МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 81

УДК 517.5

О ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ

В.Н.Габушин, Н.П.Дмитриев

Теорема сравнения, которая была доказана А.Н.Колмогоровым [1] в связи с определением точной константы в известном неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq C\|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n}}\|f^{(n)}\|_\infty^{\frac{k}{n}}, \tag{1}$$

где

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in S}|f(x)|,\ S=(-\infty,\infty),$$

позднее нашла важные приложения в теории приближения, в частности, в теории сплайн-аппроксимаций [2]. Л. Хермандер [3] привел без доказательства более общее, чем (1), неравенство

$$\left\{\frac{T_{k,i}}{\mu_{k,i}}\right\}^{\frac{1}{n-k}} \leq \left\{\frac{M_0(f)-m_0(f)}{M_0(H)-m_0(H)}\right\}^{\frac{1}{n}},\quad i=1,2, \tag{2}$$

где $m_j(f)=\inf\limits_{x\in S} f^{(j)}(x)$, $M_j(f)=\sup\limits_{x\in S} f^{(j)}(x)$, $T_{k,1}=m_k(f)$, $T_{k,2}=M_k(f)$, $\mu_{k,1}=m_k(H)$, $\mu_{k,2}=M_k(H)$, $S=(-\infty,\infty)$, $H=H(x,m(f),M(f))$ - некоторая специально построенная функция. При этом неравенство (2) содержит (1) как частный случай.

В настоящей статье доказывается аналогичное обобщение теоремы сравнения Колмогорова, учитывающее границы сверху и снизу функции f и ее производных. Как следствие получается неравенство (2). Доказательство частично проводится по схеме, подобной схеме Банга доказательства неравенства (1), но с другим способом подсчета нулей старших производных. Доказывается также теорема сравнения для дважды дифференцируемых функций, заданных на отрезке и полупрямой.

Теорема I анонсирована в докладе на конференции [4]. После доклада авторы узнали о доказательстве Н.П.Корнейчука теоремы сравнения Колмогорова, частично совпадающем с изложенным здесь.

Отметим, что § 2 написан вторым автором.

§ I. Хорошо изучены и часто используются в теории приближения так называемые функции Бернулли (см. [2])

$$\mathcal{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}\cos(kx-n\pi/2).$$

Введем функции $\Psi_n(x,m,M)$. Положим при $m=-\infty$, $M>0$

$$\Psi_n(x,m,M)=2M\,\mathcal{D}_n(x),$$

и при $-\infty<m<M$, $M\geq 0$

$$\Psi_n(x,m,M)=\frac{M-m}{\pi}\left[\mathcal{D}_{n+1}\left(x+\frac{\pi m}{M-m}\right)-\mathcal{D}_{n+1}\left(x-\frac{\pi m}{M-m}\right)\right].$$

Отметим, что при $m=-\infty$ функция $\Psi_n(x,m,M)$ есть сплайн степени n дефекта 2, а при $m>-\infty$ - сплайн степени n дефекта I. Эти функции периодические, с периодом 2π, при $n\geq 2$ четны для нечетных индексов n и нечетны для четных индексов n ; на периоде имеют один максимум и один минимум, между экстремумами строго монотонны и имеют только один нуль;

$$\Psi_n(x,m,M)=\begin{cases} M, & \text{если} \quad x\in\left(\dfrac{+\pi m}{M-m}+2\pi i,\ \dfrac{-\pi m}{M-m}+2\pi i\right),\\[2ex] m, & \text{если} \quad x\in\left(\dfrac{-\pi m}{M-m}+2\pi i,\ \dfrac{\pi(2M+|m|)}{M-m}+2\pi i\right).\end{cases}$$

Через $W^n(S)$ обозначается множество функций f, у которых $f^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $T\subset S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Функция

$$\varphi(x)=a\Psi_n(bx+c,m,M)+d \tag{3}$$

называется функцией сравнения для функции $f\in W^n(-\infty,\infty)$ в точке x_0, если

а) $f(x_0)=\varphi(x_0)$, $f'(x_0)\cdot\varphi'(x_0)\geq 0$;

в) $M_0(f)=M_0(\varphi)$, $m_0(f)=m_0(\varphi)$;

с) $M_n(f)=M_n(\varphi)$, $m_n(f)=m_n(\varphi)$.

Отметим, что для любой функции $f\in W^n(-\infty,\infty)$ и любой точки x_0 можно построить функцию сравнения. Действительно, если $ab^n=1$, то

$$m_n(af(bx))=ab^n m_n(f)=m_n(f),\quad M_n(af(bx))=M_n(f),$$

и если при этом

$$a=\left(M_0(f)-m_0(f)\right)\left(M_0(\psi_n)-m_0(\psi_n)\right)^{-1},$$

$$d=M_0(f)-aM_0(\psi_n)=\frac{m_0(f)M_0(\psi_n)-m_0(\psi_n)M_0(f)}{M_0(\psi_n)-m_0(\psi_n)},$$

где $m=m_n(f)$, $M=M_n(f)$, $\psi_n=\psi_n(x,m,M)$, то $\bar\varphi(x)=a\psi_n(bx,m,M)$, $ab^n=1$, удовлетворяет условиям "в" и "с", а выбором параметра c можно добиться, чтобы $\varphi(x)=\bar\varphi(x+c)$ удовлетворяла условию "а", т.е. была функцией сравнения.Из приведенной конструкции и свойств функции ψ_n следует, что если $m_0(f)<f(x_0)<M_0(f)$, то можно построить точно две геометрически различных (т.е. с разными графиками) функции вида (3), удовлетворяющих условиям "в" и "с" и условию $f(x_0)=\varphi(x_0)$, причем у одной из функций производная в точке x_0 отрицательна, а у другой - положительна.Если $m_0(f)=f(x_0)$ или $M_0(f)=f(x_0)$, то функция φ с такими свойствами только одна.

В дальнейшем всегда предполагается, что $M_n(f)<\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция φ вида (3) называется функцией ε - сравнения для функции $f\in W^n(-\infty,\infty)$ в точке x_0, если выполнено условие "а" определения I и

$$M_0(\varphi)>M_0(f),\qquad M_n(\varphi)>M_n(f),$$

$$m_0(\varphi)<m_0(f),\qquad m_n(\varphi)\leqslant m_n(f),$$

причем равенство $m_n(\varphi)=m_n(f)$ допустимо только в случае $m_n(f)=-\infty$.

ЛЕММА I. Если φ есть функция ε-сравнения для $f\in W^n(-\infty,\infty)$, $n\geqslant 2$, в точке x_0, то существует число B, такое что для любого $b\geqslant B$ найдется $2b$-периодическая функция F, которая совпадает с f в некоторой окрестности x_0 и для которой φ также является функцией ε-сравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [5, с.2II; 6, с.227]).Для простоты считаем $x_0=0$. Кроме того, вычитая в случае необходимости константу, можно добиться, что $m_0(f)\le 0$, $M_0(f)>0$. Для любого $\delta>0$ существует финитная, n раз непрерывно дифференцируемая функция v со свойствами: $v(x)=1$ при $|x|\le 1$, $0\le v(x)\le 1$ при $x\in(-\infty,\infty)$, $|v^{(i)}|\le\delta$, $i=1,\dots,n$. Тогда для функции $\bar F=vf$ имеем $\bar F(x)=f(x)$ при $|x|\le 1$, $m_0(\bar F)\ge m_0(f)$, $M_0(f)\ge M_0(\bar F)$

$$\bar F^{(n)}(x)=v(x)\cdot f^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}v^{(i)}(x)f^{(n-i)}(x).$$

Из [7] следует, что $\|f^{(i)}\|_\infty$ ограничены и поэтому при малых δ $m_n(\bar F)\ge m_n(\varphi)$, $M(\bar F)<M_n(\varphi)$. В силу финитности v финитна и $\bar F$, и, очевидно, $\bar F$ можно продолжить периодически с периодом $2b$, где $[-B,B]$ – отрезок, содержащий носитель v, и $b\ge B$ – любое.

При $n=2$ условимся считать $\varphi'(x_0)=0$, если $\varphi(x_0)=M_0(f)=M_0(\varphi)$.

ТЕОРЕМА I. Если φ - функция сравнения или функция ε-сравнения для функций $f\in W^n(-\infty,\infty)$, $n\ge 2$, в точке, x_0, то

$$|f'(x_0)|\le|\varphi'(x_0)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции сравнения видно, что достаточно доказать неравенство $\varphi'(x_0)\ge f'(x_0)$, если $f'(x_0)>0$, и неравенство $\varphi'(x_0)\le f'(x_0)$, если $f'(x_0)<0$. Рассмотрим вначале случай функций ε-сравнения. Функция вида (3) имеет период $\theta=2\pi b^{-1}$. Из леммы I вытекает существование функции F с периодом $T=l\theta$, где l - достаточно большое число, для которой φ также является функцией ε-сравнения. Поэтому достаточно доказать неравенство $|F'(x_0)|\le|\varphi'(x_0)|$. Для определенности считаем $F'(x_0)$, $\varphi'(x_0)\ge 0$. Предположим противное, т.е. $F'(x_0)>\varphi'(x_0)$. Пусть y и z - ближайшие к точке x_0 точки экстремума φ и $g=F-\varphi$. Функция g имеет период T и для любого целого k имеют место неравенства $g(y+k\theta)<0$, $g(z+k\theta)>0$. Так как $g'(x_0)>0$, то на (y,z) функция g имеет не менее трех нулей, на $[z,y+\theta)$ - не менее одного и на каждом из полуинтервалов $[y+i\theta,\ y+(i+1)\theta)$ - не менее двух. Таким образом, на $[y,y+T)$, а в силу периодичности и на каждом полуинтервале $[\xi,\xi+T)$, g имеет не менее $2l+2$ нулей. Выберем в качестве ξ точку разрыва $\varphi^{(n)}(x)$, если $m_n(\varphi)>-\infty$, и точку разрыва $\varphi^{(n-1)}(x)$, если $m_n(\varphi)=-\infty$. Если $m_n(\varphi)>-\infty$, то $g^{(n-1)}$ непрерывна и имеет на $[\xi,\xi+T)$ не менее $2l+2$ нулей и хотя бы на одном из полуинтервалов $z(i)=[\xi+i\theta,\xi+(i+1)\theta)$ - не менее трех нулей. Функция $\varphi^{(n)}$ меняет знак только в одной точке $w \in z(i)$, и поэтому либо на полуинтервале $[\xi+i\theta, \omega)$,либо на полуинтервале $[\omega, \xi+(i+1)\theta)$ будет два нуля X и Y функции $g^{(n-1)}$. Аналогично, если $m_n(\varphi)=-\infty$, то $g^{(n-2)}$ имеет на одном из полуинтервалов $z(i)$ не менее трех нулей, непрерывна на нем, и, следовательно, $g^{(n-1)}$ имеет хотя бы два нуля X и Y. С другой стороны, $g^{(n)}$ не меняет знака на (X,Y) и отлична от нуля. Поэтому

$$g^{(n-1)}(Y)-g^{(n-1)}(X)=\int_X^Y g^{(n)}(t)\,dt \neq 0, \quad g^{(n-1)}(X)\neq g^{(n-1)}(Y).$$

Для функции ε -сравнения теорема доказана.

Если φ есть функция сравнения для f в точке x_0 и $m_0(f)< <f(x_0)< M_0(f)$, то для любого $\mu>1$ функция $\varphi_\mu(x)=\mu\varphi(x)+ +(1-\mu)f(x_0)$, есть функция ε -сравнения для f в точке x_0, причем $|\varphi'_\mu(x_0)|\geq|\varphi'(x_0)|$, $\varphi'_\mu(x_0)\xrightarrow[\mu\to 1]{}\varphi'(x_0)$. Поэтому из уже доказанного для функции ε -сравнения неравенства следует соответствующее неравенство и для функции сравнения. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть заданы числа x_0, y, m_0, M_0, m, M и $-\infty<m_0<M_0<\infty, -\infty\leq m<M<\infty$, $x_0\in(-\infty,\infty)$, $n\geq 2$. Если $f\in W^n(-\infty,\infty)$ и обладает свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &f(x_0)=y,\quad m_0(f)=m_0,\quad M_0(f)=M_0,\\ &m_n(f)=m,\quad M_n(f)=M, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

то

$$A\Psi'_n(z_1,m,M)\leq f'(x_0)\leq A\Psi'_n(z_2,m,M), \tag{5}$$

$$A=(M_0-m_0)^{\alpha}(M_0(\Psi_n)-m_0(\Psi_n))^{-\alpha};\quad \alpha=1-\frac{1}{n},$$

где $z_1, z_2\in[0,2\pi)$ - корни уравнения

$$\Psi_n(z)=\gamma M_0(\Psi_n)+(1-\gamma)m_0(\Psi_n),\quad \gamma=\frac{y-m_0}{M_0-m_0},$$

$$\Psi_n=\Psi_n(z,m,M),$$

причем $\Psi'_n(z_1)<0, \Psi'_n(z_2)\geq 0$. Оценка (5) на всем классе $W^n(-\infty,\infty)$ не улучшаема.

Действительно, если $m_0<y<M_0$, то оценка (5) вытекает из конструкции функции сравнения для f , в частности, из формул для коэффициентов a,b,d функции сравнения и теоремы I. Если $y=m_0$

или $y=M_0$, то $f'(x_0)=0$ и оценка (5) очевидна. Если $m_n(f)>-\infty$ и φ - функция вида (3) со свойствами (4), то для $f=\varphi$ реализуются равенства в оценках (5). Если же $m_n(f)=-\infty$, то функция φ вида (3) не принадлежит $W^n(-\infty,\infty)$ и в этом случае для доказательства неулучшаемости оценок (5) достаточно взять средние по Стеклову функций φ вида (3), удовлетворяющих условию (4), с шагом h, стремящимся к нулю.

Переходя к верхним (нижним) граням в неравенствах (5), получаем неравенство Хермандера при $k=1$. Индукцией по k легко доказывается это неравенство и при произвольном k.

§ 2. Задача получения теорем сравнения для функций, определенных на полупрямой или на отрезке, до сих пор не решена. Однако для функций из $W^2(S)$ она имеет простое решение, которое и приводится ниже. Пусть $S=[0,a]$, причем не исключается и случай $a=\infty$, $i=1,2$, и

$$\varphi(x,\rho_i)=\begin{cases}\mu_i X^2+\rho_i X+y & \text{при} \quad x\le x_0,\\ \nu_i X^2+\rho_i X+y & \text{при} \quad x>x_0,\end{cases} \tag{6}$$

где

$$X=x-x_0, \quad y=f(x_0), \quad \mu_1=\frac{1}{2}M_2(f),$$

$$\nu_1=\frac{1}{2}m_2(f), \quad \mu_2=\nu_1, \quad \nu_2=\mu_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $\varphi(x,\rho_1)$ (соответственно $\varphi(x,\rho_2)$) называется верхней (соответственно нижней) функцией сравнения в точке x_0, если

$$A=\max_{x\in T(i)}\varphi(x,\rho_i)\le M_0(f), \quad B=\min_{x\in R(i)}\varphi(x,\rho_i)\ge m_0(f)$$

и либо $A=M_0(f)$, либо $B=m_0(f)$; при этом $T(1)=R(2)=[x_0,a]$, $T(2)=R(1)=[0,x_0]$.

Геометрически φ есть функция сравнения, если ее график лежит между отрезками с концами $(0,m_0(f))$ и $(a,m_0(f))$, $(0,M_0(f))$ и $(a,M_0(f))$ и обязательно касается хотя бы одного из отрезков.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В отличие от определения I функция сравнения в определении 3 не принадлежит, вообще говоря, классу $W^2(S)$ и в случае $m_2(f)>-\infty$. Однако если ее продолжить константами с сохранением непрерывности вне отрезка (y,z), где y и z - ближайшие к x_0 с разных сторон точки экстремума φ, то в случае $m_2(f)>$

$>-\infty$ полученная функция $\bar\varphi$ уже принадлежит классу $W^2(S)$ и теорема 2 справедлива при замене φ на $\bar\varphi$, причем, очевидно, $\bar\varphi'(x)=\varphi'(x_0)$.

ТЕОРЕМА 2. Если φ - верхняя (соответственно нижняя) функция сравнения в точке x_0 для функции $f\in W^2(S)$, $S=[0,a]$ или $S=[0,\infty)$, то $f'(x_0)\leq\varphi'(x_0)$ (соответственно $f'(x_0)\geq\varphi'(x_0)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ - верхняя функция сравнения. Предположим противное, т.е. $f'(x_0)>\varphi'(x_0)$. Из формулы Тейлора в точке x_0 для функции f следует, что $f(x)<\varphi(x)$ при $x<x_0$, $f(x)>\varphi(x)$ при $x>x_0$ и, стало быть, $m_0(f)<B$, $M_0(f)>A$. Случай нижней функции сравнения аналогичен. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вычислим ρ_i в функции сравнения. Для определенности полагаем $i=1, \mu_1\geq 0$ и φ - верхняя функция сравнения. Найдем наибольшее ρ_1, при котором $\varphi(x,\rho_1)\geq m_0(f)$ для $x\in[0,x_0]$. Если $x_0\geq\sqrt{(y-m_0(f))\mu_1^{-1}}$, то всякая парабола, для которой $\varphi(0,\rho_1)=m_0(f)$, имеет в нуле отрицательную производную и, следовательно, для экстремального ρ_1^* вершина нижней параболы лежит на $(0,x_0)$, и в этом случае

$$\rho_1^*=2\sqrt{(y-m_0(f))\mu_1^{-1}}.$$

Если же $x_0<\sqrt{(y-m_0(f))\mu_1^{-1}}$, то $\varphi(0,\rho_1^*)=m_0(f)$, и

$$\rho_1^*=(\mu_1 x_0^2+y-m_0(f))x_0^{-1}.$$

Если $\nu_1\leq 0$, то аналогичные рассуждения проводятся и на отрезке $[x_0,a]$, и, таким образом, получаем формулу для экстремального ρ_1^{**}:

$$\rho_1^{**}=\begin{cases}\dfrac{|\nu|(a-x_0)^2-y+M_0(f)}{a-x_0} & \text{при} \quad a-x_0<\sqrt{\dfrac{M_0(f)-y}{|\nu|}},\\[2ex] 2\sqrt{|\nu|(M_0(f)-y)} & \text{при} \quad a-x_2\geq\sqrt{\dfrac{M_0(f)-y}{|\nu|}}.\end{cases}$$

Если же $\nu>0$, то $\rho_1^{**}=(|\nu|(a-x_0)^2+M_0(f)-y)(a-x_0)^{-1}$. Ясно, что параметр ρ_1 в функции сравнения определяется формулой $\rho_1=\min(\rho_1^*,\rho_1^{**})$. Все остальные возможные случаи рассматриваются подобным образом.

Литература

1. КОЛМОГОРОВ А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. - Учен. зап. МГУ. 1939, вып. 30, Математика, с. 3-16.

2. КОРНЕЙЧУК Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

3. HORMANDER L. A new proof and generalization of an inequality of Bohr.-Math.Scand.,1954,v.2, N 1,p.33-45.

4. ГАБУШИН В.Н. Неравенства между производными и приближение оператора дифференцирования. - Материалы Пятого советско-чехословацкого совещания по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики.Новосибирск,1978, с. 54-57.

5. МАНДЕЛЬБРОЙТ С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение. - М.: ИЛ, 1955.

6. ДЗЯДЫК В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977.

7. ГАБУШИН В.Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$. - Изв.АН СССР. Сер.мат.,1976,т.40,№4,с.869-892.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июля 1979 года