МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 81

УДК 517.5

# ВЕРХНИЕ ГРАНИ УКЛОНЕНИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

А.А. Сазонов

Пусть $W^{\ell}L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty, \ell=1,2,\ldots)$ - класс функций $f$, определенных на всей оси, у которых $f^{(\ell-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(\ell)}\|_{L_p}\leqslant 1$ (вместо $\|\cdot\|_{L_p}$ будем писать в дальнейшем $\|\cdot\|_p$); $\widetilde{W}^{\ell}_{\alpha}L_{\infty}$ - множество периодических функций из $W^{\ell}L_{\infty}$ с периодом $\alpha$; $W^{k}H^{\omega}$ - класс функций $f$, у которых модуль непрерывности $k$-й производной не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, а $\widetilde{W}^{k}_{\alpha}H^{\omega}$ - подмножество множества $W^{k}H^{\omega}$, состоящее из функций периода $\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([1]). Функцию $S_r(x,f)$ называют интерполяционным сплайном степени $r$ для функции $f(x)$ на равномерной сетке $\Delta=\{kh\}$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$, если:

1) $S_r^{(r-1)}(x,f)$ непрерывна на $(-\infty,\infty)$;

2) $S_r^{(r)}(x,f)=Z_k$ при $kh+\left[\frac{r+1}{2}\right]-\frac{r+1}{2}<x\leqslant(k+1)h+\left[\frac{r+1}{2}\right]-\frac{r+1}{2}$

($Z_k$ - некоторое число, $[\alpha]$ обозначает целую часть числа $\alpha$);

3) $S_r(kh,f)=f(kh)$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$.

Из определения видно, что сплайн не зависит от значений функции $f(x)$ между узлами $kh$, $k=0,\pm 1,\ldots$. Таким образом, если заданы шаг $h$ и набор чисел $F=\{F_k\}$, то интерполяционный сплайн $S_r(x,F)$, для которого $S_r(kh,F)=F_k$, определяется, как и выше.

Сплайнов, интерполирующих функцию $f(x)$ в узлах сетки $\Delta$, бесконечно много, однако из работы Ю.Н. Субботина [2] следует, что если $\|\Delta_h^r f(kh)\|=\sup\limits_k|\Delta_h^r f(kh)|<\infty$, то существует единственный интерполяционный сплайн с ограниченной $r$-й производной, и если $\|\Delta_h^{r+1}f(kh)\|<\infty$, то существует единственный интерполяционный сплайн $S_r(x,f)$ степени $r$, имеющий ограниченные скачки $r$-й производной, т.е.

$$|z_{k+1}-z_k| = \sup_k |z_{k+1}-z_k| < \infty . \qquad (1)$$

В данной работе рассматриваются только функции, удовлетворяющие условию $|\Delta_h^{r+1} f(kh)| < \infty$, и интерполяционные сплайны, определяемые условием (I). Периодические сплайны на равномерной сетке, рассмотренные, например, в [3], являются частным случаем сплайнов $S_r(x,f)$. Если надо подчеркнуть, что сплайн периодический, то вместо $S_r(x,f)$ будем писать $\widetilde{S}_r(x,f)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{r,k}(x) = \sup_{f\in W^k H^\omega} |f(x) - S_r(x,f)| ;$$

$$\mathcal{E}_{r,k,a}(x) = \sup_{f\in W_a^k H^\omega} |f(x) - \widetilde{S}_r(x,f)| \quad (0\le k\le r;\ r=1,2,\dots);$$

$$(E_{l,r,i,p})_{L_q} = \sup_{f\in W^l L_p} \|f^{(i)}(x) - S_r^{(i)}(x,f)\|_q \quad (0\le i\le l;\ r=1,2,\dots).$$

Приближение функций и их производных сплайнами $S_r(x,f)$ на равномерной сетке рассматривалось в работах многих авторов, особенно подробно изучалось приближение периодических функций. Один из первых точных результатов принадлежит В.М. Тихомирову [4]. Приведем следующие равенства А.А. Женсыкбаева [5]-[6], которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть функция $f(x)$ 1-периодическая и периодический сплайн $\widetilde{S}_r(x,f)$ степени $r$ интерполирует ее в узлах $\left\{\frac{i}{n} + [1+(-1)^r]/4n\right\}_{i=0}^{i=n}$, $n = 1,2,\dots$ Будем обозначать его через $\widetilde{S}_{r,n}(x,f)$. Тогда при $n=2k$ имеем

$$\sup_{f\in \widetilde{W}_1^{r+1} L_\infty} |f(x) - \widetilde{S}_{r,n}(x,f)| = |\varphi_{\frac{1}{n},r+1}(x)| , \qquad (2)$$

где

$$\varphi_{h,\nu}(x) = \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2i+1)\pi}{h} x - \frac{\pi}{2}\nu\right]}{(2i+1)^{\nu+1}} \right\} \frac{h^\nu}{\pi^\nu} .$$

Если $\omega(\delta)$ - выпуклый модуль непрерывности, то

$$\sup_{f\in \widetilde{W}_1^{\circ} H^{\omega}} \| f(x)-\widetilde{S}_{r,n}(x,f)\|_C = \omega\left(\frac{1}{2n}\right)+\omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\|\mathcal{L}_{r,n}\|_C-1}{2}, \qquad (3)$$

а на пространстве непрерывных I-периодических функций при $n=2k$ имеет место соотношение

$$\sup \frac{\| f(x)-\widetilde{S}_{r,n}(x,f)\|_C}{\omega\left(f,\frac{1}{2n}\right)} = \|\mathcal{L}_{r\,n}\|_C+\frac{1}{2}, \qquad (4)$$

где $\|\mathcal{L}_{r,n}\|_C=\sup\limits_{\|f\|_C\le 1}\|\widetilde{S}_{r,n}(x,f)\|_C$ - константа Лебега.

В настоящей работе рассматривается приближение функций, заданных на всей оси, и их производных интерполяционными сплайнами на равномерной сетке. Для некоторых классов функций получены точные значения верхних граней уклонений.

Пусть $L_{r,k}(x)$ - фундаментальный сплайн степени $r$, т.е. сплайн определяемый условиями:

$$L_{r,k}(mh)=\begin{cases}1, & m=k,\\ 0, & m\ne k,\end{cases} \qquad m=0,\pm 1,\ldots .$$

Произвольный сплайн $S_r(x,f)$ можно представить в виде

$$S_r(x;f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)L_{r,k}(x). \qquad (5)$$

Без потери общности будем считать $h=1$. Отметим некоторые известные свойства фундаментальных сплайнов [7,8]:

$$L_{r,k}(x)=L_{r,0}(x-k)\overset{def}{=}L_r(x), \qquad L_r(x)=L_r(-x),$$

$|L_r(x)|$ стремится к нулю экспоненциально при $|x|\to\infty$. Отсюда следует, что экспоненциально

$$|L_r^{(i)}(x)|\to 0 \text{ при } |x|\to\infty \quad (0\le i\le r). \qquad (6)$$

$$\operatorname{sign} L_r(x-k)=\begin{cases}(-1)^{k+1}, & k=1,2,\ldots,\\ (-1)^k, & k=0,-1,\ldots,\end{cases} \qquad 0<x<1. \qquad (7)$$

Положим

$$\beta=\frac{1+(-1)^r}{4}, \quad u_+^s=\begin{cases}u^s, & u>0,\\ 0, & u\le 0,\end{cases} \qquad s=0,1,2,\ldots$$

Пусть задан конечный набор чисел $f^N=\{f_M, f_{M+1}, \dots, f_{M+N}\}$, такой, что $f_M=f_{M+N}$. Будем говорить, что он задает на отрезке $[M-\beta, M+N-\beta]$ периодический сплайн $\widetilde{S}_r(x,f)$ периода $N$, который определяется условиями $\widetilde{S}_r(M+k, f^N)=f_{M+k}$ ($k = 0, 1, \dots N$). Аналогично, если имеется последовательность чисел $f=\{f_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$ такая, что $\|\Delta^{r+1} f_k\| < \infty$, то мы будем говорить, что она задает сплайн $S_r(x,f)$, определяемый условиями $S_r(k,f)=f_k$, $k=0, \pm 1, \dots$ .

ЛЕММА I. Пусть задан набор чисел, причем $\|\Delta^{r+1} f_k\| < \infty$. Рассмотрим последовательность наборов $f^N=\{f_{-[\frac{N}{2}]}, f_{-[\frac{N}{2}]+1}, \dots, f_{[\frac{N-1}{2}]}, f_{[\frac{N}{2}]}\}$ и последовательность периодических сплайнов $S_r(x,f^N)$, определенных этими наборами. Тогда $\widetilde{S}_r(x,f^N)$ равномерно сходится к $S_r(x,f)$ на любом конечном промежутке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая $S_r(x,f)$ и $\widetilde{S}_r(x,f^N)$ в виде (5) и учитывая (6), получаем, что $S_r(x,f) - \widetilde{S}_r(x,f^N) \to 0$ при $N \to \infty$, причем, очевидно, сходимость равномерная на всяком конечном промежутке.

ТЕОРЕМА I. Для любого $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathcal{E}_{r,k}(x) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_{r,k,N}(x), \qquad 0 \le k \le r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in W^k H^\omega$. Зафиксируем $x=\bar{x}$, и пусть для определенности $\bar{x} \in [0,1]$. Так как $W_N^k H^\omega \subset W^k H^\omega$, то $\mathcal{E}_{r,k,N}(\bar{x}) \le \mathcal{E}_{r,k}(\bar{x})$. С другой стороны, можно считать [9, с.306], что найдется функция $f_N \in \widetilde{W}_N^k H^\omega$, такая, что $f_N(x) = f(x)$, $x \in [-\frac{N}{4}, \frac{N}{4}]$. Теперь имеем

$$|f(\bar{x}) - S_r(\bar{x},f)| \le |f_N(\bar{x}) - \widetilde{S}_r(\bar{x},f_N)| + |\widetilde{S}_r(\bar{x},f_N) - S_r(\bar{x},f)| \le \mathcal{E}_{r,k,N}(\bar{x}) + \varepsilon_N,$$

где $\varepsilon_N = |\widetilde{S}_r(\bar{x},f_N) - S_r(\bar{x},f)|$. Итак, $\mathcal{E}_{r,k,N}(\bar{x}) \le \mathcal{E}_{r,k}(\bar{x}) \le \mathcal{E}_{r,k,N}(\bar{x}) + \varepsilon_N$. Отсюда и из леммы I вытекает теорема I. Учитывая (2), получаем

СЛЕДСТВИЕ I (см. [7]). Имеет место равенство

$$\sup_{f\in W^{r+1}L_\infty} |f(x) - S_r(x,f)| = |\varphi_{h,r+1}(x)|.$$

В частности,

$$\sup_{f\in W^{r+1}L_\infty}\|f(x)-S_r(x,f)\|_C=\frac{K_{r+1}}{\pi^{r+1}}h^{r+1},$$

где $K_i=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(i+1)}}{(2m+1)^{i+1}}$ - константа Фавара.

В обоих случаях равенство достигается при $f(x)=\varphi_{h,r+1}(x)$.

Пусть $\|\mathcal{L}_r\|_C=\sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_r'(x,f)\|_C$ - константа Лебега. В работах [10, 11] показано, что

$$\|\mathcal{L}_r\|_C=\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{L}_{r,n}\|_C=\frac{2}{\pi}\ln(r+1)+\frac{2}{\pi}\left(2\ln\frac{4}{\pi}+\gamma\right)+O(1),$$

где $\gamma$ - постоянная Эйлера. Отсюда с учетом (3) и (4) получаются соответственно

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\omega(\delta)$ - выпуклый модуль непрерывности, то

$$\sup_{f\in W^0H^\omega}\|f(x)-S_r(x,f)\|_C=\omega\left(\frac{h}{2}\right)+\omega(h)\cdot\frac{\|\mathcal{L}_r\|_C-1}{2},$$

в частности, если $\omega(\delta)=\delta$, то

$$\sup_{f\in W^1L_\infty}\|f(x)-S_r(x,f)\|_C=\frac{\|\mathcal{L}_r\|_C}{2}h.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. На множестве равномерно непрерывных функций справедливо соотношение

$$\sup\frac{\|f(x)-S_r(x,f)\|_C}{\omega\left(f,\frac{h}{2}\right)}=\|\mathcal{L}_r\|_C+\frac{1}{2}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $f\in W^lL_p\ (1\le p\le\infty;\ 1\le l\le r+1)$ и $S_r(x,f)$ - ее интерполяционный сплайн на сетке $\Delta$. Тогда

$$f(x)-S_r(x,f)=(-1)^{r-l+1}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(l)}(t+\beta)\frac{\partial^{r-l+1}K_r(x,t)}{\partial t^{r-l+1}}\,dt, \tag{8}$$

где

$$K_r(x,t)=\frac{1}{r!}\left[(x-t-\beta)_+^r-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k-t-\beta)_+^r L_{r,k}(x)\right]. \tag{9}$$

При этом для ядра $K_r(x,t)$ имеют место соотношения

$$K_r(x,t)=\frac{1}{r!}\left[(x-t-\beta)_+^r-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-k-\beta)_+^r L_{r,k}(t)\right], \tag{10}$$

$$K_r(x,t)=(-1)^{r+1}K_r(t+2\beta,x). \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = 1$ и, для определенности, $x\in[0,1]$, $M\geq N\geq 0$ - некоторые числа. По формуле Тейлора, имеем

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{f^{(i)}(-N)}{i!}(x+N)^i+\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{-N}^{x}f^{(\ell)}(t)(x-t)^{\ell-1}dt. \tag{12}$$

Учитывая, что оператор интерполирования линеен, из (2) и (12) получаем

$$S_r(x,f)=\sum_{i=0}^{\ell-1}\frac{f^{(i)}(-N)}{i!}(x+N)^i+$$

$$+\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{-N}^{M}f^{(\ell)}(t)\sum_{k=-N}^{M}(k-t)_+^{\ell-1}L_{r,k}(x)dt+\varepsilon_M(x)+\underline{\varepsilon}_N(x), \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_M(x)=\sum_{k=M+1}^{\infty}\left[\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{-N}^{k}f^{(\ell)}(t)(k-t)^{\ell-1}dt\right]L_{r,k}(x),$$

$$\underline{\varepsilon}_N(x)=\sum_{k=-\infty}^{-(N+1)}\left[\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{-N}^{k}f^{(\ell)}(t)(k-t)^{\ell-1}dt\right].$$

Из (6) следует, что

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon_M(x)=\lim_{N\to\infty}\underline{\varepsilon}_N(x)=0,$$

причем сходимость равномерная на всяком конечном промежутке. Отсюда и из (12) и (13) получим

$$f(x)-S_r(x,f)=\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(\ell)}(t)\left[(x-t)_+^{\ell-1}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k-t)_+^{\ell-1}L_{r,k}(x)\right]dt.$$

Заменяя в интеграле переменную и учитывая (9), получаем (8). Рассмотрим (9) при $t=i$ ($i = 0, \pm 1, \ldots$). Функция $(x-i-\beta)_+^r$, как функция от $x$, есть сплайн на сетке $\Delta$ и, в силу единственности интерполяционного сплайна $K_r(x,i)=0$ ( $i = 0, \pm 1, \ldots$ ). Поэтому функция

$$\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k-t-\beta)_+^r L_{r,k}(x)$$

при фиксированном $x$ есть интерполяционный сплайн по $t$ для функции $(x-t-\beta)_+^r$. С другой стороны,

$$\psi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-k-\beta)_+^r L_{r,k}(t).$$

Отсюда получаем (10). Из (6) и (10) следует, что при фиксированном $x$ функция $\left|\frac{\partial^{r-l+1} K_r(x,t)}{\partial t^{r-l+1}}\right|$ экспоненциально убывает при $|t|\to\infty$.

Докажем (11). Учитывая представления (9), (10) и единственность интерполяционного сплайна, получаем

$$K_r(x,t)-(-1)^{r+1}K_r(t+2\beta,x)=\frac{1}{r!}\Big\{\Big[(x-t-\beta)_+^r-(-1)^{r+1}(t-x+\beta)_+^r\Big]-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[(x-k-\beta)_+^r-(-1)^{r+1}(k-x+\beta)_+^r\Big]L_{r,k}(t)\Big\}\equiv 0,$$

так как $(x-t-\beta)_+^r-(-1)^{r+1}(t-x+\beta)_+^r=(t-x+\beta)^r$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. При $x\in(0,1)$, $t\in(i,i+1)$ справедливо

$$\operatorname{sign} K_r(x,t)=(-1)^i \quad (i=0,\pm1,\ldots).$$

Действительно, из (8) имеем

$$\sup_{f\in W^{r+1}L_\infty}|f(x)-S_r(x,f)|=\int_{-\infty}^{\infty}|K_r(x,t)|\,dt.$$

С другой стороны, в силу следствия 1, функция $\varphi_{1,r+1}(x)$ экстремальная, и известно [9, с. 89], что

$$\operatorname{sign}\varphi_{1,r+1}^{(r+1)}(t+\beta)=(-1)^i,\quad t\in(i,i+1)\quad(i=0,\pm1,\ldots).$$

Пусть $f\in W^{r+1}L_p$ $(1\le p\le\infty)$. Из (8) с учетом (10) получим

$$f^{(r)}(x)-S_r^{(r)}(x,f)=\int_{-\infty}^{\infty}f^{(r+1)}(t+\beta)\,Q_r(x,t)\,dt, \tag{14}$$

$$Q_r(x,t)=(x-t-\beta)_+^0-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-k-\beta)_+^0 L_{r,k}(t).$$

ЛЕММА 3. Пусть $x\in(\beta,\beta+1)$. Тогда

$$\operatorname{sign} Q_r(x,t)=\begin{cases}(-1)^i, & t\in(i,i+1) \quad (i=-1,-2,\ldots);\\ 1, & t\in(0,x-\beta);\\ -1, & t\in[x-\beta,1);\\ (-1)^{i+1}, & t\in(i,i+1) \quad (i=1,2,\ldots).\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} L_{r,k}(t)\equiv 1,$$

можно записать

$$Q_r(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} L_{r,k}(t), & t\in(-\infty,x-\beta);\\ 0, & t\in[x-\beta,\infty).\end{cases}$$

Отсюда для $Q_r(x,t)$ имеем представление

$$Q_r(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} L_{r,k}(t), & t\in(-\infty,x-\beta);\\ -\sum\limits_{k=-\infty}^{0} L_{r,k}(t), & t\in[x-\beta,\infty).\end{cases} \tag{15}$$

Докажем неравенство

$$|L_r(x)|\geq|L_r(x+1)|,\quad x\geq 0. \tag{16}$$

Пусть $\tilde{L}_{r,N}(x)$ - фундаментальный периодический сплайн с периодом $N$, т.е.

$$\tilde{L}_{r,N}(\ell)=\begin{cases}1, & \ell\equiv \bmod N,\\ 0, & \ell\not\equiv \bmod N,\end{cases}\qquad \ell=0\pm1,\ldots$$

Известно [6], что $|\tilde{L}_{r,N}(x)|\geq|\tilde{L}_{r,N}(x+1)|$ для $0\leq x\leq[(N+1)/2]$. Отсюда и из леммы I следует (I6). Для завершения доказательства леммы воспользуемся соотношениями (7), (I5), (I6).

ТЕОРЕМА 2. Справедливо равенство

$$(E_{r+1,r,r,p})_c=C_{r,p}(\beta+1)h^{1/p'}\quad(1\leq p\leq\infty),$$

где

$$C_{r,p}(x)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Q_r(x,t)|^{p'}dt\right)^{1/p'},\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h=1$, $x\in(\beta,\beta+1]$. Применив в (I4) неравенство Гёльдера, найдем, что

$$\sup_{f\in W^{r+1}L_p}|f^{(r)}(x)-S_r^{(r)}(x,f)|\le G_{r,p}(x),$$

и легко видеть, что на самом деле здесь имеет место знак равенства. Найдем $\sup\limits_{x\in(\beta,\beta+1]} G_{r,p}(x)$. Пусть $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} L_{r,k}(t)$. Тогда, очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_{r,k}(t)=\sum_{k=-\infty}^{0} L_{r,k}(1-t), \qquad t\in[0,1]. \tag{I7}$$

Известно (см. [6]), что периодический сплайн $\tilde{S}_r(x,\varphi^N)$ имеет на периоде не более $2[N/2]$ перемен знака. Отсюда и из леммы I следует, что функция $\varphi(t)$ возрастет от 0 до 1 на отрезке [0,I]. Поэтому из соотношений (I5) - (I7) получаем

$$\sup_{x\in(\beta,\beta+1)} G_{r,p}(x)-G_{r,p}(\beta+1)=\lim_{x\to\beta} G_{r,p}(x). \tag{I8}$$

Теорема при $h=1$ доказана. Общий случай сводится к предыдущему заменой независимой переменной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Имеет место соотношение

$$(E_{r+1,r,r,\infty})_C=\frac{1}{2}\sup_{f\in W^{r+1}L_\infty}\|Z_{k+1}-Z_k\|=\frac{1}{2}\|L_r(x)\|_1 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $f^*$ так, что

$$f^{*(r+1)}(t+\beta)=\begin{cases}(-1)^{k+1}, & t\in(k,k+1], \quad k=1,2,\dots;\\ (-1)^k, & t\in(k,k+1], \quad k=0,-1,\dots\end{cases}$$

Из леммы 3 и из (I8) имеем

$$\begin{cases}f^{*(r)}(1+\beta+0)-Z^*_{1+2\beta}=-(E_{r+1,r,r,\infty})_C;\\ f^{*(r)}(1+\beta)-Z^*_{2\beta}=(E_{r+1,r,r,\infty})_C.\end{cases}$$

С учетом непрерывности $f^{*(r)}(x)$ получаем

$$(E_{r+1,r,r,\infty})_C=\frac{1}{2}(Z^*_{1+2\beta}-Z^*_{2\beta}), \tag{19}$$

при этом в силу (I4) имеем представление

$$z_{i+1}-z_i=-\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r+1)}(t+\beta)L_{r,i}(t)dt,$$

Отсюда и из соотношения (7), определения функции $f^*(x)$ и (I9) получаем требуемые равенства.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [8] показано, что $\|L_r(x)\|_1=\frac{4}{\pi}\ln(r+1)+C+O(1)$, причем выписано точное значение константы $C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $1\le p\le q\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $1\le l\le r+1$, $0\le i\le l-1$. Тогда

$$(E_{l,r,i,p})_{L_q}=(E_{r-i+1,r,r-l+1,q'})_{L_{p'}}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(x)\in L_p$. Известно [I2, с. 30I], что

$$\|\varphi(x)\|_p=\sup_{\|g\|_{p'}\le 1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)g(x)dx. \qquad (20)$$

Обозначим $g(t)=f^{(l)}(t+\beta)$. Учитывая (8), (II), (20) и свойство инвариантности нормы относительно сдвига, будем иметь

$$(E_{l,r,i,p})_{L_q}=\sup_{f\in W^lL_p}\|f^{(i)}(x)-S_r^{(i)}(x,f)\|_q=$$

$$=\sup_{f\in W^lL_p}\ \sup_{\|\varphi\|_{q'}\le 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f^{(i)}(x)-S_r^{(i)}(x,f)\right]\varphi(x)dx=$$

$$=\sup_{\|g\|_p\le 1}\ \sup_{\|\varphi\|_{q'}\le 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\frac{\partial^{r-l+1+i}K_r(x,t)}{\partial t^{r-l+1}\partial x^i}dt\right]\varphi(x)dx=$$

$$=\sup_{\|\varphi\|_{q'}\le 1}\ \sup_{\|g\|_p\le 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{\partial^{r-l+1+i}K_r(x,t)}{\partial t^{r-l+1}\partial x^i}dx\right]g(t)dt=$$

$$=\sup_{\varphi\in W^{r-i+1}L_{q'}}\|\varphi^{(r-l+1)}(t)-S_r^{(r-l+1)}(t,\varphi)\|_{p'}=(E_{r-i+1,r,r-l+1,q'})_{L_{p'}},$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $1 \le p \le \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Тогда

$$(E_{r+1,r,r,1})_L = \frac{\|\mathcal{L}_r\|_C}{2} h, \quad (E_{1,r,0,1})_{L_p} = C_{r,p'}(\beta+1)h^{1/p},$$

$$(E_{r+1,r,0,1})_L = \frac{K_{r+1}}{\pi^{r+1}} h^{r+1}. \tag{21}$$

Отметим, что для $2\pi$-периодических функций аналог результата (21) получен Н.П. Корнейчуком [13].

## Литература


1. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Добавления к книге: Дж.Алберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш, Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972.

2. СУББОТИН Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1965, т.78, с.24-42.

3. АЛБЕРГ Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения.- М.: 1972.

4. ТИХОМИРОВ В.М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$.- Мат.сб., 1969, т. 80, с. 290-304.

5. ЖЕНСЫКБАЕВ А.А. Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению.- Мат. заметки, 1973, т. 13, № 6, с. 807-816.

6. ЖЕНСЫКБАЕВ А.А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами $r$-го порядка.- Мат.заметки, 1973, т. 13, № 2, с. 217-228.

7. BOOR C.de, SCHOENBERG I.J. Cardinal interpolation and spline functions VIII. The Budan-Fourier theorem for splines and applications. - In: Approximation Theory. Berlin, Springer, 1976.

8. MARSDEN M.J., RICHARDS F.B., RIEMENSCHNEIDER S.D. Cardinal Spline Interpolation Operators on $l^p$ Data. - Indiana Univ.Math.J., 1975, v.24, N 7, p.677-689.

9. ТИМАН А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. - М.: Физматгиз, 1960.

10. RICHARDS F. The Lebesgue Constants for Cardinal Spline Interpolation.-J.Approxim.Theory, 1975, v.14, N 2, p.83-92.

11. RICHARDS F. Best Bounds for the Uniform Periodic Spline Interpolation Operator.-J.Approximat.Theory, 1973, v.7, N 3, p.302-317.

12. КОРНЕЙЧУК Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

13. KORNEIČUK N.P. Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric on the calsses $W_p^r (1 \le p < \infty)$ of periodic functions.-Ann.Math., 1977, v.3, N 2, p.109-117.



Поступила в ред.-изд.отд.
22 октября 1979 года