k})=\psi(x_{k,l+k+1})=0$. Обозначив $\tilde m_i=\psi'(x_{k,i})$, по аналогии с предыдущим находим $\tilde m_0=\tilde m_{N_k}=0$, $\tilde m_i=-\tilde m_{N_k-i}$, $i=1,\ldots,l+k$. Из (3) получаем систему для величин $\tilde m_i$:

$$\left.\begin{aligned}
&2\tilde m_1+\mu_1\tilde m_2=0;\\
&\tilde m_{i-1}+4\tilde m_i+\tilde m_{i+1}=0, \quad i=2,\ldots,l-2;\\
&\tilde m_{l-2}+4\tilde m_{l-1}+\tilde m_l=3/h_k;\\
&\tilde m_{l-1}+4\tilde m_l+\tilde m_{l+1}=-3/h_k;\\
&\rho\tilde m_{j-1}+2(1+\rho)\tilde m_j+\tilde m_{j+1}=\frac{6}{\rho^{j-l}h_k}(-1)^{j-l}(\rho^2-1),\\
&\qquad j=l+1,\ldots,l+k-2;\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$\rho\tilde m_{l+k-2}+2(1+\rho)\tilde m_{l+k-1}+\tilde m_{l+k}=\frac{3}{\rho^{k-1}h_k}(-1)^{k-1}(2\rho^2-1);$$

$$\rho\tilde m_{l+k-1}+(1+2\rho)\tilde m_{l+k}=\frac{3\rho^2(-1)^k}{\rho^2 h_k}.$$

Матрица системы (I5) с диагональным преобладанием. Нетрудно получить

$$\max_i|\tilde m_i|\leqslant 6/h_k. \tag{I6}$$

Выделим из системы (I5) уравнения с номерами $j=l,\dots,l+k$. Умножим каждое из них соответственно на $(-1)^{j-l}\rho^{j-l}$ и сложим полученные равенства. Если учесть, что $\rho^3-2\rho(1+\rho)+1=0$ при $\rho=(3+\sqrt5)/2$, то имеем

$$\tilde m_{l-1}+(4-\rho^2)\tilde m_l+(-1)^k\rho^k(\rho^2-1)\tilde m_{l+k}=\frac{6}{h_k}(\rho^2-1)(k-1)+\frac{3\rho^2}{h_k}.$$

Отсюда, привлекая (I6), находим

$$\rho^k|\tilde m_{l+k}|\geqslant\frac{6(k-1)}{h_k}+\frac{1}{\rho^2-1}\left[\frac{3\rho^2}{h_k}-|\tilde m_{l-1}|-|4-\rho^2||\tilde m_l|\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{6(k-1)}{h_k}+\frac{18-3\rho^2}{(\rho^2-1)h_k}.$$

Теперь из очевидных соотношений

$$\|P_k\|\geqslant\max_{x\in[a,b]}\sum_i|F_{k,i}(x)|>\left|\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|=$$

$$=\frac14\rho^k h_k|\tilde m_{l+k}|\geqslant\frac32(k-1)+\frac{18-3\rho^2}{4(\rho^2-1)}$$

приходим к выводу о неограниченности последовательности $\{\|P_k\|\}$ при $\rho=(3+\sqrt5)/2$.

Так как условия теоремы Банаха-Штейнгауза носят необходимый и достаточный характер, то тем самым доказано, что существуют некоторая непрерывная функция и последовательность сеток при $\rho\geqslant(3+\sqrt5)/2$, для которых интерполяционный процесс расходится.

Отметим интересную особенность сеток Δ_k, использованных при доказательстве. А именно, они становятся почти всюду равномерными при $k \to \infty$, так как длина участка, на котором нарушается равномерность сетки, равна $H_k + 2 d h_k$ и стремится к нулю при $k \to \infty$. Тем не менее последовательность сплайнов может расходиться! В то же время для сплайнов на последовательности всюду равномерных сеток сходимость имеет место для любой непрерывной функции.

Литература

1. АЛБЕРГ ДЖ., НИЛЬСОН Э., УОЛШ ДЖ. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.

2. ЗМАТРАКОВ Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. - Труды Мат.ин-та АН СССР, 1975, т. 138, с. 71-93.

3. MARSDEN M.J. Cubic spline interpolation of continuous functions.- J.Approximat.Theory,1974,v.10, N 2,p.103-111.

4. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.. - М.: Наука, 1976. - 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 ноября 1979 года