МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
1979 год (Вычислительные системы) Выпуск 81

УДК 518.12

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ

Т. Жанлав

Пусть $S(x)=S(f,x)\in C^2[a,b]$ – кубический сплайн, интерполирующий функцию $f(x)$ в точках $x=x_i$ сетки $\Delta_n: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ и удовлетворяющий одному из краевых условий:

1. $S^{(i)}(a)=S^{(i)}(b) \quad i=1,2;$
2. $S'(a)=f'(a), \quad S'(b)=f'(b);$
3. $S''(a)=f''(a), \quad S''(b)=f''(b).$

В [1] для $f(x)\in C^4[a,b]$ получены следующие оценки:

$$\|S^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)\|_\infty \le b_k H^{4-k}\|f^{IV}(x)\|_\infty, \quad k=0,1,2,3, \tag{1}$$

где

$$b_0=\frac{5}{384}, \quad b_1=\frac{1}{24}, \quad b_2=\frac{3}{8}, \quad b_3=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right),$$

$$H=\max_{0\le i\le n-1} h_i, \quad \beta=\frac{H}{\min_i h_i}, \quad h_i=x_{i+1}-x_i .$$

При этом показано, что в случае $k=0,1$ эти оценки неулучшаемы по константе. В [2] оценка (1) получена при $k=0$ и $f(x)\in W^4_\infty[a,b]$. Как сообщил нам В.Л. Мирошниченко оценки (1) имеют место при более слабых требованиях к гладкости $f(x)$. А именно, достаточно предположить, что $f(x)\in C^2[a,b]$ и $f(x)\in W^4_\infty[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,n-1$.

В настоящей заметке мы улучшим оценки (1) для $k=2,3$.

1. Пусть $f(x)\in W^4_\infty[a,b]$. Обозначим $M_i=S''(x_i)$ $i=0,1,\ldots,n$. Будем считать, что $f(x)$ – периодическая функция с периодом

$b-a$. В этом случае система для M_i имеет вид (см. [3]):

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \ \beta_i = 1 - \lambda_i, \ d_i = \frac{6}{h_i + h_{i-1}}\left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right],$$

$$M_0 = M_n, \ M_{n+1} = M_1, \ h_n = h_0, \ f_i = f(x_i).$$

Преобразуем систему (2) следующим образом. Найдем из $(i-1)$ -го уравнения величину M_{i-1}, а из $(i+1)$ -го уравнения M_{i+1} и подставим их в i -е уравнение, в результате получаем

$$-\beta_{i-1}\beta_i M_{i-2} + (3 + \lambda_i \lambda_{i+1} + \beta_{i-1}\beta_i) M_i - \lambda_i \lambda_{i+1} M_{i+2} =$$
$$= 2d_i - (\beta_i d_{i-1} + \lambda_i d_{i+1}), \ i = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Эта система будет в дальнейшем использована при выводе оценок.

Аналогичные системы легко получить и для краевых условий 2 и 3. Здесь мы приведем лишь соответствующие граничные уравнения для левого конца

$$(4 - \beta_1) M_0 - \lambda_1 M_2 = 2\bar{d}_0 - d_1,$$

$$(3 + \lambda_1 \lambda_2) M_1 - \lambda_1 \lambda_2 M_3 = 2d_1 - \beta_1 \bar{d}_0 - \lambda_1 d_2,$$

где

$$\bar{d}_0 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right),$$

$$(3 + \beta_1 + \lambda_1 \lambda_2) M_1 - \lambda_1 \lambda_2 M_3 = 2d_1 - 2\beta_1 f_0'' - \lambda_1 d_2,$$

$$(3 + \lambda_2 \lambda_3 + \beta_1 \beta_2) M_2 - \lambda_2 \lambda_3 M_4 = 2d_2 - \beta_2 (d_1 - \beta_1 f_0'') - \lambda_2 d_3.$$

2. Введем норму вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ формулой $\|a\| = \max\limits_i |a_i|$ и согласованную с ней норму матрицы $A = (a_{ij})$, $\|A\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

Докажем несколько вспомогательных результатов.

ЛЕММА I. П у с т ь $S(x)$ и н т е р п о л и р у е т ф у н к ц и ю $f(x) \in W_\infty^4 [a,b]$ и у д о в л е т в о р я е т о д н о м у и з к р а е в ы х у с л о в и й I-3. Т о г д а

$$\|M - f''\| \le \frac{H^2}{6} \|f^{IV}(x)\|_\infty. \tag{4}$$

где $M=(M_0, M_1, \ldots, M_n)^T$, $f''=(f_0'', f_1'', \ldots, f_n')^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем лемму только для случая, когда $S(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям. Для остальных краевых условий рассуждения аналогичны. Из (3) имеем

$$-\beta_{i-1}\beta_i(M_{i-2}-f_{i-2}'')+(3+\lambda_i\lambda_{i+1}+\beta_{i-1}\beta_i)(M_i-f_i'')-\lambda_i\lambda_{i+1}(M_{i+2}-f_{i+2}'')=\Delta_i, \quad (5)$$

$$i=1,2,\ldots,n \quad ,$$

где

$$\Delta_i=2d_i-(\beta_i d_{i-1}+\lambda_i d_{i+1})+\beta_{i-1}\beta_i f_{i-2}''-(3+\lambda_i\lambda_{i+1}+\beta_{i-1}\beta_i)f_i''+\lambda_i\lambda_{i+1}f_{i+2}''.$$

Запишем систему (5) в матричном виде

$$A(M-f'')=\Delta. \quad (6)$$

Оценим компоненты вектора Δ. Для этого разложим величины f_k, $k=i-2,\ldots,i+2$, и f_{i-2}'', f_i'', f_{i+2}'' в точке $x=x_i$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Получаем

$$\Delta_i=\sum_{k=-2}^{1}\int_{x_{i+k}}^{x_{i+k+1}} \mathcal{J}_k(u)f^{IV}(u)\,du \quad , \quad (7)$$

где

$$\mathcal{J}_{-2}(u)=\frac{\beta_i}{h_{i-1}+h_{i-2}}\left[-\frac{(u-x_{i-2})^2}{h_{i-2}}+h_{i-2}\right](u-x_{i-2}),$$

$$\mathcal{J}_{-1}(u)=2\beta_i\left[\left(\frac{1}{h_{i-1}^2}+\frac{\beta_{i-1}}{2h_{i-1}h_{i-2}}\right)(u-x_{i-1})^2-\frac{3\beta_{i-1}}{2h_{i-2}}(u-x_{i-1})-\beta_{i-1}\right](u-x_{i-1}),$$

$$\mathcal{J}_0(u)=2\lambda_i\left[\left(\frac{1}{h_i^2}+\frac{\lambda_{i+1}}{2h_ih_{i+1}}\right)(x_{i+1}-u)^2-\frac{3\lambda_{i+1}}{2h_{i+1}}(x_{i+1}-u)-\lambda_{i+1}\right](x_{i+1}-u),$$

$$\mathcal{J}_1(u)=\frac{\lambda_i}{h_i+h_{i+1}}\left[-\frac{1}{h_{i+1}}(x_{i+2}-u)^2+h_{i+1}\right](x_{i+2}-u).$$

Легко видеть, что при $u\in[x_{k+i}, x_{k+i+1}]$ $\mathcal{J}_k(u)\geq 0$, если $k=-2,1$, и $\mathcal{J}_k(u)\leq 0$, если $k=-1, 0$.

Поэтому, применяя неравенство Гёльдера, находим

$$|\Delta_i|\leq\sum_{k=-2}^{1}\int_{x_{i+k}}^{x_{i+k+1}}|\mathcal{J}_k(u)|\,|f^{IV}(u)|\,du\leq$$

$$\le \left[\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \mathcal{J}_{-2}(u)du - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{J}_{-1}(u)du - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{J}_0(u)du + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \mathcal{J}_1(u)du \right] \|f^{IV}\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\lambda_i\left(h_i^2 + h_{i+1}\frac{h_{i+1}^2+h_i^2}{h_i+h_{i+1}}\right) + \beta_i\left(h_{i-1}^2 + h_{i-2}\frac{h_{i-1}^2+h_{i-2}^2}{h_{i-1}+h_{i-2}}\right)\right]\|f^{IV}\|_\infty . \quad (8)$$

Учитывая, что

$$\frac{h_i^2+h_{i+1}^2}{h_i+h_{i+1}} \le H, \quad \frac{h_{i-1}^2+h_{i-2}^2}{h_{i-1}+h_{i-2}} \le H,$$

из (8) получаем

$$|\Delta_i| \le \frac{H^2}{2}\|f^{IV}\|_\infty$$

Так как матрица A с диагональным преобладанием, то из (6), согласно [3, с. 29],

$$\|M-f''\| \le \|\Delta\| \max_i \left\{|a_{ii}| - \sum_{j\ne i}|a_{ij}|\right\}^{-1} \le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty .$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно убедиться, что оценка (4) остается в силе и для случая, когда $f'''(x)$ имеет разрывы первого рода в узлах x_i.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f(x)\in C^4[a,b]$ и $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям 1 или 3, то, используя в (7) теорему о среднем для интегралов, можно получить

$$\|M-f''\| \le \frac{H^2}{6}\left(\frac{5}{8}\|f^{IV}\|_C + \omega(f^{IV})\right),$$

а на равномерной сетке

$$\|M-f''\| \le \frac{h^2}{12}\left(\|f^{IV}\|_C + \omega(f^{IV})\right),$$

где

$$\omega(f^{IV}) = \max_i \max_{(x,y)\in[x_i,x_{i+1}]} |f^{IV}(x) - f^{IV}(y)| .$$

ЛЕММА 2. Если

$$\| M - f'' \| \leq BH^2 \| f^{IV} \|_\infty ,$$

$$| S''(x_i + \alpha h_i) - f''(x_i + \alpha h_i) | \leq AH^2 \| f^{IV} \|_\infty , \quad 0 < A \leq B, \quad \alpha \in (0,1),$$

то для всех t, удовлетворяющих условию

$$\max \left\{ 0, \alpha + \frac{2}{\alpha}(A-B) \right\} \leq t \leq \min \left\{ 1, \alpha - \frac{2}{1-\alpha}(A-B) \right\},$$

имеет место оценка

$$| S''(x_i + th_i) - f''(x_i + th_i) | \leq B \cdot H^2 \| f^{IV} \|_\infty . \tag{9}$$

ЛЕММА 3. Если выполняются неравенства

$$| S''(x_i + \alpha_j h_i) - f''(x_i + \alpha_j h_i) | \leq A_j \cdot H^2 \| f^{IV} \|_\infty , \quad j = 1, 2,$$

где $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, A_j > 0$, то для всех $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$| S''(x_i + th_i) - f''(x_i + th_i) | \leq \left\{ \max(A_1, A_2) + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{8} \right\} H^2 \| f^{IV} \|_\infty . \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО лемм 3,4 нетрудно получить, если учесть линейность функции $S''(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$.

3. Основной результат настоящей работы содержит следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^4 [a, b]$ и удовлетворяет одному из краевых условий I–3. Тогда

$$\| S''(x) - f''(x) \|_C \leq \frac{13H^2}{72} \| f^{IV} \|_\infty \tag{11}$$

и для равномерной сетки

$$\| S''(x) - f''(x) \|_C \leq \frac{h^2}{6} \| f^{IV} \|_\infty . \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем из i-го и $(i+1)$-го уравнений системы (2) величины M_i и M_{i+1} и подставим их в выражение

$$S''(x) - f''(x) = (1-t)(M_i - f_i'') + t(M_{i+1} - f_{i+1}'') + \left[(1-t) f_i'' + t f_{i+1}'' - f''(x) \right],$$

где $$t=\frac{x-x_i}{h_i}, \quad x\in[x_i, x_{i+1}].$$

Отсюда

$$|S''(x)-f''(x)|\le \frac{\beta_i|-2+(2+\beta_{i+1})t|+\lambda_{i+1}|\lambda_i-(2+\lambda_i)t|}{4-\lambda_i\beta_{i+1}}\|M-f''\|+|\Omega_i|, \tag{13}$$

где

$$\Omega_i=\frac{1}{4-\lambda_i\beta_{i+1}}\Big\{(1-t)(2d_i-\lambda_i d_{i+1})+t(2d_{i+1}-\beta_{i+1}d_i)+$$

$$+\beta_i[-2+(2+\beta_{i+1})t]f''_{i-1}+\lambda_{i+1}[\lambda_i-(2+\lambda_i)t]f''_{i+2}\Big\}-f''(x).$$

Применяя формулу Тейлора в точке x с остаточным членом в интегральной форме и неравенство Гёльдера, получим

$$|\Omega_i|\le\frac{\|f^{IV}\|_\infty}{4-\lambda_i\beta_{i+1}}\Big\{\beta_i|2-(2+\beta_{i+1})t|h_{i-1}^2\int_0^1|z^3-z|dz+\lambda_{i+1}|\lambda_i-(2+\lambda_i)t|h_{i+1}^2\int_0^1|(z-1)^3-$$

$$-(z-1)|dz+h_i^2\int_0^t|az^2+bz+c|z\,dz+h_i^2\int_t^1|(az^2+b_1z+c_1z)(z-1)|dz\Big\}, \tag{14}$$

где $$a=-\lambda_i(2+\beta_{i+1})+\big[\beta_{i+1}(2+\lambda_i)+\lambda_i(2+\beta_{i+1})\big]t,$$

$$b=3\lambda_i[2-(2+\beta_{i+1})t],\quad c=2\beta_i[2-(2+\beta_{i+1})t],$$

$$b_1=\lambda_i(4-\beta_{i+1})+\big[\beta_{i+1}(2+\lambda_i)-2\lambda_i(2+\beta_{i+1})\big]t,\ c_1=-(4-\lambda_i\beta_{i+1})t.$$

Исследование показывает, что

$az^2+bz+c\ge 0$ на $[0,t_*]$,

$(az^2+b_1z+c_1)(z-1)\ge 0$ на $[t^*,1]$,

где

$$t^*=\frac{\lambda_i}{2+\lambda_i},\quad t_*=\frac{2}{2+\beta_{i+1}},\quad 0\le t^*<t_*\le 1.$$

Вычисляя в (14) интегралы и учитывая (4), из (13) получим

$$|S''(x)-f''(x)|\le\varphi(\nu,\theta,t)H^2\|f^{IV}\|_\infty,\quad t\in[t^*,t_*], \tag{15}$$

где $\varphi(\nu,\theta,t)=At^2+Bt+C,\quad A=-\nu^2/2,$

$$B=3\left[2\theta(1-\nu)+5\nu-\theta^3(2+3\nu)+2\nu^2(4\theta+5\nu+3\theta\nu+3\nu^2)\right]/\mathcal{D}\ ,$$

$$C=\left[4\theta(1+\nu)-5\nu+6\theta^3(1+\nu)-3\nu^3(2+\nu)\right]/\mathcal{D}\ ,$$

$$\mathcal{D}=12\left[4(\nu+\theta)(1+\nu)-\nu^2\right],\ \nu=\frac{h_i}{h_{i-1}}\ ,\ \theta=\frac{h_{i-1}}{h_{i+1}}\ .$$

Оценим $\varphi(\nu,\theta,t)$ при $t\in[t^*,t_*]$. Оно оценивается по-разному в зависимости от соотношения шагов h_{i-1}, h_i, h_{i+1}. Имеются 4 возможности:

а) $h_i\geq h_{i-1},\ h_i\geq h_{i+1}$; б) $h_{i-1}\leq h_i\leq h_{i+1}$;

в) $h_{i+1}\leq h_i\leq h_{i-1}$; г) $h_i\leq h_{i-1}$, $h_i\leq h_{i+1}$.

Рассмотрим случай "г". Очевидно, либо $h_i\leq h_{i-1}\leq h_{i+1}$, либо $h_i\leq h_{i+1}\leq h_{i-1}$. Исследование проводится аналогично для обоих вариантов. Поэтому мы ограничимся рассмотрением одного из них.

Пусть $h_i\leq h_{i-1}\leq h_{i+1}$, т.е. $0\leq\nu\leq\theta\leq 1$. . Учитывая, что $\theta^3\leq\theta$, имеем

$$\varphi(\nu,\theta,\tfrac{1}{3})\leq\psi(\nu,\theta)=\frac{\nu^2(10\theta\nu+3\nu^2+4\nu+16\theta)+15\theta(2+\nu)}{3\mathcal{D}}\ .$$

Легко проверить, что $\psi(\nu,\theta)\leq\psi(\nu,1)$ для всех $0\leq\theta\leq 1$. Рассмотрим такие значения ν, чтобы выполнялось условие $\psi(\nu,1)\leq\frac{1}{6}$, которое эквивалентно неравенству $3\nu^4+14\nu^3-2\nu^2-33\nu+6\leq 0$. Пусть ν^* - корень уравнения $3\nu^4+14\nu^3-2\nu^2-33\nu+6=0$, лежащий на $[0,1]$. Можно показать, что такой корень единственнен. Тогда ясно, что

$$\varphi(\nu,\theta,\tfrac{1}{3})\leq\psi(\nu,\theta)\leq\psi(\nu,1)\leq\frac{1}{6} \qquad (16)$$

при всех ν, удовлетворяющих неравенству $\nu^*\leq\nu\leq 1$. Точно так же можно показать, что

$$\varphi(\nu,\theta,\tfrac{2}{3})\leq\frac{1}{6} \qquad \text{при} \quad \nu^*\leq\nu\leq 1. \qquad (17)$$

Аналогичным образом неравенства (16), (17) выводятся в случаях "а", "б", "в", причем здесь ν и θ могут быть произвольными. Теперь, используя (16), (17), из (15) получаем

$$\left|S''(x_i+\alpha_j h_i)-f''(x_i+\alpha_j h_i)\right|\leq\frac{H^2}{6}\left|f^{IV}\right|_\infty\ ,$$

$$j=1,2\ ,\quad \alpha_1=\frac{1}{3}\ ,\quad \alpha_2=\frac{2}{3} \quad \text{при всех} \quad \nu^*\leq\nu\leq 1.$$

Тогда, по леммам 2,3 (неравенства (9), (I0)), получаем

$$|S''(x)-f''(x)| \le \frac{13H^2}{72}\|f^{IV}\|_\infty \quad \text{при} \quad \nu^* \le \nu \le 1. \qquad (18)$$

Пусть $\nu \le \nu^*$. Нетрудно проверить, что $\nu^* < 1/3$. В этом случае воспользуемся тождеством

$$S''(x)-f''(x)=(1-t)M_i + tM_{i+1} - f''(x),$$

из которого следует, что

$$|S''(x)-f''(x)| \le \|M-f''\| + \frac{h_i^2}{8}\|f^{IV}\|_\infty = \|M-f''\| + h_{i+1}^2\frac{\nu^2}{8}\|f^{IV}\|_\infty \le$$

$$\le \left(\frac{1}{6}+\frac{\nu^2}{8}\right)H^2\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{13}{72}H^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad 0 \le \nu \le \nu^*.$$

Объединяя этот результат с (I8), приходим к (II).

Для равномерной сетки $t^* = 1/5$, $t_* = 4/5$. Простое вычисление дает

$$\varphi\left(\frac{1}{5}\right) = \varphi\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{17h^2}{150}.$$

Тогда, по лемме 3, для $t \in [1/5, 4/5]$

$$|S''(x_i+th)-f''(x_i+th)| \le \frac{19h^2}{120}\|f^{IV}\|_\infty,$$

а по лемме 2, $|S''(x_i+th)-f''(x_i+th)| \le \frac{h^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty$ при всех t, удовлетворяющих условиям $0 \le t \le 1/5$, $4/5 \le t \le 1$. Тем самым доказано (I2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W_\infty^4[a,b]$ и удовлетворяет одному из краевых условий I-3. Тогда

$$\|S'''(x)-f'''(x)\|_C \le \frac{H}{6}\max\{5, 3\beta^{-1}+2\beta\}\|f^{IV}\|_\infty. \qquad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство (4), имеем

$$|S'''(x)-f'''(x)| = |(M_{i+1}-M_i)/h_i - f'''(x)| \le$$

$$\le |(M_{i+1}-M_i)/h_i - (f''_{i+1}-f''_i)/h_i| + |f'''(x)-(f''_{i+1}-f''_i)/h_i| \le$$

$$< \frac{2\|M-f''\|}{h_i} + \frac{h_i}{2}\|f^{IV}\|_\infty < \frac{H}{6}\left(\frac{3h_i}{H} + \frac{2H}{h_i}\right)\|f^{IV}\|_\infty .$$

Отсюда вытекает (I9).

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность В.Л. Мирошниченко за постановку задачи и неоднократные обсуждения результатов.

Литература

1. HALL C.A., MEYER W.W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation.–J.Approximation Theory,1976,v.16, N 2,p.105–125.

2. SCHULTZ M.H. Spline analysis. Prentice-Hall,Inc.Englewood cliffs.–N.Y.,1973. – 156 p.

3. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 ноября 1979 года