МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 88

УДК 681.142/155

О ПОНЯТИИ "ЗАКОНОМЕРНОСТЬ"

Ж.С.Азимова, Д.И.Свириденко

1. Введение. В развитии проблемы "Машинные методы обнаружения закономерностей", приковывающей к себе пристальное внимание специалистов самых разных профессий, можно выделить следующие две тенденции - с одной стороны, все возрастающую масштабность, сложность и многоаспектность решаемых задач, и с другой стороны, практическое отсутствие серьезных конструктивных методологических и теоретических результатов [1,2]. Первая тенденция выдвигает на передний план необходимость создания такой вычислительной среды, в которой рассматриваемая проблема решалась бы наиболее успешно и эффективно. Вторая - заставляет обратить серьезное внимание на дальнейшую разработку и совершенствование методологии и теории машинных методов обнаружения закономерностей. В последнее время все чаще высказывается мысль о необходимости "встраивания" человека в процедуры решения как задач поиска закономерностей, так и задач построения алгоритмов обработки данных, реализующих выявление закономерностей (см., например, материалы МОЗ-1 в [1]). Другими словами, речь идет о разработке человеко-машинных систем обнаружения и использования закономерностей. Проблема машинных методов обнаружения закономерностей на наших глазах постепенно перерастает в проблему человеко-машинных методов обнаружения закономерностей. Но необходимо четко понимать, что такое перерастание, в свою очередь, также требует методологического и теоретического осмысливания. В последнее время большая работа ведется в направлении создания "полигона", с помощью которого можно было бы решать задачу выбора алгоритмов обнаружения закономерностей. Создание такого "полигона" опять-таки требует методологических и теоретических изысканий. Та-

ким образом, в любом случае мы сталкиваемся с необходимостью встраивания методолого-теоретического "мостика" в цепочку "прагматика $\rightleftarrows$ [методология $\rightleftarrows$ теория] $\rightleftarrows$ технология". И здесь основной методологической задачей является анализ понятия "закономерность" с целью разработки его формальных моделей [3]. Главным инструментом по необходимости должна выступать математическая логика, поскольку закономерность есть о б щ е л о г и ч е с к о е понятие.

Цель данной работы - очертить контуры одного из возможных подходов к анализу понятия "закономерность" с позиций эмпирического конструктивизма [4,5].

2. А н а л и з п о н я т и я "з а к о н о м е р н о с т ь". Понятие "закономерность" по своей природе располагает нас к всевозможным его истолкованиям и формализациям [3]. Из множества исследовательских работ последних лет, посвященных понятию "закономерность", которое, в свою очередь, тесно связано с проблемой индукции, можно выделить два наиболее характерных направления. Первый, ставший уже традиционным, подход к анализу понятия "закономерность" (условно назовем "прямым") характеризуется попытками определить это понятие в формальном языке с соответствующим синтаксисом и семантикой, представляя его в виде функционального выражения логической функции конкретного вида. Цель таких работ - непосредственная формализация эвристических приемов усиления гипотез. Такие попытки вряд ли приведут нас к желаемому результату - созданию универсального понятия "закономерность", - ибо решение проблемы эквивалентности или сведения различных способов формализации этого понятия к друг другу представляется нам весьма проблематичной.

Второе направление, на наш взгляд, является более перспективным и обещающим. Оно заключается в следующем. Рассматривается произвольная область с определенными свойствами и особенностями, определяются необходимые условия существования закономерности в некоторой подобласти, конструируется метод отыскания закономерности в ней и выводится гипотеза о распространении полученного результата на всю область. Наиболее результативной в методологическом плане работой по исследованию в этом направлении, наверное, является работа [6], суть которой заключается в следующем. В произвольной области (конечной или бесконечной) формулируются необходимые требования (универсальность применения закономерности, нетривиальность, непротиворечивость исходным данным, инвариантность относительно форм записи исходной информации), которым должна удовлетворять любая закономерность. Содержательно каждое из этих требований гарантирует нас от возникновений парадоксов в исследуемой области. Основной результат работы - теорема о несуществовании закономерности, удовлетворяющей выше изложенным необходимым требованиям. Полученный результат является не запрещающим, а обращает внимание на возможность вести исследования в тех направлениях, в которых можно избежать такого "нежелательного" результата. Например, в работе [7] сделана попытка проанализировать возможность существования закономерности в области с противоречиями*) путем изменения некоторых правил вывода (в частности, такого правила вывода, как "из лжи следует L ", где L - произвольная формула). В других работах [8,9] допускаются противоречивые области и исследуется проблема обнаружения закономерности в максимально непротиворечивой подобласти. Исследования [10] посвящены проблеме анализа "открытости" мира и попыткам объяснить возникновения возможных противоречий в рассматриваемой области в связи с допущением такого свойства ("открытости") мира. В [11] высказывается мысль о том, что нужно искать такие принципы конструирования методов отыскания закономерностей, которые, в конечном счете, можно было бы интерпретировать как принципы, описывающие свойства закономерностей для исследуемой области, причем эти принципы должны приниматься априорно.

В настоящей работе намечается подход к проблеме обнаружения закономерностей, основанный на принципах эмпирического конструктивизма [4,5]. Основная идея заключается в том, что закономерность отождествляется с реализующим ее алгоритмом (программой) и тем самым задача обнаружения закономерности сводится к проблеме автоматизированного синтеза программ.

3. Понятие закономерности. Попыткам придать понятию "закономерность" точный смысл, как видно из п.2, посвящены многие работы. Наша цель - осуществить подобное мероприятие с позиций эмпирического конструктивизма [4,5]. Заметим, что и заимствованные из [4] и вводимые вновь определения не являются точными в математическом смысле. Мы заботились прежде всего о со-

---

*) Подразумевается, что если при доказательстве утверждения получено противоречие, то это еще не означает возможность вывода любого утверждения, как это имеет место в классической логике.

держательном смысле. Поэтому их нужно воспринимать как схемы точных определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Я з ы к - это разрешимое простыми средствами множество таких конечных слов некоторого алфавита (называемых ф о р м у л а м и), что любая сложная формула может быть просто разбита на составные части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. И н т е р п р е т и р о в а н н ы й я з ы к - это язык вместе с заданной интерпретацией, для которого определено отношение "формула A выполняется в интерпретации с достоверностью α ", где α принимает значения из некоторой решетки $\langle \mathcal{U}, \leq \rangle$. При этом значение α легко может быть вычислено из достоверностей, составляющих формулу структурных компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. И н т е р п р е т и р о в а н н а я л о г и к а - это такая пара $\langle$ интерпретированный язык, конечный набор правил вывода $\rangle$, что

а) определены понятия в ы в о д а и с л о ж н о с т ь вывода;

б) отношение "формула A выводима из формул $A_1, \dots, A_n$ по правилам вывода" разрешимо простыми средствами;

в) если некоторое правило вывода понижает у заключения его достоверность по сравнению с достоверностью посылок, то это понижение незначительное.

Заметим, что все правила вывода либо не увеличивают достоверность заключения по сравнению с достоверностью посылок (такие правила вывода назовем с о д е р ж а т е л ь н о - у с и л и в а ю щ и м и), либо не понижают достоверность заключения (с о д е р ж а т е л ь н о - о с л а б л я ю щ и е).

Каждое правило вывода можно мыслить себе как n-местную операцию. Зададимся некоторым $\varepsilon > 0$ и определим область ε-допустимости некоторого правила вывода следующим образом*): будем считать, что правило вывода применимо к формулам $A_1, \dots, A_n$ тогда и только тогда, когда

$$\max_i |tr(A_i) - tr(\text{ПВ}(A_1, \dots, A_n))| \leq \varepsilon,$$

где $tr(A_i)$ - это достоверность A_i, $\varepsilon \in [0,1]$. Таким образом, вводя параметр ε, мы фактически требуем, чтобы каждое применение

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что достоверность формул оценивается числом из отрезка [0,I].

правила вывода было р е з у л ь т а т и в н ы м. Поясним это на примере. Пусть правило вывода есть $\frac{A}{A \vee B}$ и $tr(A) = \varepsilon$, где ε близко к 0. Тогда имеет место $\frac{A}{\neg A \vee A}$. Положим $tr(\neg A) = 1 - tr(A) = 1 - \varepsilon$. Если $tr(A \vee \neg A)$ вычисляется по правилу $tr(A \vee B) = \max(tr(A), tr(B))$, то $tr(A \vee \neg A) = 1 - \varepsilon$. Но формула $A \vee \neg A$, как правило, сама по себе бесполезна в тех ситуациях, которые нас интересуют, хотя имеет очень высокую достоверность. Вводя понятие ε-допустимости правил вывода, мы тем самым ограничиваем появление подобных случаев.

Зафиксируем некоторую совокупность правил вывода. Впредь будем считать, что для каждого правила вывода из этой совокупности определена некоторая ε-допустимость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. а) Формула A называется $(,\alpha^*)$ - в ы в о - д и м о й и з $\mathbf{A}$, если A выводима из $\mathbf{A}$ и $tr(A) \geq \alpha^*$.

б) Предположим, что сложность вывода измеряется натуральным числом. Так, например, если вывод определен в виде дерева вывода, то под сложностью можно понимать высоту (натуральное число k^*) дерева вывода. Пусть $k^* \geq 0$, тогда формулу A назовем $(k^*,)$ - в ы в о д и м о й и з $\mathbf{A}$, если A выводима из $\mathbf{A}$ со сложностью вывода, не превышающего k^*.

в) Формула A (k^*,α^*)- в ы в о д и м а и з $\mathbf{A}$, если она одновременно является $(,\alpha^*)$-выводимой и $(k^*,)$-выводимой формулой из $\mathbf{A}$.

г) Набор формул $\mathbf{A}$ назовем (k^*,α^*) - н е п р о т и в о р е ч и в ы м, если среди $[\mathbf{A}](k^*,\alpha^*)$ (множества всех (k^*,α^*)-выводимых из $\mathbf{A}$ формул) не существует формулы вместе с ее отрицанием.

Заметим, что если $\alpha^* \leq \min_{i \in I}(\alpha_i)$, где $\alpha_i = tr(A_i)$, $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, то $\mathbf{A} = [\mathbf{A}](0,\alpha^*) \subseteq [\mathbf{A}](k^*,\alpha^*)$, $k^* \geq 0$.

(k^*,α^*) -непротиворечивость некоторого множества формул означает в определенном смысле его "локальную" непротиворечивость, т.е. что в некоторой "обозримой окрестности" этого множества не содержится противоречий. и, хотя это множество формул может оказаться противоречивым в действительности, получение противоречий связано с большими сложностями и затратой больших ресурсов. Естественным образом возникает вопрос об изучении таких теорий. Поскольку основная цель настоящей работы - очертить круг проблем, имеющих непосредственное отношение к проблеме человеко-машинного поиска закономерностей, математическое решение поднятого вопроса есть предмет дальнейших исследований.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - два набора формул, из них $\mathbf{A}$ - конечный набор. Формулу C будем называть (k^*,α^*)-допустимой для набора $\mathbf{A}$ относительно набора $\mathbf{B}$, если

а) набор $\mathbf{B}\cup\{C\}$ является (k^*,α^*)-непротиворечивым;

б) $\mathbf{A} \cap [\mathbf{B}\cup\{C\}] (k^*,\alpha^*) \neq \varnothing$ [ж)] .

Обозначим через $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)$ множество всех (k^*,α^*)-допустимых для $\mathbf{A}$ относительно $\mathbf{B}$ формул. Искать закономерности будем среди формул данного множества. В роли закономерности будет выступать в определенном смысле "наилучшая" допустимая формула. Прежде всего нас должны интересовать те допустимые формулы, которые "объясняют" наибольшее число фактов, представленных формулами из $\mathbf{A}$. Кроме того, имеет смысл учитывать "ценность" этих объяснимых фактов. Будем считать, что на наборе $\mathbf{A}$ задано некоторое отношение предпочтения. Например, формула A_i как факт добыта труднее факта A_j, или может оказаться, что A_i обладает для нас большей ценностью, чем A_j по другим соображениям. Используя отношение предпочтения, можно определить функцию $f\colon \mathcal{P}(\mathbf{A}) \to L$, где $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ - множество всех подмножеств $\mathbf{A}$, а L - некоторое частично-упорядоченное множество, формализующее нашу систему предпочтений. Данную функцию f и будем рассматривать как математический аналог понятия "ценности" подмножества экспериментальных фактов. Используя функцию f на множестве $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)$ допустимых формул, в свою очередь, также можно определить функцию предпочтения $F\colon [\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*) \to L$, учитывающую те факторы, о которых речь шла выше. Ясно, что в каждом случае выбор конкретного отношения предпочтения на множестве $\mathbf{A}$ функций f и F определяется из содержательной постановки задачи. Далее будем считать, что функция F задана. Назовем формулы $C_1, C_2 \in [\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)$ F-равнообъясняющими (в обозначениях $C_1 \overset{F}{\sim} C_2$), если $F(C_1) = F(C_2)$. Рассмотрим фактор-множество $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)/_{\overset{F}{\sim}}$ с индуцированным функцией F частичным порядком $\leq_F$:

$$[C_1] \leq_F [C_2] \Leftrightarrow F(C_1) \leq F(C_2).$$

Заметим, что фактор-множество $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)/_{\overset{F}{\sim}}$ конечно. Возможны следующие два случая:

ж) Здесь $\mathbf{A}$ нужно мыслить себе как конечный набор описаний экспериментальных фактов. И хотя теоретически можно рассматривать $\mathbf{A}$ как формулу, подобная интерпретация заставляет смотреть на $\mathbf{A}$ именно как на набор формул-фактов.

1. В $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)/_{\underset{\approx}{F}}$ существует наибольший элемент.

2. В $[\mathbf{A},\mathbf{B}](k^*,\alpha^*)/_{\underset{\approx}{F}}$ существует несколько максимальных элементов.

В первом случае ясно, что дальнейший поиск нужно осуществлять в наибольшем классе-эквивалентности. Заметим, что хотя второй случай на практике возникает достаточно часто, однако на самом деле человек всегда обладает способностью усилить критерий отбора подмножества формул, наиболее предпочитаемых им, и поэтому, если даже и окажется несколько максимальных элементов, то определенным образом усилив функционал $\mathbf{F}$ (в частности, например, перейдя от функции f к более сильной f'), он способен выявить наибольший из них. В дальнейшем будем предполагать, что имеет место первый случай.

Рассмотрим множество допустимых формул, содержащихся в наибольшем классе-эквивалентности $[C]^{max}$. Поскольку каждая формула из этого класса "объясняет" одно и то же подмножество формул из набора $\mathbf{A}$, то естественно искать формулу с наибольшей достоверностью. Если таких формул несколько, то имеется еще один критерий - сложность вывода формул набора $\mathbf{A}$ из $\mathbf{B} \cup \{C\}$. Возможен и другой ход рассуждений: вначале ищем формулы, допускающие наименьшую сложность вывода, а среди последних - формулы с наибольшей достоверностью. Так или иначе можно ввести следующие конструкции, в которых вводятся различные понятия закономерностей для набора $\mathbf{A}$ относительно набора $\mathbf{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. а) Формула $\Phi \in [C]^{max}$ называется $(k^*, \alpha^*, \alpha \to max)$ -з а к о н о м е р н о с т ь ю, если для каждой формулы $C' \in [C]^{max}$ (достоверность $(\Phi) \geq$ достоверность (C')).

б) Формула $\Phi \in [C]^{max}$ называется $(k^*, \alpha^*, k \to min)$-з а к о н о м е р н о с т ь ю, если для каждой формулы $\Psi \in [C]^{max}$ и для каждой формулы $A \in \mathbf{A} \cap [\mathbf{B} \cup \{C\}]\ (k^*,\alpha^*)$ сложность вывода A из $\mathbf{B} \cup \{\Phi\} \leq$ сложность вывода A из $\mathbf{B} \cup \{\Psi\}$.

в) Формула $\Phi \in [C]^{max}$ называется $(k^*,\alpha^*, \alpha \to max, k \to min)$-з а к о н о м е р н о с т ь ю, если Φ есть $(k^*, \alpha^*, k \to min)$-закономерность среди $(k^*, \alpha^*, \alpha \to max)$- закономерностей, и $(k^*, \alpha^*, k \to min, \alpha \to max)$- з а к о н о м е р н о с т ь ю, если она является $(k^*, \alpha^*, \alpha \to max)$-закономерностью среди $(k^*, \alpha^*, k \to min)$-закономерностей.

г) Формула $\Phi \in [C]^{max}$ называется (k^*, α^*)-з а к о н о м е р н о с т ь ю, если она одновременно является и $(k^*, \alpha^*, k \to min, \alpha \to max)$ и $(k^*, \alpha^*, \alpha \to max, k \to min)$-закономерностью.

Прокомментируем введенные определения. Пусть **B** - это исходные предпосылки, наши исходные знания о некотором "мире". Например, как в [II], это могут быть аксиомы, описывающие свойства приборов, с помощью которых мы познаем мир. Другими словами, **B** - это исходная гипотеза. Пусть мы провели несколько измерений и их результаты зафиксировали в виде протоколов $\{pr\}$. Для нас это и есть набор суждений **A**. Если все экспериментальные данные легко выводимы из гипотезы **B**, то задачи поиска закономерности не возникает. Другое дело, когда знаний **B** не хватает для объяснения результатов измерений **A** (если мы им, естественно, доверяем). Тогда и возникает необходимость по возможности непротиворечивым образом усилить гипотезу **B**, чтобы объяснить (вывести) результаты **A**. Поскольку ресурсы наши ограничены, то, естественно, данный поиск мы должны вести в некоторой "окрестности" **B**. При этом мы можем пойти на определенный риск, ставя перед собой задачу поиска не абсолютной истинной формулы в нашем "мире", а указав нижнюю границу α^* ее достоверности. Если таких формул в окрестности оказалось несколько, то вполне естественно взять формулу с наибольшей достоверностью, что и отражено в определении 5. Естественно, возникает задача эффективного поиска (k^*, α^*)-закономерности для фиксированных k^* и α^*, или в случае их существования поиска каких-то разумных "аппроксимаций" этих величин. Оставив более точные формулировки данных задач до раздела 4, рассмотрим сейчас пример, иллюстрирующий введенные определения.

Пусть σ_0 - конечная сигнатура, состоящая из предикатных констант $P_1^{n_1}, \ldots, P_k^{n_k}$, где n_i - местность, приписываемая предикатному символу P_i. Рассмотрим модель $\mathfrak{M} = \langle M, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_k \rangle$ сигнатуры σ_0. Через M^* обозначим множество $M^0 \cup M \cup M \times M \cup \ldots \cup \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n} \cup \ldots$ всех кортежей конечной длины. Здесь $M^0 = \{\langle\,\rangle\}$. Будем обозначать длину кортежа $m^* \in M^*$ через $\underline{lh}(m^*)$; $\underline{lh}(\langle\,\rangle) = 0$. Предположим, что с каждым n_i-местным предикатом $\bar{P}_i \subseteq M^{n_i}$ связана функция $f_i : M^* \to [0,1]$, удовлетворяющая условию: <u>если</u> $lh(m^*) \neq n_i$, <u>то</u> $f_i(m^*) = 0$. Если для $m^* \in M^*$ и $f_i(m^*) = \alpha \in [0,1]$, то будем говорить, что предикат $\bar{P}_i$ в ы п о л н я е т с я н а m^* с д о с т о в е р н о с т ь ю α и писать $m^* \in_\alpha \bar{P}_i$. Обогатим сигнатуру σ_0 именами элементов модели $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\sigma = \sigma_0 \cup \{c_m \mid m \in M\}$. Рассмотрим язык L^σ прикладного исчисления предикатов и модель

$\mathfrak{M}$. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{C}_M$ и $\mathbf{P}$ множества индивидных переменных, констант и предикатных констант соответственно. Отображение $i: \mathbf{X} \cup \mathbf{C}_M \cup \mathbf{P} \to M \cup \mathcal{P}(M^*)$, где $\mathcal{P}(M^*)$-множество всех подмножеств множества M^*, назовем с о с т о я н и е м и н т е р п р е т а ц и и (или просто "состоянием"), если:

$$\forall y \in \mathbf{X} \cup \mathbf{C}_M \,(i(y) \in M);$$

$$\forall c_m \in \mathbf{C}_M \,(i(c_m) = m);$$

$$\forall P_i \in \mathbf{P} \,(i(P_i) = \tilde{\mathbf{P}}_i).$$

Совокупность всех отображений назовем и н т е р п р е т а ц и е й. Далее, если i-состояние и $\bar{y} \in (\mathbf{X} \cup \mathbf{C}_M)^*$, т.е. $\bar{y}$ есть кортеж $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ конечной длины, состоящий из индивидных переменных и констант, то через $i(\bar{y})$ будем обозначать кортеж $\langle i(y_1), \ldots, i(y_n) \rangle \in M^*$. Опишем схемы определений отношения выполнимости формул языка L^σ на элементах модели $\mathfrak{M}$ с достоверностью α. Тот факт, что произвольная формула A выполняется на элементе $m^* \in M^*$ с достоверностью $\alpha \in [0,1]$ в состоянии i, будем обозначать через $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A$.

ДI. Прежде, чем дать точные определения, необходимо определить свое отношение к понятию выполнимости. Здесь возможны различные точки зрения:

ДIа: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \to \forall \beta \in [0,1] (\beta \neq \alpha \to m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\not\models}} A)$ – свойство одноточечности,

ДIб: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \to \forall \beta < \alpha (m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A)$ – свойство наследственности,

ДIв: $\forall \beta < \alpha (m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A) \to m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A$ – свойство непрерывности.

Наконец, принципы ДIб и ДIв могут быть совмещены следующим образом:

ДIг: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \Leftrightarrow \forall \beta < \alpha (m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A)$ – свойство преемственности,

ДIд: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \Leftrightarrow \alpha = \min\{\beta \mid m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\not\models}} A\}$.

Д2. Пусть $P_j(y_1,\ldots,y_{n_j})$ - атомная формула, где y_i - либо индивидная переменная, либо константа, $j \le k$, $1 \le n_j$. Тогда

Д2а: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} P_j(y_1,\ldots,y_{n_j}) \Rightarrow [m^* \epsilon_\alpha \bar{P}_j \,\&\, i(\bar{y}) = m^*]$,

Д2б: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} P_j(y_1,\ldots,y_{n_j}) \Leftarrow [m^* \epsilon_\alpha \bar{P}_j \,\&\, i(\bar{y}) = m^*]$.

Д3. Пусть формула B имеет вид $\neg A$. Отношение выполнимости, как и в последующих случаях, можно определять различными способами, отражающими разные точки зрения на природу выполнимости. Например, "статистическая" точка зрения вынуждает нас прийти к следующему определению:

$$Д3а: \quad m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{1-\alpha}{\models}} A.$$

При другом подходе определения могут быть такими:

$$Д3б: \quad m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\not\models}} A,$$

$$Д3в: \quad m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B \Leftrightarrow \forall\beta < \alpha(m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\not\models}} A).$$

Д4. Пусть формула C имеет вид $A \,\&\, B$. Для формулы C ее достоверность в точке m^* также можно определить многими способами. Например,

Д4а: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \,\&\, B \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{\delta_1}{\models}} A$ и $m^* \overset{i}{\underset{\delta_2}{\models}} B$, $\alpha = \min(\delta_1, \delta_2)$,

Д4б: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \,\&\, B \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A$ и $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B$.

Д5. Для формулы вида $A \vee B$ определение отношения выполнимости допускает следующие записи:

Д5а: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee B \Leftrightarrow (m^* \overset{i}{\underset{\delta_1}{\models}} A \vee m^* \overset{i}{\underset{\delta_2}{\models}} B) \,\&\, \alpha = \max(\delta_1, \delta_2)$, Д5б: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee B \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B$,

Д5в: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee B \Leftrightarrow (m^* \overset{i}{\underset{\delta_1}{\models}} A \& m^* \overset{i}{\underset{\delta_2}{\models}} B) \& \alpha = \max(\delta_1, \delta_2)$,

Д5г: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee B \Leftrightarrow (m^* \overset{i}{\underset{\delta_1}{\models}} A \vee m^* \overset{i}{\underset{\delta_2}{\models}} B) \& \alpha = \min(\delta_1, \delta_2)$,

Д5д: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \vee B \Leftrightarrow$ если $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A$, то $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\not\models}} B$, иначе $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} B$.

Ясно, что таких определений можно ввести достаточно много.

Д6. Пусть формула имеет вид $\exists xA$ и $\overline{y}$ – это набор свободных переменных и констант, встречающихся в этой формуле. Будем считать, что формуле A сопоставлен кортеж свободных переменных и констант $\langle z, \overline{y} \rangle$, где z может быть либо индивидной переменной x, либо некоторой константой. Тогда:

Д6а: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \exists x A \Leftrightarrow \exists m \in M(\langle m, m^* \rangle \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A(c_m))$,

Д6б: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \exists x A \Leftrightarrow \alpha = \sup\limits_{\beta} (m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A(x))$,

Д6в: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \exists x A \Leftrightarrow \alpha = \sup\limits_{\beta} (\exists m \in M(\langle m, m^* \rangle \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A(c_m)))$,

Д6г: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \exists x A \Leftrightarrow \alpha = \sup\limits_{\beta} (\exists m \in M(\langle m, m^* \rangle \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A(x)))$.

Д7. Для формул вида $\forall x A$ отношение выполнимости определяется аналогично Д6, а именно:

Д7а: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \forall x A \Leftrightarrow \forall m \in M(\langle m, m^* \rangle \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A(c_m))$,

Д7б: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \forall x A \Leftrightarrow m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\not\models}} \exists x \neg A$,

Д7в: $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} \forall x A \Leftrightarrow \alpha = \inf\limits_{\beta} (\forall m \in M(\langle m, m^* \rangle \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A(x)))$.

Д. Определим теперь понятие в ы п о л н и м о с т и формулы A.

$Д: \quad m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \Leftrightarrow \alpha = \sup_{\beta}\{\exists i - \text{состояние интерпретации} \mid m^* \overset{i}{\underset{\beta}{\models}} A\}.$

Внимательный читатель, наверное заметил, что последнее определение корректно, если выбрана такая система определений Д1-Д7, что для каждых $m^* \in M$, $A \in Frm$ = { множество формул языка L^σ } и состояния интерпретации i найдется такое α , что определено отношение $m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A$. Возникает задача выбора непротиворечивой системы определений Д1-Д7. В частности, систему определений Д1-Д7 будем называть строго непротиворечивой, если справедливо и недвусмысленно следующее определение:

$$m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A \Leftrightarrow \exists i - \text{состояние интерпретации} \ (m^* \overset{i}{\underset{\alpha}{\models}} A).$$

Пусть теперь J - некоторая интерпретированная логика с языком L^σ. Помимо тех свойств, которыми должна обладать закономерность согласно определению 5, от формулы, претендующей на это звание, можно потребовать дополнительные структурные свойства. Во-первых, эта формула должна быть замкнутой, т.е. предложением. Далее, если проанализировать вид высказываний закономерностей, то окажется, что они имеют довольно-таки стандартную структуру. Вот один из типичных примеров: "для каждого объекта x из данного множества X найдется объект y из некоторого множества Y , находящийся с объектом x в определенных взаимоотношениях". Другими словами, вид формулы, представляющей некоторую закономерность, должен быть следующим:

$$\forall x(A(x) \to \exists y\, B(x, y)). \qquad (1)$$

Таким образом, формула C (которая была введена в начале данного раздела как (k^*, α^*) -допустимая формула для **A** относительно **B**) является (k^*, α^*) -закономерностью для **A** относительно **B** в исчислении J, если она удовлетворяет условиям определения 5 и является $\forall\exists$-предложением вида (I). Заметим, что то что понимается под закономерностью в работах [II,I2] является частным случаем введенного нами понятия.

4. Поиск закономерностей. Проблема человеко-машинного обнаружения закономерностей естественно распадается на две подзадачи:

- поиска закономерностей;

- использования найденных закономерностей в алгоритмах принятия решений, или синтеза решающего правила.

И в том,и в другом случаях естественно предполагается активное участие человека. Здесь мы рассмотрим подход к решению первой из данных задач, являющейся естественным приложением методов эмпирического конструктивизма.

Пусть J - интерпретированная логика с языком прикладного исчисления предикатов, для которой определено понятие (k^*, α^*)-закономерность. Наша задача заключается в построении такого алгоритма $F(k^*, \alpha^*)$, который бы, имея на входе пару наборов формул **A** и **B**, на выходе выдавал бы (k^*, α^*)-закономерность для **A** относительно **B**. Заметим,что на практике мы довольствуемся не только тем, что выбираем для себя приемлемые k^*, α^* и фиксируем структурный вид формул, представляющих закономерности, но зачастую и поиском некоторой (k^*,α^*)-допустимой для набора **A** относительно **B** формулы, которая,однако, достаточно хорошо аппроксимирует искомую (k^*,α^*)-закономерность C. Например, это может быть (k^*, α^*)-допустимая формула C' такая, что для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ $|tr(C) - tr(C')| \leq \varepsilon$. Будем называть такие формулы ε-аппроксимацией искомой закономерности. В любом случае задача поиска закономерности может быть записана в виде $\forall\exists$-формулы некоторого языка второго порядка:

$\forall$**A**,**B** (**A** - диаграмма конечной модели & **B**-конечный набор предложений $\rightarrow \exists$A (A есть (k^*,α^*)-закономерность*) для **A** относительно **B**)).

То, что запись задачи поиска закономерности требует языка второго порядка,нам представляется весьма примечательным фактом и отражает принципиальную трудность ее формулировки и решения.

Один из подходов к решению этой задачи можно изложить с позиций интуиционизма: построить процедуру, которая по входным формулам **A** и **B** дает формулу A. Последнее, в свою очередь, сводится непосредственно к задаче синтеза программы, реализующей соответствующий функционал. Что касается задачи применения закономерности, то мы выяснили, что сама закономерность тоже имеет вид $\forall\exists$ -

---

*) либо A есть ε-аппроксимация (k^*,α^*)-закономерности для **A** относительно **B**.

формулы, следовательно, применяя закономерность, мы, в конечном итоге, вновь решаем задачу синтеза процедуры.

Авторы благодарят за полезные обсуждения и конструктивные замечания Н.Г.Загоруйко и К.Ф.Самохвалова.

Литература

I. Машинные методы обнаружения закономерностей. Материалы Всесоюзного симпозиума.-Новосибирск, 1976. - 120 с.

2. Эмпирическое предсказание и распознавание образов. Вычислительные системы. Вып. 79. Новосибирск, 1979. - 126 с.

3. ЗАГОРУЙКО Н.Г. Об определении понятия "закономерность". -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, 1979, с. 3-6.

4. НЕПЕЙВОДА Н.Н., СВИРИДЕНКО Д.И. Программирование с логической точки зрения. Т.I. - Новосибирск, 1981. - 48 с. (Препринт/ ИМ СО АН СССР).

5. НЕПЕЙВОДА Н.Н., СВИРИДЕНКО Д.И. Логическая точка зрения на программирование. Т.2. - Новосибирск, 1981. - 48 с. (Препринт/ ИМ СО АН СССР).

6. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. - Новосибирск: НГУ, 1978. - 66 с.

7. ASENJO H.G., TAMBURINO J. Logic of antinomies.- Notre Dame.- J.of Formal Logic,1975,v.VXI, N 1,January,p.17-45.

8. МАЗУРОВ В.Д. Несовместные системы неравенств в задачах распознавания. -В кн.: Метод комитетов в распознавании образов. Вып. 6. Свердловск, 1974, с. 3-9 (Ин-т матем. и мех. УНЦ АН СССР).

9. МАЗУРОВ В.Д., ТЯГУНОВ Л.И. Метод комитетов в распознавании образов. -Там же, с. 10-40.

10. БЕЛЯКИН Н.В. Отношение теории к реальности. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, 1979, с. 7-11.

11. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 67). Новосибирск,1976,с.54-68.

12. ВИТЯЕВ Е.Е. Алгоритм эмпирического предсказания.-В кн.: Вычислительные системы. Вып. 61. Эмпирическое предсказание и распознавание образов. Новосибирск, 1975, с. 28-36.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 июля 1981 года