

УДК 519.652:621.77

О СПЛАЙНАХ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Б.И. Сухих, Р.А. Вайсбурд, И.М. Вернер

Для решения геометрических задач при автоматизированном проектировании технологии горячей штамповки тел вращения и турбинных лопаток можно использовать нелинейные сплайны кусочно-постоянной кривизны – гладкие плоские кривые, составленные из отрезков прямых и дуг окружностей.

Одной из задач, возникающих при построении сплайна, является следующая [3,4]. Построить пару сопрягающихся дуг окружностей C_1 и C_2 так, чтобы C_1 проходила через точку P_1 , касаясь вектора \vec{m}_1 , а C_2 проходила через точку P_2 , касаясь вектора \vec{m}_2 . Такая кривая в [3] названа биарком. На рис. 1 приведен пример биарка ($\theta_1 = 50^\circ$, $\theta_2 = -70^\circ$, $\theta = 10^\circ$).

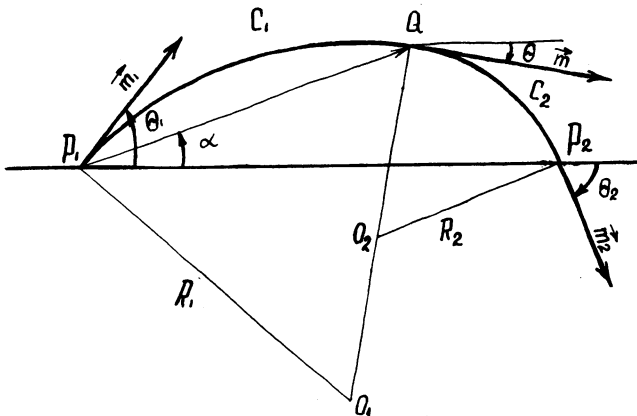


Рис. 1

Эта задача имеет однопараметрическое семейство решений, причем точки Q сопряженных пар дуг C_1 и C_2 лежат на некоторой окружности [4]. В [3] в качестве параметра предложен радиус R_1 дуги C_1 , в [4] - угол α между векторами $\vec{P_1Q}$ и $\vec{P_1P_2}$, а в настоящей работе - угол θ между вектором \vec{m} общей касательной к дугам C_1, C_2 в точке Q и вектором $\vec{P_1P_2}$ (см. рис.1).

Радиусы R_k как функции угла θ выражаются следующим образом:

$$R_k = \frac{P \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\theta - \theta_k}{2}\right)}{2 \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \sin \frac{\theta - \theta_k}{2}}, \quad k=1,2, \quad (I)$$

где $P = |\vec{P_1P_2}|$; $|\theta_1|, |\theta_2|, |\theta| \leq \pi$.

Здесь $R_k < 0$, если центр O_k лежит справа от касательной \vec{m}_k , и $R_k > 0$, если O_k находится слева от \vec{m}_k *).

При интерполяции биарками наибольший интерес представляют значения θ , при которых достигается локальный минимум одной из функций $|R_1 - R_2|$, $|\frac{R_1}{R_2} - 1|$ и $|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}|$ [3]. В [3] приведены результаты исследований лишь для $|R_1 - R_2|$ при $\theta_1 \theta_2 < 0$.

Из формулы (I) следует, что указанные функции имеют следующие локальные минимумы:

$$1) |R_1 - R_2| \quad \text{при } \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \pi \operatorname{sign} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2};$$

$$2) \left| \frac{R_1}{R_2} - 1 \right| \quad \text{при } \theta = 0, \pm \pi;$$

$$3) \left| \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right| \quad \text{при } \theta = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{и} \quad \theta = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \pi \operatorname{sign} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2};$$

На рис. 2 приведены типовые биарки при $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ (биарки 1), $\theta = 0$ (биарки 2) и $\theta = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ (биарки 3).

Биарки, соответствующие $\theta = \pm \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, используются при определении дополнительных узлов, в которых кривизна разрывна

*) Примечание редактора: формула (I) исключает случай $\theta_1 = \theta_2$.

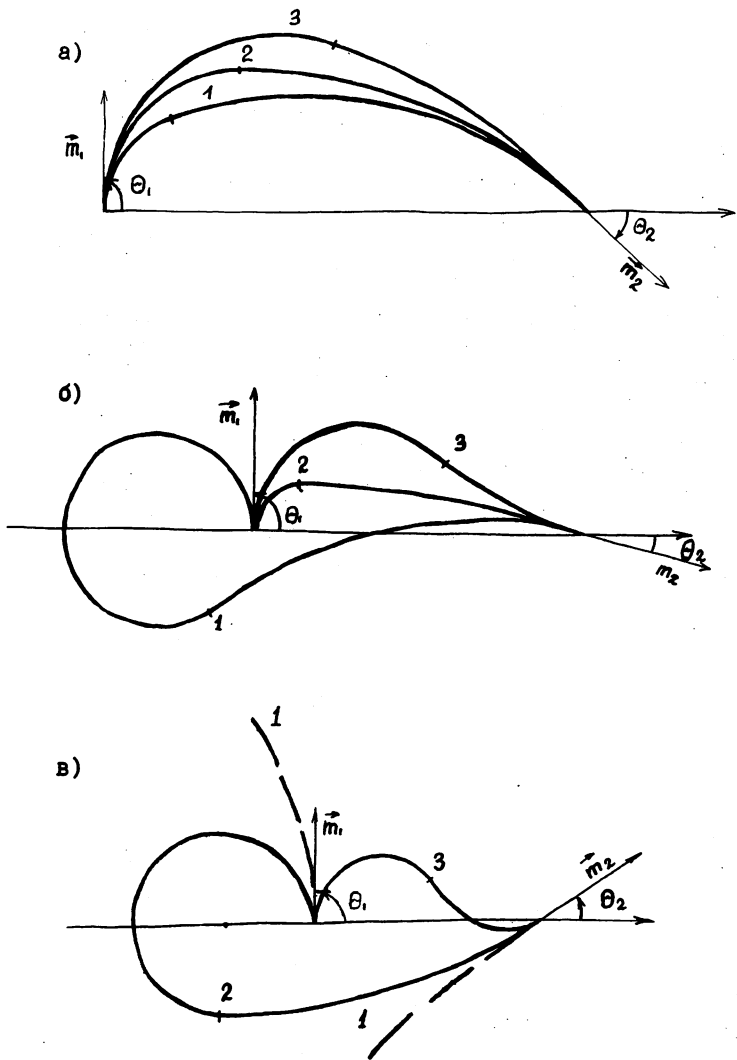


Рис 2. Типовые бмарки.

$$\left(\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) , \text{ или к тому же меняет знак } \left(\theta = -\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right).$$

Для близких точек гладкой кривой с учетом малости углов θ_1 и θ_2 имеем

$$\frac{R_1}{R_2} \approx -\frac{\theta_1 + 3\theta_2}{3\theta_1 + \theta_2} ,$$

где $(\theta_1 + 3\theta_2)(3\theta_1 + \theta_2) > 0$ соответствует точке перегиба.

Биарки при $\theta = 0$ используются для аппроксимации кривой между опорными узлами. В этом случае

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta_2}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}$$

Предложенный метод аппроксимации кривых сплайнами кусочно-постоянной кривизны обладает следующими полезными свойствами:

- он инвариантен относительно движений системы координат;
- с его помощью решается задача рационального выбора узлов сплайна
- он допускает введение ограничений на величину разрывов кривизны сплайна;
- определяет пересечение сплайна с прямой, окружностью или другим сплайном;
- исключает появление нежелательных точек перегиба и колебаний кривизны, что позволяет использовать метод при построении обводов;
- сокращает объем информации, передаваемой на перфоленте в станки с ЧПУ и чертежные автоматы, имеющие системы управления с линейно-круговой интерполяцией.

На основе сплайнов кусочно-постоянной кривизны разработаны достаточно простая математическая модель и алгоритмы решения геометрических задач для широкого класса геометрических объектов с гладкой границей [2, 5], которые используются в САПР штампованных поковок.

Л и т е р а т у р а

1. СУХИХ Б.И., ВАЙСБУРД Р.А., КАНКОВ С.И. О внутреннем языке САПР горячей объемной штамповки тел вращения. - В кн.: Автоматизация процессов проектирования. Минск, 1979, вып. 4, с.65-69.
2. СУХИХ Б.И., ВАЙСБУРД Р.А. Об алгоритмическом построении монотонной бесповторной логической функции сечения геометрического объекта.- В кн.: Автоматизация процессов проектирования. Минск, 1980, вып. 3, с. 20-24.
3. BOLTON K.M. Biarc curves. - Computer Aided Design, 1975, v.7, N 2, p.89-92.
4. KOSUGI M. Curve generator for generating a smooth curve with a pair of circular arcs between two given points. Патент США, № 4158887, опубл. 19. 06. 79.
5. СУХИХ Б.И., КАНКОВ С.И., АРДАШИРОВ Н.Ш. Комбинированный метод приближенного вычисления объемов геометрических объектов. - В кн.: Автоматизация процессов проектирования. Минск, 1980, вып.3, с. 33-37.

Поступила в ред.-изд.отд.

4 февраля 1981 года