М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1979 год   Выпуск 81

УДК 518.5

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОБРАТНОГО СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

А. Имамов

Сформулируем рассматриваемую задачу. Пусть задано уравнение $f(x)=0$, где $\xi=f(x)$ - достаточно гладкая функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Требуется найти корень $\bar{x}\in[a,b]$ уравнения $f(x)=0$ с высокой точностью.

Для этой цели обычно используют способ аппроксимации функций $\xi=f(x)$ и $x=F(\xi)$, где $x=F(\xi)$-обратная к $\xi=f(x)$ функция. Главным недостатком методов аппроксимации функции $\xi=f(x)$ (за исключением метода линейной аппроксимации, который имеет лишь второй порядок точности) является то, что они приводят опять к нелинейным приближенным уравнениям. Недостатком метода аппроксимации обратной функции $x=F(\xi)$ является требование существования этой функции. Преимущество методов второй группы заключается в том,что они позволяют написать явный вид приближенного корня.Идея аппроксимации обратной функции $x=F(\xi)$ принадлежит П.Л. Чебышеву (см. [1]), который аппроксимировал функцию $x=F(\xi)$ формулой Тейлора и изложил итерационный метод нахождения корня $\bar{x}=F(0)$ любого порядка точности при условии, что функция $x=F(\xi)$ достаточно гладкая. Другой способ аппроксимации функции $x=F(\xi)$ есть метод обратной интерполяции функции $\xi=f(x)$. Встречающийся на практике метод секущих основан на идее аппроксимации функции $x=F(\xi)$ кусочно-линейной интерполяционной функцией.

В последнее время для интерполяции функций используют сплайны, примером которых являются гладкие кусочно-полиномиальные функции - непосредственные обобщения кусочно-линейных функций.Это связано с тем, что сплайны легко вычисляются на ЭВМ и с их помощью для различных задач можно получать приближенные решения с любой наперед заданной точностью.

В настоящей работе мы изложим метод интерполирования локальными кубическими сплайнами функции $x=F(\xi)$ для нахождения корня $\bar{x}=F(0)$. Это дает нам метод нахождения корня $\bar{x}=F(0)$ от первого по четвертый порядок точности в зависимости от гладкости функции $\xi=f(x)$. Кроме того, этот метод можно использовать для нахождения всех простых корней уравнения $f(x)=0$.

Аналогичную работу мы проделаем для системы из двух уравнений.

I. Приведем необходимые для дальнейшего изложения факты [2]. Для удобства рассмотрим функцию $x=F(\xi)$, определенную на отрезке $[\alpha,\beta]$. Пусть $C^{\rho}[\alpha,\beta]$ - класс функций с ρ -ми непрерывными производными на $[\alpha,\beta]$.

Функция $S_F=S(F;\xi)$ называется локальным кубическим интерполяционным сплайном для функции $x=F(\xi)$ на сетке $\alpha=\xi_0<\xi_1<\dots$ $\dots<\xi_n=\beta$, если на отрезке $\omega_i=[\xi_i,\xi_{i+1}]$ она имеет следующий вид:

$$P_i(F;\xi)=F(\xi_i)\varphi_0(u)+F(\xi_{i+1})\varphi_1(u)+F^{(1)}(\xi_i)g_0(u)+F^{(1)}(\xi_{i+1})g_1(u), \quad (1)$$

где
$$u=u(\xi)=(\xi-\xi_i)/\ell_i, \quad \ell_i=\xi_{i+1}-\xi_i,$$
$$\varphi_0(u)=1-3u^2+2u^3, \quad \varphi_1(u)=3u^2-2u^3,$$
$$g_0(u)=\ell_i(u-2u^2+u^3), \quad g_1(u)=\ell_i(-u^2+u^3).$$

Нетрудно видеть, что
$$F^{(k)}(\xi_j)=P_i^{(k)}(F;\xi_j), \quad k=0,1; \quad j=i,i+1.$$

Если предположить, что $x=F(\xi)\in C^{\rho}[\alpha,\beta]$, то справедливы оценки

$$|F(\xi)-P_i(F;\xi)| \le \begin{cases} K_\rho \ell_i^\rho \omega_\rho(F;\ell_i), & \rho=1,2,3, \\ K_4 \ell_i^4 |F^{(4)}|_{C[\omega_i]}, & \rho=4, \end{cases} \quad (2)$$

где
$$K_1=3/8, \quad K_2=1/32, \quad K_3=1/192, \quad K_4=1/384,$$

$$|F^{(4)}|_{C[\omega_i]}=\max_{\xi\in\omega_i}|F^{(4)}(\xi)|,$$

$$\omega_p(F;\ell_i)=\max_{|\bar\xi_1-\bar\xi_2|\le \ell_i}|F^{(p)}(\bar\xi_1)-F^{(p)}(\bar\xi_2)|,\ \bar\xi_1,\bar\xi_2\in\omega_i .$$

Константы $K_1,\dots,K_4$ являются точными. О них нам любезно сообщил В.Л. Мирошниченко.

Изложим теперь способ приближенного нахождения корня $\bar x = F(0)$ на основе формулы (I). Предположим, что $\xi=f(x)\in C^1[a,b]$, $f^{(1)}(x)\ne 0$, $x\in[a,b]$. Тогда известно, что существует обратная функция $x=F(\xi)\in C^1[\alpha,\beta]$, где $[\alpha,\beta]$ - область значений функции $\xi=f(x)$. На отрезке $[a,b]$ введем сетку $x_i=a+ih$, $i=0,1,\dots,n$, $h=(b-a)/n$. Пусть $\xi_j\,\xi_{j+1}<0$ (если $\xi_j\,\xi_{j+1}=0$, то либо $\bar x=x_j$, либо $\bar x=x_{j+1}$). В качестве $\bar x=F(0)$ примем число $\bar{\bar x} = S(F;0)$, т.е.

$$\bar{\bar x}=P_j(F;0)=x_j\,\varphi_0(u(0))+x_{j+1}(u(0))+\frac{g_0(u(0))}{f^{(1)}(x_j)}+\frac{g_1(u(0))}{f^{(1)}(x_{j+1})}. \quad (3)$$

Формулу (3) мы получили из (I), учитывая определение производной обратной функции.

Отметим, что способ аппроксимации функции $\xi=f(x)$ приводит к необходимости решения кубического уравнения

$$f(x_j)\varphi_0(u)+f(x_{j+1})\varphi_1(u)+f^{(1)}(x_j)g_0(u)+f^{(1)}(x_{j+1})g_1(u)=P_j(f;x)=0,$$

где $u=(x-x_j)/h$, что намного сложнее, чем вычислить $\bar{\bar x}=P_j(F;0)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Пусть $\xi=f(x)\in C^p[a,b]$, $p=1,2,3,4$, $f^{(1)}(x)\ne0, x\in[a,b]$. Тогда справедливы оценки

$$|\bar x-\bar{\bar x}|\le K_p C_p h^p,\quad p=1,2,3,4, \quad (4)$$

где константы C_p зависят только от производных $f^{(1)}(x),\dots,f^{(p)}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из оценок (2), если учесть формулу Лагранжа $\ell_j=|f^{(1)}(t)|h$, $t\in[x_j,x_{j+1}]$ и определение производной обратной функции.

Нетрудно получить оценку и для разности $\bar x-\hat x$, где $\hat x\in[x_j,x_{j+1}]$, $P_j(f;\hat x)=0$. Имеем

$$\Big[\min_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f^{(1)}(x)\Big]|\bar x-\hat x|\le\begin{cases}K_p h^p\omega_p(f;h), & p=1,2,3,\\[2ex] K_4 h^4\,|f^{(4)}|_{C[x_j,x_{j+1}]}\end{cases}$$

Эти оценки вытекают из оценок (2) и равенств

$$P_j(f;\hat{x})-f(\hat{x})=f(\bar{x})-f(\hat{x})=(\bar{x}-\hat{x})f^{(1)}(t).$$

Если имеется еще какой-то корень уравнения $f(x)=0$ в отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, $\xi_k\xi_{k+1}<0$, то можно и его найти, причем справедливы будут оценки (4). Таким образом, изложенный метод не предполагает единственность корня уравнения $f(x)=0$. С помощью его можно найти, в принципе, все решения уравнения $f(x)=0$.

Отметим метод Л.М. Рыбакова, являющийся в настоящее время единственным методом, гарантирующим нахождение всех корней уравнения $f(x)=0$ с заданной точностью [3]. Для этого метода до сих пор не известны оценки типа (4).

Если функция $\xi=f(x)$ принадлежит пространству $C^p[a,b]$, $p>4$, то формула (3) не дает порядка более чем четвертый. В этом случае, используя локальные сплайны более высоких степеней, можно получить методы построения корня $\bar{x}=F(0)$ более высокого порядка точности.

В формуле (3) производные $f^{(1)}(x_j)$ можно заменить подходящими разделенными разностями.

2. Рассмотрим теперь два уравнения

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{array}\right\}$$

действительные корни которых требуется найти с высокой точностью.

Относительно функций $\xi=f(x,y)$, $\eta=g(x,y)$ предположим, что они определены в прямоугольнике $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ и непрерывны там вместе со своими частными производными первого порядка с якобианом

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}(x,y)=\frac{\mathcal{D}(f,g)}{\mathcal{D}(x,y)}=\begin{vmatrix} f^{(1,0)}(x,y) & g^{(1,0)}(x,y) \\ f^{(0,1)}(x,y) & g^{(0,1)}(x,y) \end{vmatrix}\neq 0$$

При этих условиях существуют непрерывно дифференцируемые функции $x=F(\xi,\eta)$, $y=G(\xi,\eta)$, обратные к функциям $\xi=f(x,y)$, $\eta=g(x,y)$, определенные в прямоугольнике $\omega=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$, где $[\alpha,\beta]$ – область значений функции $\xi=f(x,y)$, а $[\gamma,\delta]$ – функции $\eta=g(x,y)$. Если предположить еще, что $f, g\in C^p[\Omega]$, то $F, G\in C^p[\omega]$, $p\geq 1$.

В отличие от одномерного случая мы построим два локальных бикубических интерполяционных сплайна $S_F = S(F;\xi,\eta)$ и $S_G = S(G;\xi,\eta)$ для функций $x = F(\xi,\eta)$ и $y = G(\xi,\eta)$ и в качестве корня $\bar{x} = F(0,0)$, $\bar{y} = G(0,0)$ мы примем $\bar{\bar{x}} = S(F;0,0)$, $\bar{\bar{y}} = S(G;0,0)$.

Пусть прямоугольник $\omega = [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ разделен на ячейки $\omega_{ij} = [\xi_i,\xi_{i+1}]\times[\eta_j,\eta_{j+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$; $j = 0,1,\ldots,m-1$, с помощью одномерных сеток

$$\alpha = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = \beta, \quad \gamma = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_m = \delta .$$

Введем следующие обозначения: $u = u(\xi) = (\xi - \xi_i)/\ell_i$, $\ell_i = \xi_{i+1} - \xi_i$, $v = v(\eta) = (\eta - \eta_j)/\theta_j$, $\theta_j = \eta_{j+1} - \eta_j$, $i = 0,1,\ldots,n-1$; $j = 0,1,\ldots,m-1$,

$$B_F = \begin{bmatrix} F(\xi_i,\eta_j) & F(\xi_i,\eta_{j+1}) & F^{(0,1)}(\xi_i,\eta_j) & F^{(0,1)}(\xi_i,\eta_{j+1}) \\ F(\xi_{i+1},\eta_j) & F(\xi_{i+1},\eta_{j+1}) & F^{(0,1)}(\xi_{i+1},\eta_j) & F^{(0,1)}(\xi_{i+1},\eta_{j+1}) \\ F^{(1,0)}(\xi_i,\eta_j) & F^{(1,0)}(\xi_i,\eta_{j+1}) & F^{(1,1)}(\xi_i,\eta_j) & F^{(1,1)}(\xi_i,\eta_{j+1}) \\ F^{(1,0)}(\xi_{i+1},\eta_j) & F^{(1,0)}(\xi_{i+1},\eta_{j+1}) & F^{(1,1)}(\xi_{i+1},\eta_j) & F^{(1,1)}(\xi_{i+1},\eta_{j+1}) \end{bmatrix}$$

Функции $S_F = S(s(F;\xi);\eta)$ и $s_G = S(s(G;\xi);\eta)$ называются локальными бикубическими интерполяционными сплайнами для функций $x = F(\xi,\eta)$ и $y = G(\xi,\eta)$. Из определения вытекает, что функции s_F, s_G в каждой ячейке $\omega_{ij} = [\xi_i,\xi_{i+1}]\times[\eta_j,\eta_{j+1}]$ представимы в виде

$$P_{ij}(F;\xi,\eta) = [\varphi_0(u),\varphi_1(u),g_0(u),g_1(u)]\times B_F\times[\varphi_0(v),\varphi_1(v),g_0(v),g_1(v)]^*, \tag{5}$$
$$P_{ij}(G;\xi,\eta) = [\varphi_0(u),\varphi_1(u),g_0(u),g_1(u)]\times B_G\times[\varphi_0(v),\varphi_1(v),g_0(v),g_1(v)]^*,$$

где $*$ - означает операцию сопряжения. Если ввести вектор $A(u) = [\varphi_0(u),\varphi_1(u),g_0(u),g_1(u)]$, то ясно, что

$$P_{ij}(F;\xi,\eta) = A(u)B_F[A(v)]^*, \quad P_{ij}(G;\xi,\eta) = A(u)B_G[A(v)]^*.$$

Приведем некоторые оценки точности интерполяции. Методика получения таких оценок подробно изложена в работах [2, 4]. В основе этой методики лежат оценки (2).

Обозначим через $C^{p,q}[\omega]$ класс функций $F(\xi,\eta)$ с непрерывными производными $F^{(i,j)}(\xi,\eta)$, $0 \le i \le p$, $0 \le j \le q$.

Введем обозначения

$$\omega_{p0}(F;\ell_i) = \max_{|\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2| \le \ell_i} \left| F^{(p,0)}(\bar{\xi}_1,\eta) - F^{(p,0)}(\bar{\xi}_2,\eta)\right|, \quad \bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2 \in \omega_i ,$$

$$\omega_{0q}(F;\theta_j)=\max_{|\bar\eta_1-\bar\eta_2|\le\theta_j}\left|F^{(0,q)}(\xi,\bar\eta_1)-F^{(0,q)}(\xi,\bar\eta_2)\right|,\quad \bar\eta_1,\bar\eta_2\in\omega_j\ ,$$

$$\omega_{pq}(F;\ell_i,\theta_j)=\omega_{p0}(F^{(0,q)}(\xi,\bar\eta_1)-F^{(0,q)}(\xi,\bar\eta_2);\ell_i).$$

Тогда если $F(\xi,\eta)\in C^{p,q}[\omega],\ p,q\le 4$, то справедливы оценки, аналогичные (2):

$$|F(\xi,\eta)-P_{ij}(F;\xi,\eta)|<K_p\,\omega_{p0}(F;\ell_i)\ell_i^p+K_q\,\omega_{0q}(F;\theta_j)\theta_j^q+$$

$$+K_pK_q\,\omega_{pq}(F;\ell_i,\theta_j),\qquad p,q\le 3\ ; \tag{6а}$$

$$|F(\xi,\eta)-P_{ij}(F;\xi,\eta)|\le K_4\,\ell_i^4\,\|F^{(4,0)}\|_{C[\omega_{ij}]}+$$

$$+K_4\theta_j^4\|F^{(0,4)}\|_{C[\omega_{ij}]}+K_4^2\ell_i^4\theta_j^4\|F^{(4,4)}\|_{C[\omega_{ij}]},\ p,q=4. \tag{6б}$$

Имеется также оценка для случая, когда $F(\xi,\eta)\in C^4[\omega]$ [2]:

$$|F(\xi,\eta)-P_{ij}(F;\xi,\eta)|\le\frac{\ell_i^4}{384}\|F^{(4,0)}\|_{C[\omega_{ij}]}+$$

$$+\frac{\ell_i^2\theta_j^2}{16}\|F^{(2,2)}\|_{C[\omega_{ij}]}+\frac{\theta_j^4}{384}\|F^{(0,4)}\|_{C[\omega_{ij}]}\ . \tag{6в}$$

Изложим теперь метод нахождения корня $(\bar x,\bar y)$ на основе формул (5). Введем сетку $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$, где $x_i=a+ih,\ y_j=c+j\varkappa$. Допустим, что мы как-то определили, что корень $(\bar x,\bar y)$ лежит в ячейке $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. Тогда в качестве приближения к $(\bar x,\bar y)$ возьмем точку $(\bar{\bar x},\bar{\bar y})$, где

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar x}&=P_{ij}(F;0,0)=A(u(0))B_F[A(v(0))]^*,\\ \bar{\bar y}&=P_{ij}(G;0,0)=A(u(0))B_G[A(v(0))]^*.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

При вычислении матриц B_F, B_G производные от F, G следует заменить производными от f, g по формулам

$$F^{(1,0)}=J^{-1}g^{(0,1)},\qquad F^{(0,1)}=-J^{-1}f^{(1,0)},$$

$$F^{(1,1)}=\mathcal{J}^{-2}\left[\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\eta}g^{(0,1)}-g^{(0,1)}\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{J}\right], \quad G^{(1,0)}=-\mathcal{J}^{-1}g^{(1,0)},$$

$$G^{(1,1)}=-\mathcal{J}^{-2}\left[\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\eta}g^{(1,0)}-g^{(1,0)}\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{J}\right], \quad G^{(0,1)}=\mathcal{J}^{-1}f^{(1,0)},$$

где, в свою очередь,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}g^{(0,1)}=g^{(1,1)}F^{(0,1)}+g^{(0,2)}G^{(0,1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}g^{(1,0)}=g^{(1,0)}F^{(0,1)}+g^{(1,1)}G^{(0,1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{J}=F^{(0,1)}\left[g^{(0,1)}f^{(2,0)}+f^{(1,0)}g^{(1,1)}-g^{(1,0)}f^{(1,1)}-f^{(0,1)}g^{(2,0)}\right]+$$
$$+G^{(0,1)}\left[g^{(0,1)}f^{(1,1)}+f^{(1,0)}g^{(0,2)}-g^{(1,0)}f^{(0,2)}-f^{(0,1)}g^{(1,1)}\right].$$

Используя оценки (6), легко получить оценки для разностей $x-\bar{\bar{x}}, \bar{y}-\bar{\bar{y}}$. Например, приведем без доказательства

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\xi=f(x,y)\in C^4[\Omega]$, $\eta=g(x,y)\in C^4[\Omega]$, $\mathcal{J}(x,y)\neq 0$, $x\in\Omega$. Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\bar{x}-\bar{\bar{x}}| &\le \frac{h^4}{384}C_{10}+\frac{h^2\pi^2}{16}C_{10}C_{01}+\frac{\pi^4}{384}C_{01}, \\ |\bar{y}-\bar{\bar{y}}| &\le \frac{h^4}{384}C_{10}+\frac{h^2\pi^2}{16}C_{10}C_{01}+\frac{\pi^4}{384}C_{01}, \end{aligned} \tag{8}$$

где константы C_{10}, C_{01} зависят только от производных $f^{(1,0)}, f^{(0,1)}$ или $g^{(0,1)}, g^{(1,0)}$.

Литература

1. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений. Т.I, 3-е изд. - М.: Наука, 1966.- 632 с.

2. SCHULTZ M.H. Spline-Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1973.

3. ЗАГУСКИН В.Л. Численные методы решения плохо обусловленных задач. - Ростов-на-Дону, 1976. - 187 с.

4. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976.- 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 октября 1979 года